УДК 618.513

Житецький Л. С., канд. техн. наук,
Супрун О. М., канд. фіз.-мат. наук,
Сущенко О. А., канд. техн. наук,
Лупой Р. О.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОСТІЙШОЇ ДИСКРЕТНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОБМЕЖУЮЧИМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТЯМИ

Інститут електроніки та систем управління Національного авіаційного університету

В рамках нестохастичного підходу ставиться і розв'язується задача побудови оптимального П-регулятора для стабілізації дискретного динамічного об'єкту першого порядку при наявності обмежуючих невизначеностей. Вважається, що параметри цього об'єкту невідомі, але відомі обмежені інтервали, до яких вони належать. Встановлюються умови існування такого регулятора. Показано, що знаходження оптимального значення параметру П-регулятора зводиться до розв'язання певної мінімаксної задачі з використанням одного з відомих чисельних методів. Наводиться схема алгоритма, який реалізує запропонований метод, а також результати модельних експериментів.

Вступ

При розв'язанні багатьох технічних задач часто виникає необхідність стабілізації певних фізичних величин на заданих рівнях в умовах постійно діючих неконтрольованих збурень (завад) [1]. Проблема забезпечення високих якісних показників функціонування систем стабілізації, побудованих за принципом зворотного зв'язку, до сьогоднішнього часу залишається вельми актуальною.

Формальне математичне розв'язання задачі оптимізації неперервних замкнених систем стабілізації, що описуються лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, при наявності стохастичних неконтрольованих збурень викладено в монографіях [1, 2]. Відомий також метод розв'язання подібної оптимізаційної задачі для класу систем, які функціонують в дискретному часі і описуються лінійними різницевими рівняннями [3].

В останній час в теорії управління став інтенсивно розвиватися інший (нестохастичний) підхід до задачі синтезу оптимального регулятора для стабілізації дискретних динамічних систем [4, 5] (див. також [6, гл.6]). Першою роботою в цьому напрямку була, мабуть, робота [7]. Основним припущенням, яке вводиться при розв'язанні задачі оптимізації дискретних систем в нестохастичній постановці, є те, що збурення вважається обмеженим за рівнем [4-7]. При цьому як функціонал якості береться в основному верхня грань модуля похибки системи [5, 7], а не середній квадрат похибки, який звичайно використовується в стохастичних оптимізаційних задачах [1-3].

Особливість всіх методів оптимізації, запропонованих в роботах [1-3, 5, 7], полягає в тому, що коефіцієнти рівняння, яке описує динамічний об'єкт, вважаються апріорі відомими. Натомість в багатьох практичних випадках конструктор системи нерідко не має в своєму розпорядженні апріорної інформації відносно вказаних величин. У цих випадках природно шукати рішення оптимізаційних задач в рамках адаптивного підходу [4, 6]. Проте реалізація такого підходу вимагає побудови відносно складних алгоритмів управління. Інший підхід до задачі оптимізації систем в умовах апріорної невизначеності полягає в тому, щоб певним чином визначити оптимальні значення параметрів регулятора, здатного забезпечити бажане чи гарантоване значення функціоналу якості для довільних значень параметрів об'єкта, які належать апріорі відомій обмеженій множині (класу об'єктів) [8]. На жаль, в роботі [8] ставиться і розв'язується задача синтезу оптимального регулятора лише в припущенні, що неконтрольоване збурення – детермінована змінна, яка задовольняє відоме різницеве рівняння.

В даній роботі ставиться і розв'язується задача оптимізації простійшої дискретної динамічної системи, що описується лінійним різницевим рівнянням першого порядку, в умовах нестохастичних невизначеностей, коли присутнє зовнішнє неконтрольоване збурення, обмежене за рівнем, як і в [5, 7], але на відміну від [5, 7] параметри об'єкта невідомі і належать деякій обмеженій опуклій області, як в [8]. Показано, що в математичному плані така задача зводиться до певної мінімаксної задачі. Для побудови оптимального П-регулятора, який включається в ланцюг зворотного зв'язку системи стабілізації, послідовно притягуються стандартні чисельні методи оптимізації [9], один з яких спирається на базові положення теорії лінійного програмування, а інший передбачає використання ітераційного методу пошуку мінімуму функції однієї змінної на обмеженому інтервалі, відомого як метод золотого перетину.

