

## АЛГОРИТМІЗАЦІЯ СТАТИСТИЧНОГО ВИБОРУ СТРУКТУРИ МОДЕЛІ АВТОРЕГРЕСІЇ ТА ПРОІНТЕГРОВАНОГО КОВЗНОГО СЕРЕДНЬОГО

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету

У роботі розглянуто різні підходи до проблеми моделювання часових рядів, вибору класу моделей, визначення їх структури та запропоновано оригінальний алгоритм вибору множини моделей адекватних процесу, що спостерігається.

В сучасній літературі приділяється не достатньо уваги вибору множини моделей, що є адекватними процесу, над яким ведеться спостереження. Так, якщо фізичний механізм явища повністю відомий, можливо вивести математичну модель, що точно описує процес і коригувати її в міру накопичення даних. Інший спосіб вибору підходящої множини моделей – це емпіричні висновки, зроблені на основі спостережень над процесом. Отримана множина повинна бути такою, щоб вибрана з неї найбільш підходяща модель задовольняла всім критеріям перевірки на адекватність при обраному рівні значимостей, а також повинна давати задовільний прогноз. Тоді можна бути впевненим, що модель достатньо точно представляє дані, підтверджуючи правильність вибору множини. Але на практиці кількість можливих моделей множини є відносно великою. Позначимо  $P = \max l_p$ ,  $Q = \max q$ ,  $R = \max r$ ,  $S = P + Q$ , тоді легко бачити, що загальна кількість структур моделей становить  $R2^S = R2^{P+Q}$ . При цьому, якщо у практичних задачах числа  $Q$  і  $R$  можна встановити в межах  $Q < 2$ ,  $R < 3$ , то число  $P$  може бути достатньо великим. Отже, експоненційне зростання кількості структур з ростом  $S$  є головною перешкодою для їхнього повного перебору.

Для зменшення  $P$  пропонується метод алгоритмічного вибору параметрів

вихідної моделі шляхом побудови та аналізу кореляційного ряду.

Розглянемо ряд спостережень деякого лінійного процесу постійного порядку, який може бути описаний за допомогою моделі [1]:

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

На першому етапі для спрощення процедури пошуку структури моделі приймемо  $\varepsilon_i = 0$ ,  $i = k - t, \dots, k - 1$ .

Порівняємо два підходи для побудови кореляційного ряду  $r_t$ .

### Перший підхід

Будуємо кореляційний ряд  $r_t$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ ,

$$r_i = \sum_{k=1}^{n-i} (x_k - \bar{x})(x_{k+i} - \bar{x}_r)$$

$$\text{де } \bar{x} = \sum_{k=1}^{n-i} \frac{x_k}{n-1}, \text{ та } \bar{x}_r = \sum_{k=i+1}^n \frac{x_k}{n-i}.$$

Вибираємо номери  $p$  найбільших за модулем  $r_i$  і будемо вважати, що це і є ті запізнювання, комбінації яких і дадуть нам множину моделей, серед яких знаходиться адекватна. Відсортувавши їх за зростанням, матимемо номери  $l_1, l_2, \dots, l_p$  запізнювань. Для зручності та прискорення подальших обчислень, пропонується побудувати коваріаційну матрицю наступним чином:

Записуємо ряд з  $n$  спостережень у вигляді табл. 1.

Таблиця 1

Матриця спостережень

Y	$Z_1$	$Z_2$	...	$Z_p$
$x_{l_p+1}$	$x_{l_p-l_1+1}$	$x_{l_p-l_2+1}$	...	$x_1$
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
$x_n$	$x_{n-l_1}$	$x_{n-l_2}$	...	$x_{n-l_p}$

Будуємо матрицю  $V$  розміром  $(p+1) \times (p+1)$ , елементи якої

$$V_{ij} = \sum_{k=l_p+1}^n x_{k-i} x_{k-j}; \quad i=0,1, \dots, p; \quad j=0,1, \dots, p.$$

Подальша частина спільна для обох підходів, тому її буде розглянуто нижче.

Зауважимо, що матриця  $V$  є невід'ємно визначена і симетрична.

**Другий підхід**

Розглянемо можливість використання часткового коефіцієнта кореляції для побудови кореляційного ряду.

Частковий коефіцієнт кореляції, як уже говорилось вище, дозволяє оцінити ступінь тісноти лінійного зв'язку між двома змінними, очищеної від непрямого впливу інших факторів. Для його розрахунку необхідна вихідна інформація як за парою змінних, так і за всіма тими змінними, безпосередній ("той, що заважає") вплив яких ми хочемо елімінувати.

