УДК 621.372

Радкевич О. І.

ЕФЕКТИВНИЙ АЛГОРИТМ РІШЕННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПРИСТРОЮ ОПЕРАЦІЙ НАД МАТРИЦЯМИ

НДІ Мікроприладів НАН України

В статті розглядається достатньо ефективний алгоритм рішення систем алгебраїчних рівнянь по процедурі розкладання та розщеплення матриць коефіцієнтів на компоненти, що являють собою змикаючі квадранти матриці. Даний алгоритм завдяки високому ступеню внутрішнього паралелізму може використовуватись в обчислювальних пристроях з регулярною структурою.

Сучасні оптоелектронні системи не можуть функціонувати в реальному часі без сигнальної процесорної електроніки, архітектура якої повинна бути орієнтована на обробку інтенсивних потоків інформації з використанням ефективних алгоритмів рішення систем рівнянь та мікропроцесорного керування з використанням паралельних обчислювальних структур.

В статті розглядається *WZ* алгоритм, що характеризується високим ступенем внутрішнього паралелізму та широко застосовується в числовій лінійній алгебрі. Алгоритм *WZ* перетворення для матриці *H* і рішення системи рівнянь розглянемо на прикладі щільної матриці четвертого порядку. Припустимо, що матриця H_i представлена у вигляді:

$$H_i = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ \hline h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ \hline h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ \hline h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ \hline \end{array}.$$

Цю матрицю за допомогою *WZ* перетворення [1] можна представити у вигляді W_i і Z_i матриць

$$\mathrm{W_i}= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline \omega_{21} & 1 & & \omega_{24} \\ \hline \omega_{31} & & 1 & \omega_{34} \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \quad \mathrm{Z_i}= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ \hline & z_{22} & z_{23} & \\ \hline & z_{32} & z_{33} & \\ \hline z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \\ \hline \end{array},$$

де елементи матриць W_{ij} і Z_{ij} знаходяться в наступному співвідношенні:

$z_{11} = h_{11}, \quad z_{12} = h_{12}, \quad z_{13} = h_{13}, \quad z_{14} = h_{14},$
$z_{41} = h_{41}, \quad z_{42} = h_{42}, \quad z_{43} = h_{43}, \quad z_{44} = h_{44},$

а елементи ω_{21}, ω_{24}, ω_{31}, ω_{34} і z_{22}, z_{23}, z_{32}, z_{33} обчислюються в результаті рішення двох систем рівнянь другого порядку:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline h_{11} & h_{41} \\ \hline h_{41} & h_{44} \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \omega_{21} \\ \hline \omega_{24} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline h_{21} \\ \hline h_{24} \\ \hline \end{array};$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline h_{11} & h_{41} \\ \hline h_{41} & h_{44} \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \omega_{31} \\ \hline \omega_{34} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline h_{31} \\ \hline h_{34} \\ \hline \end{array};$$

$z_{22} = h_{22} - \omega_{21}\, z_{12} - \omega_{24}\, z_{42};$
$z_{23} = h_{23} - \omega_{21}\, z_{13} - \omega_{24}\, z_{43};$
$z_{32} = h_{32} - \omega_{31}\, z_{12} - \omega_{34}\, z_{42};$
$z_{33} = h_{33} - \omega_{31}\, z_{13} - \omega_{34}\, z_{43}.$

Тепер розглянемо процес рішення систем після *WZ* перетворення. Представимо систему

$$H_iX_i = W_iZ_iX_i = Q_i$$

у виді двох підсистем

$$W_i \cdot Y_i = Q_i, \tag{5}$$
$$Z_iX_i = Y_i\,. \tag{6}$$

Після рішення рівнянь (5) знаходимо вектор Y_i, а потім, підставивши його значення в рівняння (6) обчислимо вектор невідомих X_i.