Постановка задачі

Розглянемо простійший динамічний об'єкт, який описується різницевим рівнянням першого порядку

$$y_n + a y_{n-1} = b u_{n-1} + v_n \tag{1}$$

зі сталими коефіцієнтами a і b. У цьому рівнянні y_n, u_n і v_n – відповідно вихідна змінна, що може вимірюватися, керуюча дія і неконтрольоване збурення в n-й дискретний момент часу (n=1,2,…). Вважається, що $\{v_n\} = v_1, v_2, \ldots$ – послідовність нерегулярних індетермінованих величин, обмежених за рівнем, тобто

$$|v_n| \le \eta < \infty \qquad \forall n; \tag{2}$$

ніякі інші вимоги регулярності $\{v_n\}$ не обов'язкові. Таким чином припускається, що $\{v_n\} \in l_\infty$, причому згідно з (2) маємо

$$\| v \|_\infty \le \eta, \tag{3}$$

де $\|v\|_\infty \overset{\Delta}{=} \sup\limits_n |v_n|$ – l_∞-норма $\{v_n\}$.

Основне припущення полягає в тому, що параметри a, b об'єкта (1) апріорі невідомі, але є інформація про певні обмежені інтервали, до яких вони неодмінно належать, а саме, що

$$-\infty < \underline{a} \le a \le \bar{a} < \infty, \tag{4}$$

$$0 < \underline{b} \le b \le \bar{b} < \infty. \tag{5}$$

Таким чином,

$$\theta \in \Xi \subset R^2, \ \operatorname{diam}\Xi < \infty, \tag{6}$$

де $\theta = [a, b]^T$ – вектор параметрів об'єкта з евклідового простору R^2, а Ξ – апріорі відома обмежена і замкнена множина, яка у відповідності до (4), (5) визначається декартовим добутком

$$\Xi = [\underline{a}, \bar{a}] \times [\underline{b}, \bar{b}] \tag{7}$$

і має діаметр

$$\operatorname{diam}\Xi = \left[\left(\underline{a} - \bar{a}\right)^2 + \left(\underline{b} - \bar{b}\right)^2 \right]^{1/2}.$$

Геометрична інтерпретація припущення (6), (7) у випадку симетричного обмеження на множину можливих значень параметра a в просторі $\{\hat{\theta}\}$ векторів $\hat{\theta} = \left[\hat{a}, \hat{b}\right]^T$ дана на рис. 1.

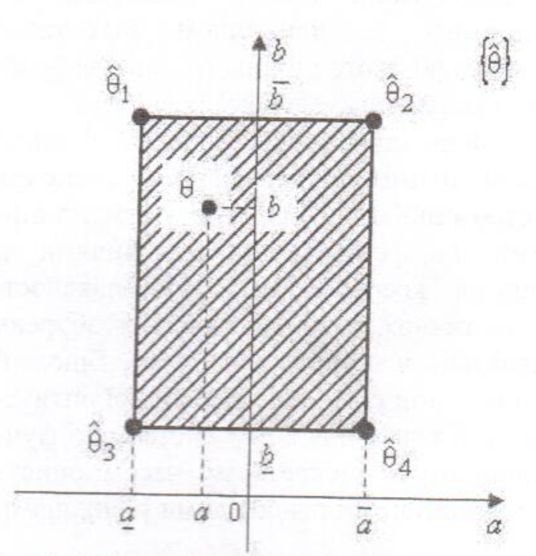

Рис. 1. Область невизначеності Ξ в просторі $\{\hat{\theta}\} \subseteq R^2$ при $\underline{a} = -\bar{a}$

***Означення* 1.** Оцінку у формі (6) при будь-якій неодноточковій множині $\Xi = \{\theta\}$ доречно називати обмежуючою невизначеністю відносно вектора параметрів θ, а оцінку

$$\xi_n \in [-\eta, \eta], \tag{8}$$

що відповідає (2), називати обмежуючою невизначеністю відносно неконтрольованого збурення ξ_n [4].