Без обмеження загальності будемо вважати, що  $l_1 = 1, l_2 = 2, \dots, l_m = m$ , тоді

$$r_i = \frac{\lambda_{i+1}}{\sqrt{\lambda_{i1} \lambda_{i+1, i+1}}}$$

де  $\lambda_{ij}$  – елементи матриці  $\Lambda = V^{-1}$ .

Виходячи з властивостей матриці  $V$ , отримати матрицю  $V^{-1}$  нескладно, наприклад за методом квадратного кореня.

Розглянемо детальніше цей метод.

Нехай  $A$  – симетрична додатньо визначена матриця, тоді існує дійсно невиврождена нижня трикутна матриця  $L$ , така, що

$$LL^T = A. \tag{1}$$

Більш того, якщо діагональні елементи матриці  $L$  вибрати додатніми, то розклад матриці єдиний.

Елементи матриці  $L$  можна визначити по рядках, прирівнюючи відповідні елементи матриць в виразі (1). Якщо матрицю обчислюють по рядках, то для елементів  $i$ -го рядка справедливі наступні співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^i l_{ik} l_{jk} &= a_{ij} \\ \text{або} \\ l_{ij} &= \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{ij}}, \quad j=1, \dots, i-1; \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^i l_{ik} l_{ik} &= a_{ii} \\ \text{або} \\ l_{ii} &= \left( a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

Таким чином, для реалізації методу потрібно  $n$  раз добути квадратний корінь та приблизно  $\frac{n^3}{6}$  множень.

Існує другий варіант розкладення, який дає можливість уникнути добування квадратного кореня. Для цього визначимо нову матрицю  $\tilde{L}$  наступним чином:

$$L = \tilde{L} \text{diag}(l_{ii}),$$

де  $L$  – матриця, обчислена раніше за схемою Холецького. Матриця  $\tilde{L}$  існує (оскільки всі елементи  $l_{ii}$  додатні) та є нижньою трикутною матрицею з одиницями по діагоналі. При цьому справедливе наступне співвідношення:

$$A = LL^T = \tilde{L} \text{diag}(l_{ii}) \text{diag}(l_{ii}) \tilde{L}^T = \tilde{L} D \tilde{L}^T$$

де  $D$  – додатньо визначена діагональна матриця.

Таке розкладання вихідної матриці можна виконати за  $n$  кроків, причому на  $i$ -му кроці визначають  $i$ -й рядок матриці  $\tilde{L}$  та  $i$ -й елемент  $d_i$  матриці  $D$ . Відповідні вирази для знаходження цих елементів мають наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^i \tilde{l}_{ik} d_k \tilde{l}_{jk} &= a_{ij} \\ \text{або} \\ \tilde{l}_{ii} d_j &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik} d_k \tilde{l}_{jk}, \quad j=1, \dots, i-1 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^i \tilde{l}_{ik} d_k \tilde{l}_{jk} &= a_{ii} \\ \text{або} \\ d_i &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik} d_k \tilde{l}_{ik}. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Алгоритм, який представлено в такому вигляді потребує виконання вдвічі більшої кількості перемножень, ніж в розкладі Холецького. Однак, якщо вести допоміжні змінні  $\tilde{a}_{ij}$ , які задовольняють умові  $\tilde{a}_{ij} = l_{ij} d_j$ , то вирази (4) і (5) матиме вигляд:

$$\tilde{a} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{a}_{ik} l_{jk}, \quad j=1, \dots, i-1 \quad (6)$$

$$d_i = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{a}_{ik} \tilde{l}_{ik} \quad (7)$$

тому спочатку обчислюються допоміжні величини  $\tilde{a}_{ij}$ , а потім їх використовують для визначення величин  $d_i$  і  $\tilde{l}_{ij}$ . Відмітимо також, що для визначення елементів  $\tilde{a}_{ij}$  в  $i$ -му рядку не вимагається знання елементів попередніх рядків. Кількість операцій множення в цьому варіанті складає приблизно  $\frac{n^3}{6}$ , але не вимагається операцій знаходження квадратного кореня.