Алгоритм рішення системи з *WZ* перетворенням розглянемо також на прикладі системи четвертого порядку:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline \omega_{21} & 1 & & \omega_{24} \\ \hline \omega_{31} & & 1 & \omega_{34} \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \mathrm{x} \begin{array}{|c|} \hline y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline y_3 \\ \hline y_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline q_1 \\ \hline q_2 \\ \hline q_3 \\ \hline q_4 \\ \hline \end{array}, \tag{7}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ \hline & z_{22} & z_{23} & \\ \hline & z_{32} & z_{33} & \\ \hline z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \\ \hline \end{array} \mathrm{x} \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline x_4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline y_1 \\ \hline y_2 \\ \hline y_3 \\ \hline y_4 \\ \hline \end{array}, \tag{8}$$

З матричного рівняння (7) знаходимо $y_1 = q_1$; $y_4 = q_4$; $y_2 = q_2 - \omega_{21}q_1 - \omega_{24}q_4$; $y_3 = q_3 - \omega_{31}q_1 - \omega_{34}q_4$,
а з матричного рівняння (8) можна записати дві системи рівнянь другого порядку, що дозволяють обчислити x_2, x_3, x_1 і x_4:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline z_{22} & z_{23} \\ \hline z_{32} & z_{33} \\ \hline\end{array} * \begin{array}{|c|}\hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline y_2 \\ \hline y_3 \\ \hline\end{array};$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline z_{11} & z_{14} \\ \hline z_{41} & z_{44} \\ \hline\end{array} * \begin{array}{|c|}\hline x_1 \\ \hline x_4 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline y_1 - z_{12}x_2 - z_{13}x_3 \\ \hline y_4 - z_{14}x_2 - z_{43}x_3 \\ \hline\end{array}.$$

Співвідношення мультиплікативних операцій залежить від розміру n похідної матриці при програмуванні матриць W і Z, рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь і загального числа мультиплікативних операцій [2].

Для непарного n виконують формування матриць W, Z і вирішують рівняння

$$f_{WH} = 2(n-1)^2,\quad f_{ZH} = (n+1)(n-3)+2,\quad f_{PH} = \frac{3n^2-1}{2}.$$

Загальне число мультиплікативних операцій для непарного n визначають у такий спосіб:

$$f_{OH} = \frac{9n^2}{2} - 6n + \frac{1}{2}.$$

Для парного n виконують формування матриць W, Z і вирішують рівняння:

$$f_{W4} = 2n(n-2),\quad f_{Z4} = n(n-2),\quad f_{P4} = \frac{3n^2}{2} + 2.$$

Загальне число мультиплікативних операцій для парного n визначають у такий спосіб:

$$f_{O4} = \frac{9n^2}{2} - 6n + 2.$$

З ростом n забезпечується зниження кількості мультиплікативних операцій у порівнянні з алгоритмом виключення Гауса, де кількість мультиплікативних операцій для квадратної матриці розміром $n \times n$ дорівнює $n^3/3$.

Таким чином цей формалізований алгоритм зводить рішення системи рівнянь n-го порядку після декомпозиції підсистем до рішення рівнянь тільки другого і першого порядку. Крім того, цей алгоритм дозволяє здійснити регулярну структуру обчислювача.

На рис.1 показаний склад структурної схеми одного обчислювального блоку процесорної мікросхеми для рішення СЛАР методом WZ-перетворення куди входять матриця вихідних коефіцієнтів 1, матриці коефіцієнтів розкладання 2, 3, операційний блок 4, блок керування 5 причому перший, другий і третій інформаційні входи операційного блоку 4 з'єднані двосторонніми зв'язками з інформаційними входами матриць A-1, W-2 і Z-3 відповідно. Перший, другий і третій виходи блоку керування 5 з'єднані з керуючими входами матриць A-1, W-2 і Z-3 відповідно. Четвертий, п'ятий і шостий виходи блоку керування 5 з'єднані з першим, другим і третім керуючими входами операційного блоку 4.