Означення 2. Об'єкт (1) назвемо інтервальним [8], якщо його обмежуюча множина невизначеності Ξ описується співвідношенням (7), тобто якщо кожний з двох його параметрів a і b може приймати довільне значення в межах, визначених нерівностями (4) і (5) відповідно, незалежно від того, яке значення має другий параметр.

Нехай треба стабілізувати вихід y_n об'єкта (1) на нульовому рівні, використовуючи в контурі зворотного зв'язку так званий пропорційний регулятор (П-регулятор) [6, гл.6], здатний керувати об'єктом (1) за законом

$$u_n = -k_p y_n \tag{9}$$

з деяким сталим коефіцієнтом пропорційності k_p.

Означення 3. Замкнену систему, яка включає об'єкт (1), охоплений зворотним зв'язком (9), назвемо робастно стійкою, якщо при $v_n \equiv 0$ і фіксованому $k_p \in R$ ця система стійка при будь-якому θ з множини невизначеності (7).

Будемо оцінювати якість стабілізації виходу y_n функціоналом

$$J = \sup_{\{v_n\}} \overline{\lim_{n\to\infty}} |y_n|, \tag{10}$$

у якому супремум береться на множині всіх можливих послідовностей $\{v_n\}$, що задовольняють (2).

Відомо (див., зокрема, [6, гл.6]), що коли $v_n \equiv 0$, а система (1), (9) асимптотично стійка, то при обмеженні (2) показник якості $J = J(\theta, k_p, \eta)$ виду (10), який залежить від вектора θ і скалярних величин k_p, η, залишається обмеженим:

$$J(\theta, k_p, \eta) < \infty. \tag{11}$$

Позначимо через $K_0 \subset R$ деяку множину можливих значень параметра k_p таких, що для будь-якого $k_p \in K^+ \subset \subset K_0$

$$\max_{\hat\theta \in \Xi} J(\hat\theta, k_p, \eta) < \infty,$$

а не тільки при $\hat\theta = \theta$, як в (11). Тоді якщо K_0 – непуста множина, то може бути поставлена оптимізаційна задача

$$\max_{\hat\theta \in \Xi} J(\hat\theta, k_p, \eta) = \min_{k_p \in K_0}. \tag{12}$$

Необхідно тепер встановити умови, при яких $K_0 \neq \varnothing$, і розробити метод, що дозволяє знайти рішення цієї оптимізаційної задачі (12).

Оптимізація системи управління при повній апріорній інформації про параметри об'єкта

Перед тим як розв'язувати поставлену задачу, розглянемо випадок, коли апріорна невизначеність відносно параметрів a, b об'єкта (1) відсутня, тобто коли множина (7) – одноточкова множина: $\Xi = \{\theta\}$. З цією метою перепишемо рівняння (9) так:

$$u_{n-1} = -k_p y_{n-1}. \tag{13}$$

Підстановка (13) в (1) дає

$$y_n + (a + bk_p) y_{n-1} = v_n.$$

Звідси

$$Y(z) = W(\theta, k_p, z^{-1}) V(z), \tag{14}$$

де

$$W(\theta, k_p, z^{-1}) = \frac{1}{1 + (a + bk_p) z^{-1}} \tag{15}$$

– дискретна передатна функція, яка при фіксованих θ і k_p залежить від оператора z^{-1} запізнення на один такт і зв'язує зображення $Y(z)$ вихідної послідовності $\{y_n\}$ з зображенням $V(z)$ послідовності $\{v_n\}$ збурень.