При будь-якому варіанті розкладу матриці  $A$  можна одночасно обчислити визначник матриці у відповідності з виразом

$$\det A = \det L \det L^T = \left( \prod_{i=1}^n l_{ii} \right)^2, \quad (8)$$

$$\det A = \det \tilde{L} \cdot \det D \cdot \det \tilde{L}^T = \prod_{i=1}^n d_i \quad (9)$$

Можна знайти також розв'язок системи рівнянь виду:

$$Ax = b. \quad (10)$$

Дійсно, якщо ввести два нових рівняння

$$\begin{aligned} Ly &= b \\ L^T x &= y, \end{aligned} \quad (11)$$

то

$$Ax = LL^T x = Ly = b. \quad (12)$$

Співвідношення (11) дозволяє записати розв'язок рівняння (10) наступним чином:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k}{l_{ii}}, \quad i=1, \dots, n, \quad (13)$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n l_{ki} x_k}{l_{ii}}, \quad i=n, \dots, 1, \quad (14)$$

що пов'язано з виконанням  $n^2$  операцій множення і  $2n$  операцій ділення. Аналогічно, якщо

$$\begin{aligned} \tilde{L}y &= b \\ \tilde{L}^T x &= D^{-1}y, \end{aligned} \quad (15)$$

то

$$Ax = \tilde{L}D\tilde{L}^T x = \tilde{L}DD^{-1}y = b. \quad (16)$$

Рівняння (15) можна розв'язати, послідовно обчислюючи величини

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{l}_{ik} y_k, \quad i=1, \dots, n, \quad (13)$$

$$x_i = \frac{y_i}{d_i} - \sum_{k=i+1}^n \tilde{l}_{ik} x_k, \quad i=1, \dots, n, \quad (14)$$

При цьому необхідно виконати  $n^2$  операцій множення і лише  $n$  операцій ділення.

Обернення матриці можна замінити розв'язком  $n$  рівнянь виду:

$$Ax = e_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (15)$$

причому розв'язку з  $i$ -ї правої частини відповідає  $i$ -й рядок матриці  $A^{-1}$ . Однак алгоритм спроститься, якщо в повній мірі використовувати властивість симетрії матриці  $A$  і особливий вид правих частин в рівнянні (15). Відмітимо, що

$$A^{-1} = (L^T)^{-1} L^{-1} = (\tilde{L}^T)^{-1} D^{-1} \tilde{L}^{-1}, \quad (16)$$

де  $L^{-1}$  – нижня трикутна матриця. Позначаючи матрицю  $L^{-1}$  через  $P$ , запишемо

$$p_{ii} = \frac{1}{l_{ii}}; \quad (17)$$

$$p_{ij} = \frac{\sum_{k=i+1}^{j-1} l_{jk} p_{ki}}{l_{jj}}, \quad j=i+1, \dots, n. \quad (18)$$

При обчисленні елементів матриці  $A^{-1}$  як елементів матриці  $P^T P$  (симетрична матриця) необхідно визначити лише ті елементи, які розташовані нижче головної діагоналі, і для їх обчислення використати формулу

$$(A^{-1})_{ji} = (P^T P)_{ji} = \sum_{k=1}^n p_{kj} p_{ki}, \quad j=i, \dots, n$$

Відмітимо, що після того, як обчислений елемент матриці  $(A^{-1})_{ij}$ , величини  $p_{ji}$  далі не використовуються.

Аналогічно, якщо нижню трикутну матрицю  $\tilde{L}^{-1}$  з одиницями на діагоналі позначити через  $Q_1$ , то будуть справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} q_{ii} &= 1 \\ q_{ji} &= -\sum_{k=1}^{j-1} \tilde{l}_{jk} q_{ki}, \quad j=i+1, \dots, n \end{aligned}$$

$$(A^{-1})_{ji} = \sum_{k=1}^n \frac{q_{kj}q_{ki}}{d_k}, \quad j = i, \dots, n$$

В цьому місці після обчислення елемента  $(A^{-1})_{ji}$  знати величину  $q_{ji}$ , більше не потрібно. Реалізація цього методу наведена в додатку.

Продовжимо розгляд алгоритму пошуку структури ARIMA (Auto Regression Integrated Moving Average) - моделі. Як і в попередньому випадку, вибираємо номери  $p$  найбільших за модулем  $r_i$ . Для уточнення (звуження) множини моделей, які розглядаємо, так як він є вже достатньо вузький, застосовано метод повного перебору [2], оскільки, основна інформація для роботи методу міститься в матриці  $V$ .