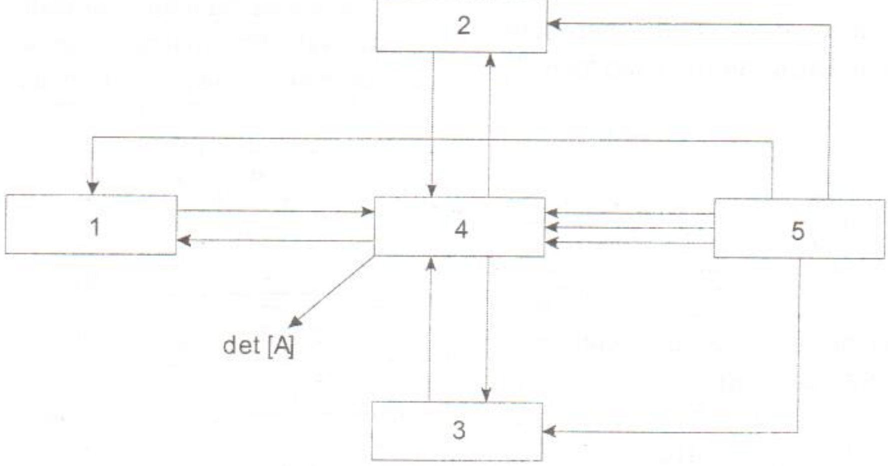

Рис. 1. Структурна схема обчислювального блоку

Операційний блок (рис.2) містить блок з чотирьох регістрів 6, блоки множення 7-8, блок віднімання 9, дільники 10-13, помножувачі 14-17, суматори 18-19, помножувачі 20-21, блоки віднімання 22-23, регістр 24, помножувач 25, причому вхід блоку з чотирьох регістрів 6 з'єднаний з матрицею вихідних коефіцієнтів *A*-1, перший-четвертий виходи якого з'єднані з входами групи помножувачів 7-8, виходи яких є входами блоку віднімання 9, вихід якого з'єднаний із другими входами блоків ділення 10-13, перші входи яких є виходами 1, 2, 3 і 4 блоку з чотирьох регістрів, де зберігаються значення матриці вихідних коефіцієнтів *A*-1, а виходи з'єднані з першими входами блоків множення 14-17, другі входи пар блоків множення 14, 16 і 15, 17 з'єднані з п'ятим і шостим виходом блоку з чотирьох регістрів, де зберігаються значення матриці вихідних коефіцієнтів *A*-1 відповідно, виходи яких з'єднаних із входами суматорів 18-19, виходи яких є входами матриці коефіцієнтів *W*-2, з'єднані з другими входами блоків множення 20-21, перші входи яких з'єднані з матрицею коефіцієнтів *Z*-3, а виходи є входами блоку віднімання 22, вихід якого з'єднаний із другим входом блоку віднімання 23, перший вхід якого є сьомим виходом блоку з чотирьох регістрів, де зберігаються значення матриці коефіцієнтів *A*, вихід якого з'єднаний з першим входом блоку множення 25, другий вхід якого є виходом регістра 24, входом якого є вихід блоку віднімання 9.