Необхідною і достатньою умовою асимптотичної стійкості замкненої системи (1), (9) при $v_n \equiv 0$ є, як відомо, вимога, щоб полюс дискретної передатної функції (15) по модулю був менше одиниці, тобто

$$\left|a + bk_\text{р}\right| < 1. \tag{16}$$

А ця вимога задовольняється, коли

$$-\frac{1+a}{b} < k_\text{р} < \frac{1-a}{b}, \tag{17}$$

оскільки $b > 0$ (див. (5)).

Використовуючи відоме розв'язання задачі Б.В. Булгакова про накопичення збурень (див. [6, гл.6]), на основі (14) з врахуванням обмеження (3) і визначення (10) функціоналу $J = J(\theta, k_\text{р}, \eta)$ отримуємо

$$J(\theta, k_\text{р}, \eta) = \left\|W(\theta, k_\text{р})\right\|_1 \eta. \tag{18}$$

У цьому співвідношенні

$$\left\|W(\theta, k_\text{р})\right\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|w_n(\theta, k_\text{р})\right| \tag{19}$$

– l_1-норма дискретної передатної функції $W(\theta, k_\text{р}, z^{-1})$, де $w_n(\theta, k_\text{р})$ визначається розкладом цієї функції в ряд за від'ємним показником z:

$$W(\theta, k_\text{р}, z^{-1}) = w_0(\theta, k_\text{р}) + w_1(\theta, k_\text{р}) z^{-1} + $$
$$+ w_2(\theta, k_\text{р}) z^{-2} + \ldots . \tag{20}$$

Послідовним діленням чисельника на знаменник в (15) знаходимо

$$w_n(\theta, k_\text{р}) = (-1)^n (a + bk_\text{р})^n,$$
$$(n = 0,1,2,\ldots). \tag{21}$$

Як видно з розгляду (21), при виконанні умови (16) права частина (20) являє собою нескінченно спадну геометричну прогресію зі знаменником

$$q = -(a + bk_\text{р}),$$

який змінює свій знак в залежності від співвідношення між складовими a, b вектора θ і коефіцієнтом $k_\text{р}$. Звідси випливає, що коли коефіцієнт $k_\text{р}$ задовольняє вимогу (17), то згідно з (19), (20) функціонал (18) набуває вигляду

$$J(\theta, k_\text{р}, \eta) = \frac{1}{1 - \left|a + bk_\text{р}\right|} \eta. \tag{22}$$

Вираз (22) показує, що оптимальне значення $k_\text{р} = k_\text{р}^*$, при якому $J(\theta, k_\text{р}, \eta)$ досягає свого мінімуму, визначається умовою

$$a + bk_\text{р} = 0.$$

З цієї умови

$$k_\text{р}^* = -\frac{a}{b}. \tag{23}$$

При цьому

$$J(\theta, k_\text{р}, \eta) = \eta,$$

що повністю узгоджується з отриманими в роботі [7] результатами, які дозволяють визначити параметри оптимального регулятора в системі з об'єктом (1).

З аналізу (22) випливає, що $J(\theta, k_\text{р}, \eta)$ при фіксованих θ, η є унімодальною функцією від $k_\text{р}$ на інтервалі $K_0 = (\underline{k}_\text{р}(\theta), \bar{k}_\text{р}(\theta))$ [9], де у відповідності до (17)

$$\underline{k}_\text{р}(\theta) = -\frac{1+a}{b}, \ \bar{k}_\text{р}(\theta) = \frac{1-a}{b}. \tag{24}$$

Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial k_\text{р}} J(\theta, k_\text{р}, \eta) = \frac{b\eta \operatorname{sign}(a + bk_\text{р})}{\left(1 - \left|a + bk_\text{р}\right|\right)^2}.$$

