УДК 004.4

[1]Мінаєв Ю. М., д-р техн. наук,
[2]Філімонова О. Ю., канд. техн. наук,
[1]Гузій М. М., канд. техн. наук

ФРАКТАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ, ВИЗНАЧЕНІ НА ПІДСТАВІ ТЕНЗОРНИХ МОДЕЛЕЙ

[1]Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету
[2]Київський національний університет будівництва і архітектури

Запропоновано новий метод визначення фрактальної вимірності. Розглянуто особливості визначення фрактальних вимірностей на підставі тензорного моделювання. Розглянуто тензорну інтерпретацію числового ряду. Виконано порівняльний аналіз інваріантів тензора та показника Херста.

Вступ. Розв'язок задач прогнозування та інших задач прийняття рішення, вимагає досліджень числових (часових) рядів, які являють собою ряди, утворені як реалізації систем з хаотичною динамікою, і їх аналіз вимагає визначення фрактальної вимірності, якою наділений такий ряд. Фрактальна вимірність як відомо, має дробове значення (більше за 1 і менше за 2 для лінії). Існує низка методів, які дозволяють обчислити (або тільки оцінити) фрактальну вимірність або деякі функції цієї вимірності. В даній роботі пропонується новий метод визначення фрактальної вимірності, заснований на використанні тензорних моделей часових рядів.

Сучасний рівень досліджень

Розглянемо особливості визначення фрактальних вимірностей на підставі тензорного моделювання, попередньо пославшись на загально відомі властивості фрактального аналіза, викладені у [1]. Як відомо, фрактальна геометрія починається з формули Мандельброта, яка зв'язує довжину довільної кривої L з мірилом її виміру ϵ –

$$L = C\cdot\epsilon 1- D,$$

де C – невизначений мірильний множник, свій для кожної лінії, D – фрактальна вимірність. Для звичайних гладких ліній, які мають майже скрізь хоча б одну похідну, D дорівнює одиниці. В загальному випадку лінія може не мати ніде жодної похідної і для неї вимірність D може мати значення від 1 до 2.

Так, $D = 2$ означає, що крива щільно заповнила всю площину. Такі криві, виявляється, є самоподібними – будь-яка ділянка кривої має ту ж вимірність, що і вся лінія. Останнє твердження означає, що для виміру величини всієї лінії, яка відрізняється від прийнятої ділянки у λ разів, достатньо мірила, яке також відрізняється від прийнятого у λ разів. Математично це означає, що вирази $\lambda\cdot L$ та $C\cdot(\lambda\cdot\epsilon)^{1-D}$ еквівалентні і між ними можна поставити знак рівності, тобто

$$\lambda\cdot L= C\cdot(\lambda\cdot\epsilon)^{1-D}.$$

Останній вираз має назву умов самоподібності. Показано, що вираз $L=C\cdot\epsilon^{1-D}$ та умову самоподібності у формі $\lambda\cdot L=C\cdot(\lambda\cdot\epsilon)^{1-D}$ достатньо прийняти у вигляді постулатів (або аксіом), щоб побудувати весь математичний апарат фрактального числення. Розглянемо два випадки. По-перше, довжину вимірюють, підраховуючи кількість мірил, тобто $L=N(\epsilon)\cdot\epsilon$, де $N(\epsilon)$ – необхідна кількість кроків, з котрою мірило проходить всю лінію, при цьому $N(\epsilon)=C\cdot\epsilon^{-D}$. Для нового мірила, яке дорівнює $\epsilon^* = \lambda\cdot\epsilon$, довжина буде відповідно $L^*=C\cdot\epsilon^{*1-D}$, отже отримуємо, що

$$L^*= C\cdot\lambda^{1-D}\cdot\epsilon^{1-D} \qquad (*)$$

Враховуючи, що $C\cdot\epsilon^{1-D}$ - це первинна (висхідна) довжина, яка дорівнює $N(\epsilon)\cdot\epsilon$, отримуємо

$$L^* = \lambda^{1-D}\cdot N(\epsilon)\cdot\epsilon.$$

З другого боку, $L^*=N(\epsilon^*)\cdot\epsilon^*$, або $L^*=N(\lambda\cdot\epsilon)\cdot\lambda\cdot\epsilon$. Порівнюючи останній результат з попереднім виразом, приходять до нового результату

$$N(\lambda\,\epsilon)=\lambda^{1-D}\cdot N(\epsilon) \qquad (**)$$

Цей вираз звичайно використовують як умову самоподібності, розуміючи під N будь-яку функцію від своїх аргументів з відмінним від D показником.