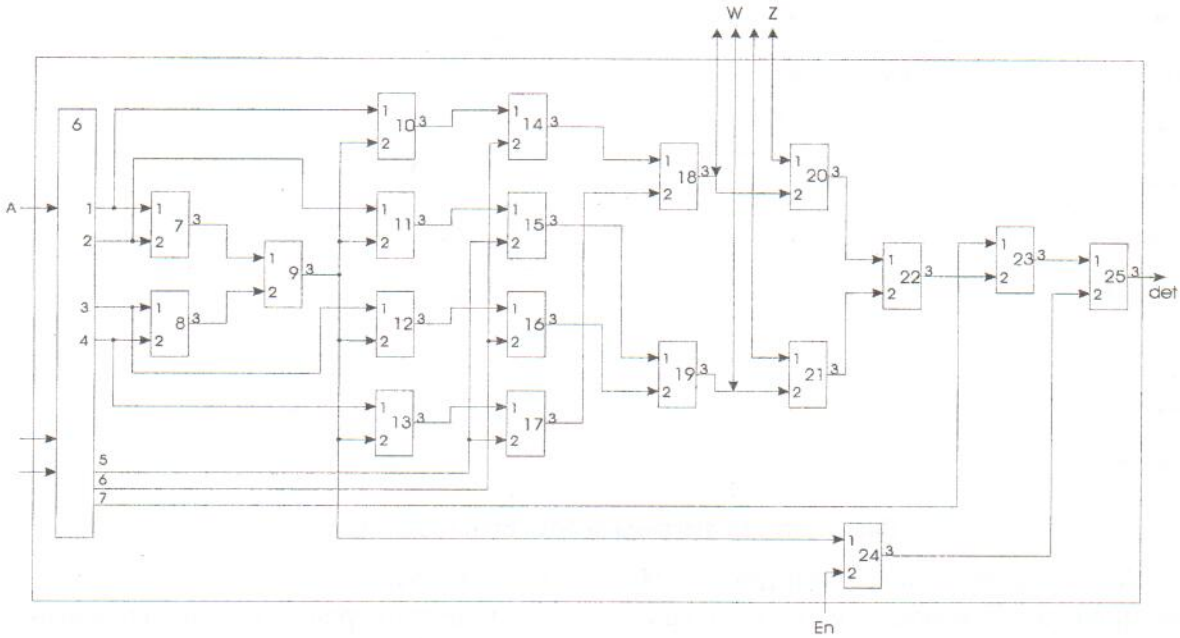

Рис. 2. Операційний блок

У пристрої реалізований метод змикаючих квадрантів, заснований на розкладанні і розщепленні матриці коефіцієнтів *A* на компоненти *W* і *Z*, тобто *A*=*W***Z*, де *W* і *Z* для матриці третього порядку мають вигляд:

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ W_{21} & 1 & W_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ Z=\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ 0 & Z_{23} & 0 \\ Z_{31} & Z_{32} & Z \end{bmatrix}.$$

Елементи матриць *W* і *Z* визначаються по формулах:

$1,\ i=j$

$$W_{ij}=0,\ i=1(1)\frac{n+1}{2}, j=i+1(1)\,n-i+1,$$

$$0,\ i=\frac{n+2}{2}\,(1)\,n, j=n-1+1(1)\,i-1.$$

W_{ij}, у противному випадку

$$\begin{cases} Z_{ij},\ i=1(1)\ \dfrac{n+1}{2}\ ; j=1(1)\ n-i+1, \\ Z_{ij}=Z_{ij},\ i=\dfrac{n+2}{2}\ (1)n\ ; j=n-i+1(1), \\ 0 \text{ у противному випадку.} \end{cases}$$

Елементи W_{i1}, W_{in} для $i = 1, 3, \ldots, -1$ визначаються в результаті рішення наступної системи рівняння другого порядку:

$$\begin{cases} Z_{11}\times W_{in} + Z_{n1}\times W_{in} = A_{i1},\\ Z_{1n}\times W_{i1} + Z_{nn}\times W_{in} = A_{in}.\end{cases}$$

Значення елемента Z_{22} визначається з рівняння

$$Z_{22} = A_{22} - Z_{12}\times W_{21} - Z_{32}\times W_{23},$$

при цьому визначник $|A| = d\times Z_{22}$, де d – визначник вище зазначеної системи рівнянь другого порядку. У загальному вигляді визначник щільної матриці A для парної кількості елементів матриці дорівнює:

$$|Z^n| = A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n-k}, \text{ де } n = 2k;$$

$$A_1 = Z_{k,k}\times Z_{k+1k+1}, - Z_{k,k+1}\times Z_{k+1,k};$$

$$A_2 = Z_{k-1,k-1}\times Z_{k+2,k+2} - Z_{k-1,k+2}\times Z_{k+2,k-1}$$

і для непарної кількості елементів матриці

$$|Z^n| = A_1\times A_2\times A_3\ldots\times A_{n-k}, \text{ де } n = 2k+1;$$

$$A_1 = Z_{kk}\times Z_{k+1};$$

$$A_2 = Z_{kk}\times Z_{k+2,k+2} - Z_{k,k+2}\times Z_{k+2,k};$$

$$A_3 = Z_{k-1,k-1}\times Z_{k+3,k+3} - Z_{k-1,k+3}\times Z_{k+3,k-1}.$$

На рис. 3 приведена часова діаграма роботи пристрою керування.