Звідси, враховуючи (23), (24), маємо

$$\frac{\partial}{\partial k_\text{р}} J(\theta, k_\text{р}, \eta) < 0 \text{ при } \underline{k}_\text{р}(\theta) < k_\text{р} < k_\text{р}^*,$$

і

$$\frac{\partial}{\partial k_\text{р}} J(\theta, k_\text{р}, \eta) > 0 \text{ при } k_\text{р}^* < k_\text{р} < \bar{k}_\text{р}(\theta).$$

А це означає, що в даному випадку $J(\theta, k_\text{р}, \eta)$ – опукла на K_0 функція, яка приймає мінімальне значення в точці $k_\text{р} = k_\text{р}^*$, визначеній формулою (23) (на відміну від загального випадку, коли така функція виявляється неопуклою [5, с. 114]). Проте, як і в загальному випадку, $J(\theta, k_\text{р}, \eta)$ – негладка функція, оскільки її похідна $\partial J / \partial k_\text{р}$ втрачає неперервність при $k_\text{р} = k_\text{р}^*$.

Неважко переконатися, що

$$\lim_{k_\text{р} \to \underline{k}_\text{р}(\theta)+0} J(\theta, k_\text{р}, \eta) = +\infty,$$

$$\lim_{k_\text{р} \to \bar{k}_\text{р}(\theta)-0} J(\theta, k_\text{р}, \eta) = +\infty$$

при кожному $\eta \in (0, \infty)$.

Для ілюстрації встановлених властивостей $J(\theta, k_\text{p}, \eta)$ на рис.2 показана ця функція для конкретних числових значень a, b і η.

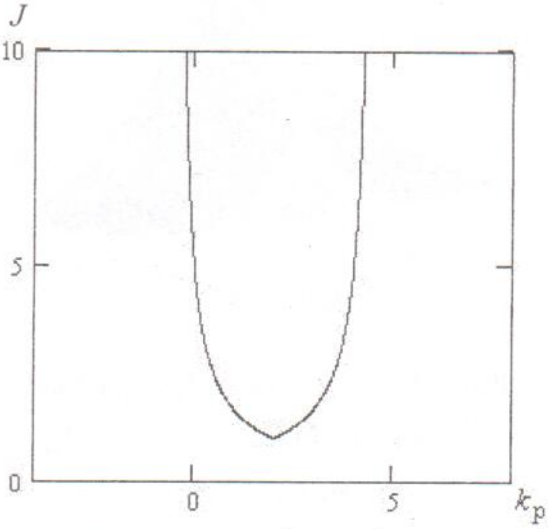

Рис. 2. Залежність $J(\theta, k_\text{p}, \eta)$ від k_p при $a = -0{,}8$, $b = 0{,}4$, $\eta = 1{,}0$

Умови робастної стійкості системи з інтервальним об'єктом

Нехай тепер Ξ – довільна обмежена неодноточкова множина, яка описується виразом (7). Визначимо відкриті інтервали $\left(\underline{k}_\text{p}(\hat{\theta}),\ \overline{k}_\text{p}(\hat{\theta})\right)$, покладаючи $\hat{\theta} \in \Xi$, де

$$\underline{k}_\text{p}(\hat{\theta}) = -\frac{1+\hat{a}}{\hat{b}}, \quad \overline{k}_\text{p}(\theta) = \frac{1-\hat{a}}{\hat{b}}, \qquad (25)$$

і виберемо два довільні вектори $\hat{\theta}' = [\hat{a}', \hat{b}']^T$, $\hat{\theta}'' = [\hat{a}'', \hat{b}'']^T \in \Xi$. З (17) випливає, що при $v_n \equiv 0$ система (1), (9) буде тоді і тільки тоді асимптотично стійкою при $\theta = \hat{\theta}'$, коли $k_\text{p} \in \left(\underline{k}_\text{p}(\hat{\theta}'),\ \overline{k}_\text{p}(\hat{\theta}')\right)$, а при $\theta = \hat{\theta}''$, коли $k_\text{p} \in \left(\underline{k}_\text{p}(\hat{\theta}''),\ \overline{k}_\text{p}(\hat{\theta}'')\right)$. Зрозуміло, що коли перетин

$$K_0(\hat{\theta}', \hat{\theta}'') = \left(\underline{k}_\text{p}(\hat{\theta}'),\ \overline{k}_\text{p}(\hat{\theta}')\right) \cap \left(\underline{k}_\text{p}(\hat{\theta}''),\ \overline{k}_\text{p}(\hat{\theta}'')\right)$$