Розглядаючи вираз (*), можна бачити, що λ та ϵ входять до його складу рівнозначно, тобто перевизначення $\lambda \leftrightarrow \epsilon$ не змінює загального вигляду самого виразу. Це дає право вважати λ мірилом, а ϵ – відповідно мірильним множником. Замість запропонованих постулатів у підмурок теорії фракталів можна покласти симетрію перевизназчення λ та ϵ і умову самоподібності у формі (**).

Для ієрархічних структур, котрі будуються за наперед визначеними правилами, для визначення фрактальної вимірності D достатньо користуватися тільки виразом (**).

Наприклад, для геометричного ряда:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{N},\frac{1}{N+1},\dots$$

відстань між сусідніми членами ряда буде

$$\varepsilon=\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}=\frac{1}{N(N+1)},$$

або

при $N >> 1$: $\epsilon \sim 1/N^{2}$,

звідки $N \sim \epsilon^{-1/2}$. Порівнюючи з $N \sim \epsilon^{-D}$, знаходим фрактальну вимірність геометричного ряда: $D = 1/2$. У такий спосіб можна роглядати практично всі ієрархічні структури. Існують ще більш прості вирази для визначення фрактальної вимірності. Якщо замінити λ на $1/R$, де під R вважають лінійний вимір області, то як показано у [2, 3], справедливий вираз $L \sim R^{D}$, який у фізиці фрактальних кластерів слугує визначенням вимірності.

З виразу (5) можна визначити, що

$$\lambda^{-D}= N(\lambda\cdot\epsilon)/N(\epsilon). \qquad (***)$$

Постановка задачі досліджень. Розглянемо тензорну інтерпретацію числового ряду (ЧР), виділивши в ньому певну кількість елементів, які дають можливість розглядати ЧР у вигляді тензорної моделі, як показано на (рис.1).

$$y_1(t)\ \dots\ y_j(t)\ \dots\ y_k(t)\ \dots\ y_n(t)$$

$$3\times 3 \rightarrow \begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_3(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & z_9(t) \end{pmatrix}$$

$$r\times r \rightarrow \begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_r(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & z_{r\cdot r}(t) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$40\times 40 \rightarrow \begin{pmatrix} z_1(t) & \dots & z_{40}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & z_{40\cdot 40}(t) \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Тензорна модель часового ряду

Тензорна модель дозволяє представити ЧР у вигляді тензора, з матрицями 3×3, 5×5, 10×10 і т.ін. В роботі прийнято максимальну вимірність матриці тензора 40×40. Зазначимо, що тензори, які розглядаються в роботі, не є класичними в тому розумінні, що вони не представляють множину чисел 3^n, що певною мірою обмежує застосування можливостей тензорного аналізу, зокрема, використання згорток. Але будь-яка матриця може розглядатися як *проекція* певного тензора. В роботі [4] ототожнюються тензори та матриці, що їх представляють. Також не будемо розглядати сингулярні тензори, бо це лише утруднює розуміння фізичної суті задачі, хоча принципово і технічно використання сингулярних тензорів не викликає ніяких труднощів.

Принагідно зазначимо, що всі отримані у такий спосіб тензори представляють собою *ієрархічні структури* в тому розумінні, що всі вони вкладені у тензор максимальної вимірності. Для ієрархічних структур, котрі будуються за наперед визначеними правилами, як показано раніше, для визначення фрактальної вимірності D достатньо користуватися тільки виразом (**). На (рис. 2) представлено приклад моделювання ЧР, утвореного функцією *rand* (), тензорами 3×3, 4×4, 5×5, 10×10, 25×25, 30×30, 40×40. Така градація обрана довільно заради прозорості розгляду. Як відомо з лінійної алгебри [5], тензор представляє собою об'єкт, який однозначно характеризується своїми інваріантами. Це означає, що інваріанти тензора будуть представлять такі ж ієрархічні об'єкти, як і власно тензор.