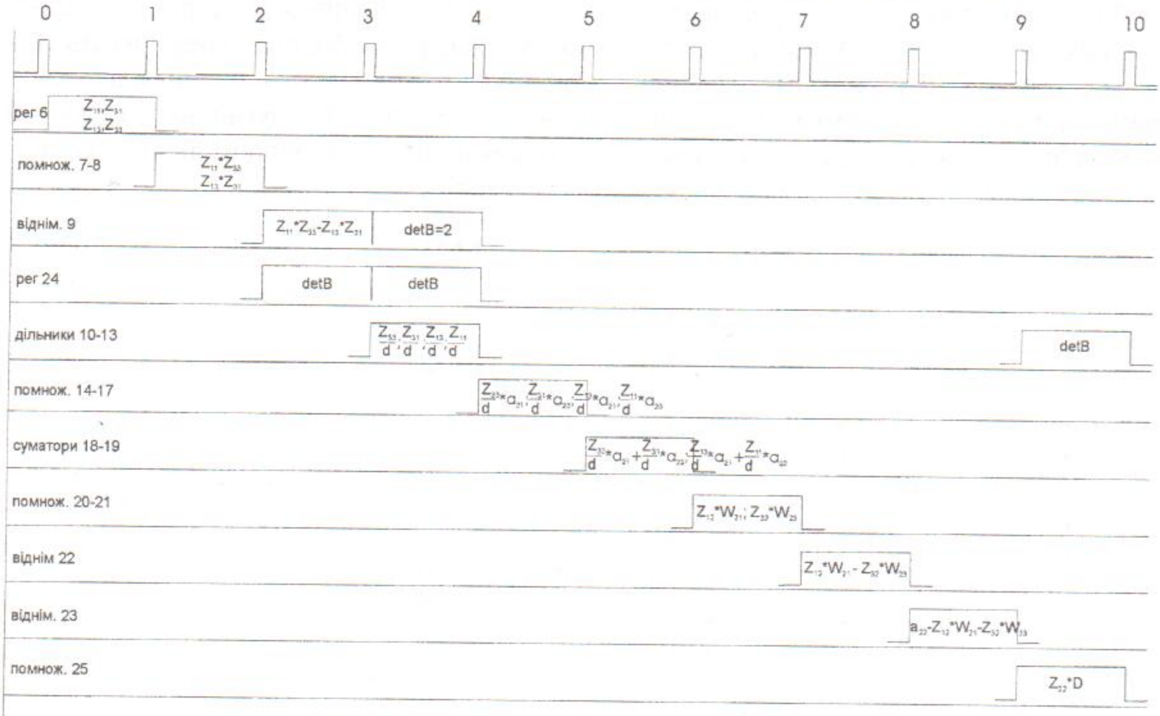

Рис. 3. Часова діаграма роботи пристрою керування

У вихідному стані регістри 6, 24 пристрою встановлюються в нульовий стан. Процедуру обчислення визначника щільної матриці розглянемо на прикладі щільної матриці третього порядку

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 4\\ \hline 3 & 2 & 1\\ \hline 1 & 3 & 3\\ \hline\end{array}.$$

Виконаємо процедуру розкладання матриці A на W і Z

$$A = W\times Z =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline W_{21} & 1 & W_{23}\\ \hline & & 1\\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|}\hline Z_{11} & Z_{12} & Z_{13}\\ \hline & Z_{22} & \\ \hline Z_{31} & Z_{32} & Z_{33}\\ \hline\end{array},$$

де $Z_{11} = a_{11}$; $Z_{12} = a_{12}$; $Z_{13} = a_{13}$; $Z_{31} = a_{31}$; $Z_{32} = a_{32}$; $Z_{33} = a_{33}$.