– непуста множина, як показано на рис.3.а, то при будь-якому значенні $k_\text{p} \in K_0(\hat{\theta}', \hat{\theta}'')$ ця система залишатиметься асимптотично стійкою незалежно від того, чи $\theta = \hat{\theta}'$, чи $\theta = \hat{\theta}''$. Якщо ж $K_0(\hat{\theta}', \hat{\theta}'') = \varnothing$ (рис. 3,б) то не існує П-регулятора, здатного забезпечити асимптотичну стійкість такої системи, як при $\theta = \hat{\theta}'$, так при $\theta = \hat{\theta}''$. Отже, для існування П-регулятора, який міг би забезпечити асимптотичну стійкість системи (1), (2) при $v_n \equiv 0$ і будь-якому θ з області Ξ, необхідно і достатньо, щоб перетин

$$K_0 \overset{\Delta}{=} \bigcap_{\hat{\theta} \in \Xi} \left(\underline{k}_\text{p}(\hat{\theta}),\ \overline{k}_\text{p}(\hat{\theta})\right), \qquad (26)$$

коли $\hat{\theta}$ пробігає всі можливі значення з Ξ, був непустою множиною.

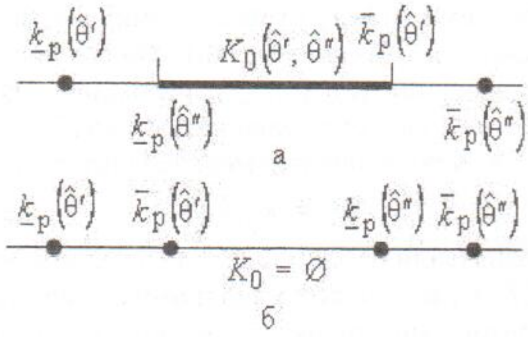

Рис. 3. Ілюстрації до можливого утворення інтервалу K_0 в таких випадках: а) $\underline{k}_\text{p} = \underline{k}_\text{p}(\theta'') < \overline{k}_\text{p} = \overline{k}_\text{p}(\theta')$; б) $K_0 = \varnothing$

З виразів (25) і визначення (7) області Ξ видно, що $\underline{k}_\text{p}(\hat{\theta})$ і $\overline{k}_\text{p}(\hat{\theta})$ є неперервними функціями в кожній точці $\hat{\theta} \in \Xi$. Оскільки ж Ξ – замкнена множина, то існують величини

$$\underline{k}_\text{p} = \max_{\hat{\theta} \in \Xi} \underline{k}_\text{p}(\hat{\theta}), \quad \overline{k}_\text{p} = \min_{\hat{\theta} \in \Xi} \overline{k}_\text{p}(\hat{\theta}). \qquad (27)$$

Згідно визначень (26), (27) при

$$\underline{k}_\text{p} < \overline{k}_\text{p} \qquad (28)$$

маємо $K_0 = (\underline{k}_\text{p}, \overline{k}_\text{p}) \neq \varnothing$; якщо ж нерівність (28) не задовольняється, то $K_0 = \varnothing$.