Результати досліджень. Розглянемо питання доцільності використання тензорних інваріантів для визначення фрактальних властивостей ЧР, використавши для цієї мети нульовий та перший інваріанти утворених тензорів. Як відомо, мінімальна кількість інваріантів тензора визначається виразом $n + 1$, n – вимірність вектора власних значень, загальна кількість інваріантів значно більша, оскільки враховує інваріанти приєднаних тензорів. Так, для тензора 2-го рангу загальна кількість незалежних інваріантів дорівнює восьми, хоча вимірність вектора власних значень три. Один з інваріантів – магнитуда – не залежить від власних значень.

Виконаємо порівняльний аналіз інваріантів тензора та показника Херста – одного з найбільш простих наближених показників для обчислення фрактальної вимірності ЧР [6]. Показник Херста є сталим, він вміщує мінімальні передпосилання про систему, що вивчається, може класифікувати часові (числові) ряди, відрізняючи випадковий ряд від невипадкового, навіть тоді, коли цей ряд не є гаусовським. Так, якщо показник Херста відрізняється від 0,5, то це означає, що імовірнісний розподіл досліджуваного не є гаусовським. Якщо 0<H<=1, але H не дорівнює 0,5, то ряд є фракталом, поведінка котрого суттєво відрізняється від випадкових блукань при H = 0,5.

Показник Херста визначається у вигляді:

$$H = \lg(R/S)/\lg(n/2),$$

де R – максимальний розкид досліджуваного ряду; S – СКВ спостережень; n – кількість спостережень. В цьому виразі відому константу Херст прийняв як $a = 0.5$, що є цілком задовільним для оцінки H порівняно коротких часових рядів, показник Херста можна використовувати як досить розумне наближення. В багатьох випадках показник Херста є лише якісною характеристикою. Слід відмітити, що серед фахівців немає єдиної думки про кількість даних, необхідних для отримання достовірних оцінок показника Херста. Можна стверджувати, що при довжині генеральної виборки не меншої за 6000, результати досліджень збігаються з результатами, отриманими Херстом. Існує евристичний критерій, що коли природний цикл системи можна легко визначити, то це означає, що даних достатньо. Показник Херста перетворюють у фрактальну вимірність D згідно до виразу $D = 2 - H$. Іншим показником фрактальної вимірності є величина $A = 1 / H$, отримана Мандельбротом.

З метою виявлення співпадіння фрактальних та інваріантних характеристик ЧР та його ієрархічних тензорних моделей були розглянуті такі функції:

$$y=\text{rand}(); \quad (1)$$

$$y= \sin(0.001*t)^2 ; \quad (2)$$

$$y_{(i+1)}=4*y_{(i)}*(1-y^{(i)}). \quad (3)$$

Оскільки функція типу (3) отримана як результат хаотичної динаміки і її подальші значення суттєво залежать від початкових умов, розглянуто два випадки, коли початкові умови були; $y_{(1)}=0.74999$ і $y_{(1)}=0.74990$. Випадок $y_{(1)}=0.75$ не розглядається, бо функція має вигляд прямої лінії.