Елементи першого й останнього рядка матриці Z дорівнюють елементам відповідних рядків вихідної матриці A. У першому такті із матриці 1 коефіцієнтів A сигналами з блоку керування вибираються пари рядків згідно наступного алгоритму:

$$Z_{11}\times W_{21} + Z_{31}\times W_{23} = a_{21},$$

$$Z_{13}\times W_{21} + Z_{33}\times W_{23} = a_{23}; \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} 2\times W_{21} + 1\times W_{23} = 3,\\ 4\times W_{21} + 3\times W_{23} = 1\end{cases}$$

і заносяться в регістр 6 операційного блоку 4. Операційний блок вирішує систему лінійних рівнянь другого порядку, виконуючи операції множення, вирахування по мікрокомандах, що надходять із блоку керування 5, тобто

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline W_{21} \\ \hline W_{23} \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}.$$

В другому такті значення коефіцієнтів рівняння Z_{11}, Z_{33}, Z_{13}, Z_{31} надходять на входи групи помножувачів 7-8, на виході яких формуются значення $Z_{11}\times Z_{33}$ і $Z_{13}\times Z_{31}$ відповідно. У третьому такті значення добутків надходять на вхід блоку віднімання 9, на виході якого формується значення детермінанта d, що записується в регістр 24

$$d = \det B = 6 - 4 = 2.$$

У четвертому такті елементи матриці Z_{33}, Z_{31}, Z_{13}, Z_{11} і значення det надходять на вхід групи дільників 10-13, на виходах яких формуются значення $\frac{Z_{33}}{d}$; $\frac{Z_{31}}{d}$; $\frac{Z_{13}}{d}$; $\frac{Z_{11}}{d}$. У п'ятому такті значення часток і коефіцієнтів a_{21} і a_{23} надходять на вхід помножувачів 14-17, на виходах яких формуються значення їхніх добутків. У шостому такті значення добутків надходять на входи суматорів 18-19, на виходах яких формуються значення коефіцієнтів W_{21} і W_{23}, що надходять на вхід матриці коефіцієнтів W.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \hline -2 & \frac{2}{2} \\ \hline\end{array} \times \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline -5 \\ \hline\end{array},$$

одержимо матрицю

$$W = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 1 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}.$$

Наступний етап – обчислення коефіцієнта перетворення Z_{22} по слідуючому алгоритму: $Z_{22} = a_{22} - Z_{12} \times W_{21} - Z_{32}\times W_{23}$. У сьомому такті з матриці коефіцієнтів Z вибираються пари значень Z_{12} і Z_{23} і надходять на перші входи помножувачів 20 – 21, на другі входи яких надходять раніше обчислені значення коефіцієнтів W_{21} і W_{23} з матриці коефіцієнтів W. На виходах помножувачів 20-21 формуються значення добутків. Сформовані на виходах помножувачів 20 – 21 значення добутків $Z_{32}\times W_{23}$=3× (–5)=–15 і Z_{12}=1×4=4. У восьмому такті значення добутків надходять на вхід блоку віднімання 22, на виході якого формується проміжний результат рівняння: $Z_{12} \times W_{21} - Z_{32}\times W_{23}$ = =4–15=–11, що подається на другий вхід блоку віднімання 23, на перший вхід якого надходить значення коефіцієнта a_{22} з матриці A. У дев'ятому такті на виході блоку віднімання 23 формується значення коефіцієнта Z_{22}= 2– (–11) =13, що надходить на перший вхід помножувача 25, на другий вхід якого надходить значення детермінанта системи лінійних рівнянь другого порядку, що зберігається в регістрі 24. У десятому такті на виході помножувача 25 формується добуток $Z_{22} \times d = 13\times 2 = 26$, що відповідає визначнику щільної матриці третього порядку A.

У системі є головний процесор, що розподіляє завдання кожному з N обчислювальних блоків за допомогою двопортового ОЗУ.

В результаті проведених досліджень та комп'ютерного моделювання було виявлено, що метод WZ перетворення дозволяє вирішувати системи лінійних рівнянь n-го порядку за допомогою рівнянь тільки другого та першого порядку. І таким чином дозволяє створювати обчислювальні пристрої на кремнії з регулярною структурою, завдяки високому внутрішньому паралелізму алгоритму.

Список літератури

1. *Системы* параллельной обработки: Пер. с англ. / Под. ред. Д. Ивенса. – М., 1985. – С. 358-360.

2. *Нагорный Л. Я., Радкевич А. И.* Декомпозиция и распараллеливание решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности с применением метода WZ-преобразования. Сб. науч. трудов. – К.: КИИГА, 1989. – С. 27- 34.