На основі (27) зі співвідношень (25) знаходимо

$$\underline{k}_\text{p} = \begin{cases} -\dfrac{1+\underline{a}}{\overline{b}} & \text{при } \underline{a} \geq -1, \\[2ex] -\dfrac{1+\underline{a}}{\underline{b}} & \text{при } \underline{a} \leq -1, \end{cases} \qquad (29)$$

$$\bar{k}_{\text{р}} = \begin{cases} \dfrac{1-\bar{a}}{\bar{b}} & \text{при } \bar{a} \le 1, \\ \dfrac{1-\bar{a}}{\underline{b}} & \text{при } \bar{a} \ge 1. \end{cases} \qquad (30)$$

Використовуючи вирази (29), (30), перетворимо умову (28) для довільного інтервалу $[\underline{a}, \bar{a}]$ до вигляду

$$\max\left\{-\frac{1+\underline{a}}{\bar{b}}, -\frac{1+\underline{a}}{\underline{b}}\right\} < \min\left\{\frac{1-\bar{a}}{\bar{b}}, \frac{1-\bar{a}}{\underline{b}}\right\}. \qquad (31)$$

Таким чином, встановлюється справедливість наступного твердження.

***Твердження* 1.** Для існування П-регулятора, здатного забезпечити робастну асимптотичну стійкість замкненої системи (1), (9) в умовах обмежуючих невизначеностей (2), (6), (7), необхідно і достатньо, щоб була виконана умова (31).

При виконанні умови (31) інтервал

$$K_0 = (\underline{k}_{\text{р}}, \bar{k}_{\text{р}}), \qquad (32)$$

визначений згідно (26) з врахуванням (27), буде непустою неодноточковою відкритою множиною. У відповідності до (22) при кожному $\hat{\theta}$ з Ξ

$$J\left(\hat{\theta}, k_{\text{р}}, \eta\right) = \frac{1}{1-\left|\hat{a}+\hat{b}k_{\text{р}}\right|}\eta \qquad (33)$$

для будь-якого значення $k_{\text{р}} \in K_0$; при цьому $J\left(\hat{\theta}, k_{\text{р}}, \eta\right) < \infty$, оскільки з (31) випливає, що

$$\left|\hat{a}+\hat{b}k_{\text{р}}\right| < 1. \qquad (34)$$

Наочну уяву про функцію $J\left(\hat{\theta}, k_{\text{р}}, \eta\right)$ на конкретній множині Ξ при фіксованих значеннях $k_{\text{р}} \in K_0$ і η як функцію двох змінних $\hat{a}$ і $\hat{b}$ дає рис.4.

Неважко переконатися, що якщо область Ξ відносно велика, тобто $\operatorname{diam}\Xi >> 0$, то умова (31) може і не виконуватися, а отже, не виключений випадок, коли $K_0 = \varnothing$. Наприклад, якщо $a = [-2; -1]$ і $b = [1; 10]$, то у відповідності до співвідношень (29), (30) знаходимо $\underline{k}_{\text{р}} = 1$, $\bar{k}_{\text{р}} = 0{,}2$. Як бачимо, умова (31) не виконується. Отже $K_0 = \varnothing$.

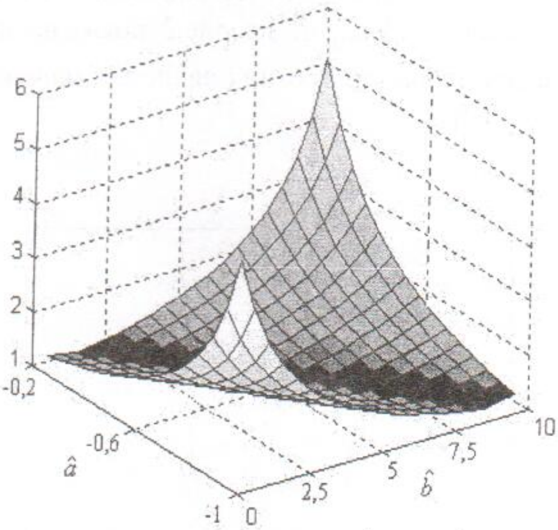

Рис. 4. Приклад функції $J\left(\hat{\theta}, k_{\text{р}}, \eta\right)$ при $k_{\text{р}} = 0{,}1$, $\eta = 1{,}0$ і $\hat{a} \in [-0{,}9; -0{,}2]$, $\hat{b} \in [1{,}0; 10{,}0]$

З твердження 1 випливає такий важливий наслідок.