В регресійному аналізі добре відомим є той факт, що при доданні однієї змінної в рівняння регресії, інформацію, яка міститься в коефіцієнтах попередньої моделі, можна використати для побудови нової моделі. При цьому кількість обчислень порівняно з тим, якби ми коефіцієнти розширеної моделі обчислювали заново, зменшується. Але необхідно обчислити і запам'ятати матрицю  $(X^T X)^{-1}$ , де  $X$  – конструкційна матриця початкового рівняння регресії.

Починати процедуру оцінки коефіцієнтів можна зі структури, яка містить всього одну змінну. В нашому випадку з урахуванням значень матриці  $V$ ,  $(X^T X)^{-1} = 1 / v_{ij}$ , де  $i$  – номер запізнювання кореляційного ряду  $cor_i$ . В цьому випадку матриця  $(X^T X)^{-1}$  є просто число. При вилученні однієї змінної з рівняння регресії можна спростити оцінювання коефіцієнтів нової моделі аналогічно, використовуючи інформацію про коефіцієнти попередньої моделі і знаючи її матрицю  $(X^T X)^{-1}$ . Наведемо остаточні формули, які називаються формулами окаймлення.

Запишемо модель у вигляді  $Y = \Phi^T Z$ , де  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_m)^T$ ,  $\Phi$  – оцінений параметр розміру  $m$ . Нехай  $X$  – конструкційна матриця цієї моделі і матриця  $(X^T X)^{-1}$  уже обчислена і зберігається.

Потрібно оцінити коефіцієнти моделі  $Y = \Phi^T Z$ , де  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+1})$ ;  $\Phi$  –

оцінюваний параметр, що має розмір  $(m + 1)$ ;  $(XZ)$  – конструкційна матриця нової моделі. Тоді

$$\Phi_{m+1} = \frac{Z^T Y - Z^T X (X^T X)^{-1} X^T Z}{Z^T Z - Z^T X (X^T X)^{-1} X^T Z}, \quad \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_m \end{pmatrix} - (X^T X)^{-1} X^T Z \Phi_{m+1},$$

$$[(X|Z)^T (X|Z)]^{-1} = \begin{bmatrix} X^T X & X^T Z \\ Z^T X & Z^T Z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (X^T X)^{-1} + \frac{(X^T X)^{-1} X^T Z Z^T X (X^T X)^{-1}}{Z^T Z - Z^T X (X^T X)^{-1} X^T Z} & -\frac{(X^T X)^{-1} X^T Z}{Z^T Z - Z^T X (X^T X)^{-1} X^T Z} \\ \frac{Z^T X (X^T X)^{-1}}{Z^T Z - Z^T X (X^T X)^{-1} X^T Z} & \frac{1}{Z^T Z - Z^T X (X^T X)^{-1} X^T Z} \end{bmatrix}.$$

Ще простіші формули при вилученні однієї змінної. Нехай початкова модель має вигляд  $Y = \Phi^T Z$ , де  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_m, z_{m+1})^T$ ;  $\Phi$  – оцінений параметр розміру  $m + 1$ . Для визначеності припустимо, що виключити необхідно  $(m + 1)$ -у змінну і в конструкційній матриці їй відповідає стовпчик  $Z$ , а конструкційна матриця  $m$  змінних, тих, що залишились,  $X$ . Це припущення ні на що не впливає, тому що якби треба було виключити не  $(m + 1)$ -у а  $k$ -у,  $k < m + 1$ , змінну, то стовпчик, який їй відповідає достатньо зробити в конструкційній матриці  $(m + 1)$ -м. При цьому матриця  $[(X|Z)^T (X|Z)]^{-1}$  зміниться таким чином: стовпчики з  $(k + 1)$ -го по  $(m + 1)$ -й зсунуться на одиницю вліво, рядки з  $(k + 1)$ -го до  $(m + 1)$ -го на одиницю вгору, на місці  $(m + 1)$ -го стовпчика і  $(m + 1)$ -го рядка будуть  $k$ -й стовпчик і  $k$ -й рядок відповідно. Отже матриця  $[(X|Z)^T (X|Z)]^{-1}$  у нас також є.

Необхідно знайти  $m$ -вимірний параметр  $\Phi$  моделі  $Y = \Phi^T Z$ , де  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$  і обчислити матрицю  $(X^T X)^{-1}$ .

Подамо матрицю  $[(X | Z)^T (X | Z)]^{-1}$  у вигляді блочної:

$$[(X|X)^T (X|Z)^T]^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix},$$

де блоки  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{22}$  мають розміри  $(m \times m)$ ,  $(m \times 1)$ ,  $(1 \times 1)$  відповідно.