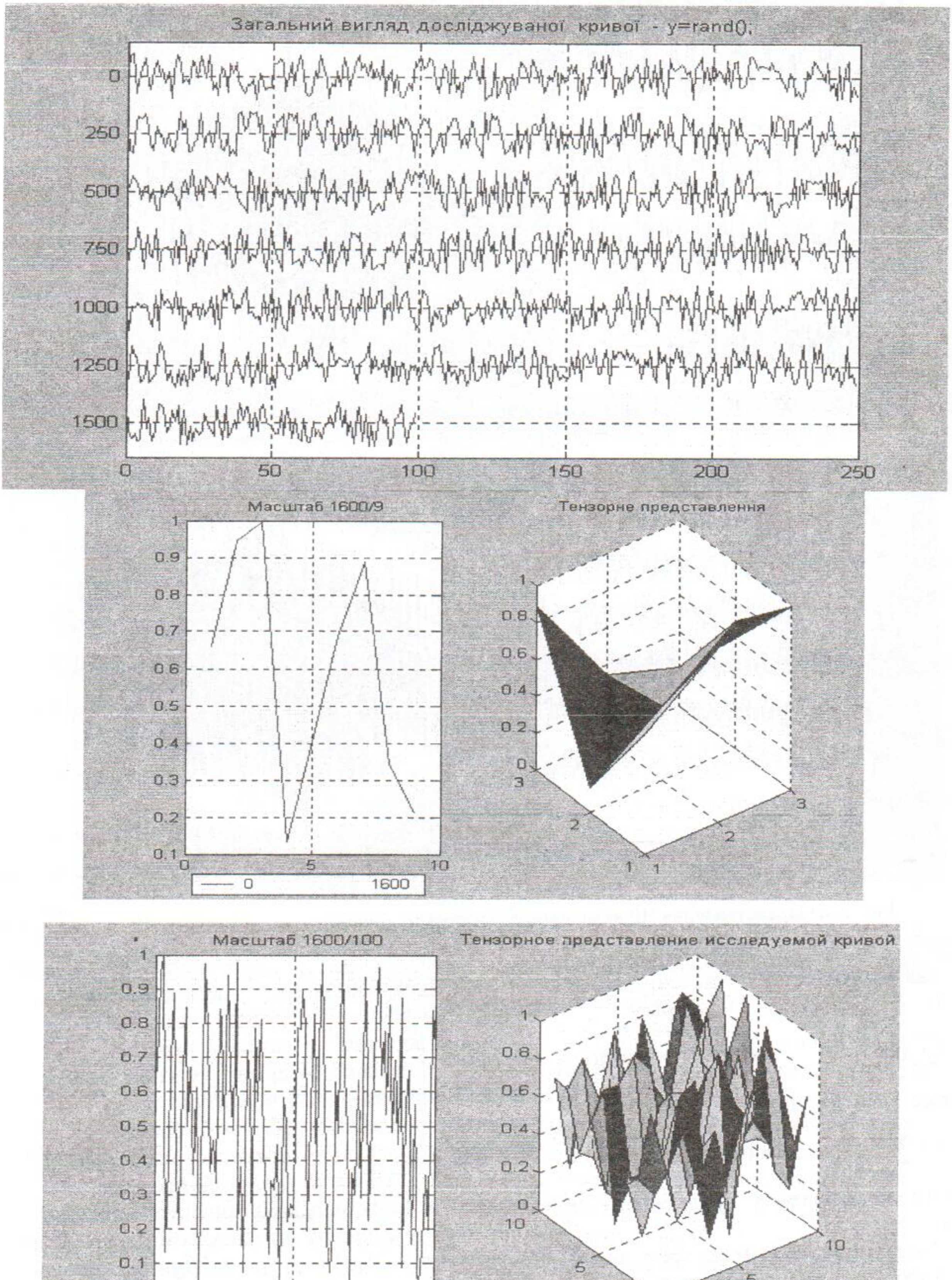

Рис. 2. *а*) Представлення ЧР вкладеними тензорами: показані тензорні моделі ЧР 3×3, 10×10