Тоді

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_m \end{pmatrix} - \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \varphi_{m+1}, \quad (X^T X)^{-1} = Z_{11} - Z_{12} | Z_{22}.$$

Використання формул окаймлення дозволяє підвищити ефективність процедури повного перебору в множині всіх регресій. Тим більше, що основна інформація для застосування методу окаймлення знаходиться в матриці  $V$ :  $Z^T Y = v_{0b}$ ,  $Z^T X_j = v_{jb}$ ,  $X^T Y_j = v_{0j}$ ,  $Z^T Z = v_{ii}$ ,  $X^T Z_j = v_{ij}$ .

Якщо кожне структурне число  $(\beta_1^{(l-1)}, \beta_2^{(l-1)}, \dots, \beta_m^{(l-1)})$  розглядати як точку в лінійному  $m$ -вимірному просторі, то множині всіх регресій буде відповідати множина всіх вершин  $m$ -вимірного гіперкуба, виключаючи вершину, яка знаходиться в початку координат. Формули окаймлення можуть бути використані тоді і тільки тоді, коли наступне структурне число відрізняється від попереднього не більше, ніж за одним із компонентів, тобто вершинами одиничного гіперкуба, координати яких - відповідні структурні числа, з'єднані ребром.

В даному випадку доцільно використання алгоритму перегляду вершин гіперкуба [3]. Структурна схема цього алгоритму наведена на рис. 1.

Робота алгоритму починається з вершини  $(0, 0, \dots, 0)$ . Перегляд здійснюється тільки вздовж ребер. Таким чином всі вершини проглядаються точно один раз. Розглянемо цей спосіб детальніше. Припустимо, що необхідно здійснити  $l$ -й  $(1 \leq l \leq 2^m + 1)$  крок вздовж ребра. В цьому ви-

падку ми маємо  $(l-1)$ -е структурне число  $\beta^{(l-1)} = (\beta_1^{(l-1)}, \beta_2^{(l-1)}, \dots, \beta_m^{(l-1)})$ , оцінка параметра  $\phi^{(l-1)}$ , яка відповідає  $(l-1)$  кроку, причому, якщо  $l=1$ , то  $\phi^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)^T$ , матриця  $S_{l-1}^T X_A^T X_A S_{l-1}$  (де  $S_l = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ ), причому, якщо  $l=1$ , то матриця вважається нульовою. Цей алгоритм застосовується для того, щоб за числами  $l$  і  $m$  знайти число  $i$ , яке показує яку структурну компоненту числа слід замінити. Структурне число  $\beta_1$  будується за наступною формулою:

$$\beta^1 = (\beta_1^{(l-1)}, \dots, \beta_{i-1}^{(l-1)}, \beta_i^{(l-1)}, \beta_{i+1}^{(l-1)}, \dots, \beta_m^{(l-1)}),$$

$$\text{де } \beta_i^{(l-1)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \beta_i^{(l-1)} = 0 \\ 0, & \text{якщо } \beta_i^{(l-1)} = 1 \end{cases}.$$

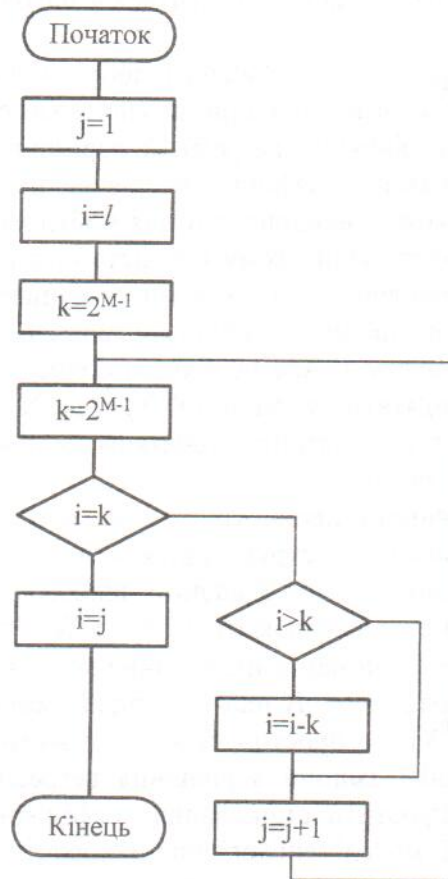


Рис. 1

Якщо в структурному числі при переході від  $(l-1)$ -го на  $l$ -й крок нуль замінено одиницею, то це значить, що потрібно ввести додаткову змінну, якій в початковій матриці відповідає  $i$ -й стовпчик. Якщо ж навпаки, одиниця була замінена нулем, то  $i$ -у змінну треба виключити. При цьому для обчислення оцінок матриці  $(S_{l-1}^T X_A^T X_A S_{l-1})^{-1}$  застосовують відповід-

но формули додання або вилучення однієї змінної.

Оцінка адекватності отриманих моделей проводиться за допомогою методу найменших квадратів і записується наступним чином. Якщо ми розглядаємо наш ряд як

$$x_{k+1} = \varphi_1 x_{k-1} + \dots + \varphi_p x_{k-p} + \varepsilon_k,$$

де  $\varphi_i$  оцінки запізньованих моделей, які отримані в результаті роботи алгоритму,  $\varepsilon_i$  відхилення від істинних значень даного ряду. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=l_p+1}^m \varepsilon^2 &= \sum_{i=l_p+1}^m \left( x_i - \bar{\varphi}_1 x_{i-1} - \bar{\varphi}_2 x_{i-2} - \dots - \bar{\varphi}_p x_{i-p} \right)^2 = \\ &= \sum_{i=l_p+1}^m x_i^2 + \sum_{j=1}^p \bar{\varphi}_j^2 \sum_{i=l_p+1}^m x_{i-j}^2 - 2 \sum_{j=1}^p \bar{\varphi}_j \sum_{i=l_p+1}^m x_i x_{i-j} + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p (\bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k \sum_{i=l_p-l_j+1}^m x_i x_{i-k+j}). \end{aligned}$$

З урахуванням значень елементів матриці V

$$\begin{aligned} \sum_{i=l_p+1}^m \varepsilon^2 &= v_\infty + \sum_{j=1}^p \bar{\varphi}_j^2 v_{jj} - 2 \sum_{j=1}^p \bar{\varphi}_j^2 v_{oj} - \\ &- 2 \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k v_{kj}. \end{aligned}$$

Отримавши таким чином оцінки для кожної моделі, що розглядаються, та відсортувавши їх за зростанням, маємо ряд моделей, що описують заданий процес, розташованих за спаданням критерію адекватності.

Для прикладу розглянемо ряд з 32 та 64 спостереження. Експерименти з обчислень приводилися при різних значеннях дисперсії шумів, що дає змогу стверджувати, що для значень шуму, менших ніж 10% середнього значення ряду, множина запізньованих отриманих в результаті роботи алгоритму, практично не змінюється.

На основі проведених чисельних експериментів над рядами відомої структури, можна зробити наступні висновки:

– перший підхід. У 62% випадків (в межах проведеного експерименту) отримана множина запізньованих, що склада-

лась із 6 найкращих, не містила жодного з істинних запізньованих досліджуваної моделі, хоч і дві-три моделі достатньо точно імітують вихідний ряд.

– другий підхід дає змогу точно отримати параметри вихідної моделі (в межах проведеного експерименту), причому множина моделей для повного перебору не перевищує 6 запізньованих, якщо кількість реальних запізньованих не перевищує 5.

Недоліком другого підходу слід відмітити те, що при визначенні  $p$  (кількості запізньованих), необхідно з природи ряду емпірично визначити  $I_p$ , щоб при побудові кореляційного ряду істинне значення номеру запізньовання потрапило в множину початкового розгляду моделей.

### Висновки

Можна стверджувати, що запропонований алгоритм знаходження структури моделі є більш ефективний, ніж наведені в сучасній літературі.

Для знаходження структури моделі нами запропоновано використання часткового коефіцієнта кореляції, що дає змогу без участі експертних оцінок і емпіричних висновків побудувати достатньо вузький клас моделей, що адекватно описують часовий ряд.

Використана процедура окаймлення дає змогу здійснити перебір моделей з визначеного класу за прийнятний час, використовуючи інформацію один раз обчисленої коваріаційної матриці.

### Список літератури

1. Капустинкас А., Немура А. Идентификация линейных случайных процессов. – Вильнюс: Моклас. – 166 с.
2. Лукашин Ю. П. Прогнозирование временных рядов с помощью моделей авторегрессии-скользящего среднего первого и второго порядка. – М.: ИМЭМО, 1983. – С. 107.
3. Химельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Наука, 1975. – 532 с.