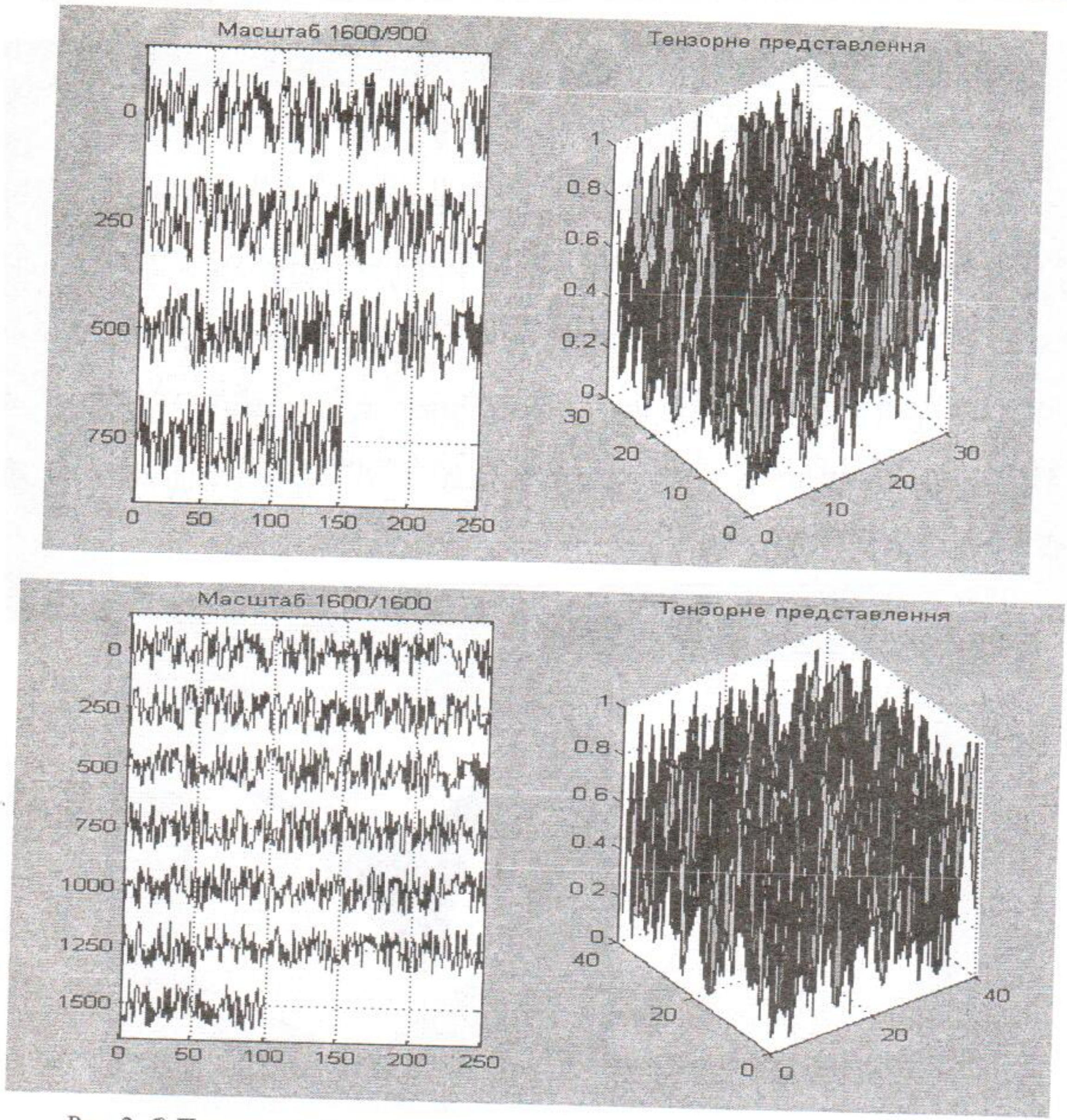

Рис. 2. *б*) Представлення ЧР вкладеними тензорами: показані тензорні моделі ЧР 30×30, 40×40

Інваріанти були обчислені у такий осіб: нульовий інваріант – $= (\sum_{i,j=1}^{n} (t_{ij} t_{ji}) / 2)^{1/2}$; перший інваріант – =(trace t)/n_t, де trace t – слід тензора, ce $t = \sum_{i=1}^{n} t_{ii}$, n_t – вимірність тензора. Ре-льтати моделювання представлені на с. 3.

Аналізуючи отримані результати, жна зробити наступні висновки.

1. Робочою вимірністю тензорних делей ЧР повинна бути вимірність не нша за 10×10.

2. Ієрархічний ряд, складений з перших інваріантів, практично співпадає з рядом, створеним з показників Херста.

3. Нульовий інваріант (магнитуда) на робочій вимірності практично не змінюється, що цілком логічно випливає з постановки задачі та прийнятої парадигми – один і той же об'єкт, який представляється різними моделями, повинен мати одну й ту ж величину, незалежно від того, в якій системі координат він описується.

4. Загальна формула для визначення показників Херста може бути модифікована, якщо замість розкида R використовувать нульовий інваріант J_0.

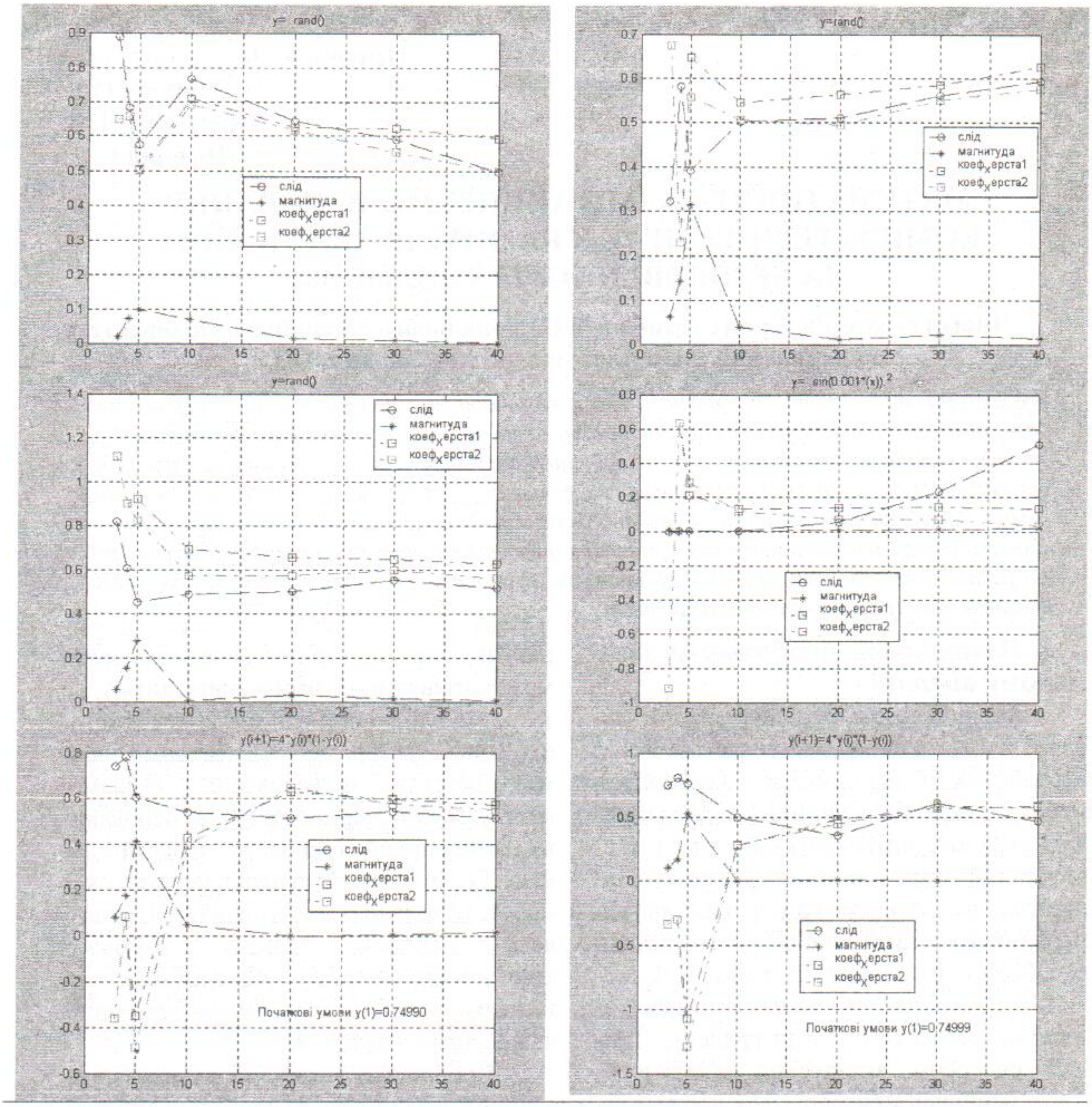

Рис. 3. Порівняльні характеристики коефіцієнтів Херста та значень нульового та першого інваріантів залежно від вимірності тензора, що моделює ЧР

Таким чином, застосування тензорних моделей дозволяє ефективно аналізувати числові ряди та визначати їх фрактальну вимірність.

Список літератури

1. *Балханов В. К.* Введение в теорию фрактального исчисления. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского Гос. Ун-та, 2001. – 58 с.

2. *Шредер М. Ю.* Фракталы, хаос, степенные законы. – М.: Наука, 2001. – 528 с.

3. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 262 с.

4. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. Радио, 1978. – 720 с.

5. *Гельфанд И. М.* Курс лекций по линейной алгебре. 3-изд. – М.: Наука, 1966. – 280 с.

6. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. – М.: Мир, 2000.

7. *Інтернет*-ресурси - http://www.emastertrade.ru/ru/main/index/id29.asp, http://www.e-mastertrade.ru/ru/main/index/id13.asp