Наслідок. Якщо Ξ – множина можливих значень параметрів стійких об'єктів (не обов'язково асимптотично), то умова (31) завжди виконується, тобто $K_0 \ne \varnothing$.

В справедливості цього наслідку неважко переконатися, взявши до уваги ту обставину, що об'єкт (1) з вектором параметрів $\theta = \hat{\theta}$, який задовольняє обмеження

$$-1 \le \underline{a} \le \hat{a} \le \bar{a} \le 1, \qquad (35)$$

є стійким. При наявності ж обмеження (35) згідно формули (29), (30) маємо $\underline{k}_{\text{р}} = -(1+\underline{a})/\bar{b}$, $\bar{k}_{\text{р}} = (1+\bar{a})/\bar{b}$, а отже $\underline{k}_{\text{р}} < \bar{k}_{\text{р}}$. Таким чином, якщо $|\hat{a}| \le 1$ для всіх $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$, то $K_0 \ne \varnothing$; при цьому $\operatorname{diam} K_0 = 2b^{-1}$.

Оптимізація системи управління в умовах обмежуючих невизначеностей

Нехай область невизначеності Ξ така, що умова (31) виконується. Зафіксуємо деякий коефіцієнт $k_{\text{р}}$ з інтервалу (32), тобто покладемо

$$\underline{k}_p < k_p < \overline{k}_p .$$

Максимізуємо далі $J(\hat{\theta}, k_p, \eta)$ при даному k_p по всім можливим векторам θ з Ξ, використовуючи формулу (35). Тоді з врахуванням (34) і визначення (7) області Ξ можна записати

$$\max_{\hat{\theta}\in\Xi} J(\hat{\theta}, k_p, \eta) = \frac{1}{1-\max\limits_{\substack{\underline{a}\le\hat{a}\le\overline{a}\\ \underline{b}\le\hat{b}\le\overline{b}}} \left|\hat{a}+\hat{b}k_p\right|}\eta . \quad (36)$$

Оскільки величина

$$M(k_p) = \max_{\substack{\underline{a}\le\hat{a}\le\overline{a}\\ \underline{b}\le\hat{b}\le\overline{b}}} \left|\hat{a}+\hat{b}k_p\right|, \quad (37)$$

що фігурує в правій частині (36), залежить тільки від вибраного k_p, то

$$\min_{k_p\in K_0}\max_{\hat{\theta}\in\Xi} J(\hat{\theta}, k_p, \eta) = \frac{1}{1-\min\limits_{\underline{k}_p<k_p<\overline{k}_p} M(k_p)}\eta .$$

Звідси оптимальне значення параметра k_p П-регулятора може бути знайдено як

$$k_p^* = \arg\min_{\underline{k}_p<k_p<\overline{k}_p}\max_{\substack{\underline{a}\le\hat{a}\le\overline{a}\\ \underline{b}\le\hat{b}\le\overline{b}}} \left|\hat{a}+\hat{b}k_p\right| . \quad (38)$$

Це дозволяє сформулювати таке твердження.

Твердження 2. При виконанні умови (31) оптимальне значення параметра k_p в рівнянні (9) визначається формулою (38).

Як видно з формули (38), обчислення оптимального значення k_p^* передбачає максимізацію величини $\left|\hat{a}+\hat{b}k_p\right|$ по всім $\hat{a}\in[\underline{a}, \overline{a}]$ і $\hat{b}\in[\underline{b}, \overline{b}]$ при кожному фіксованому значенні $k_p \in (\underline{k}_p, \overline{k}_p)$ з подальшою мінімізацією функції $M(k_p)$, яка визначається виразом (37). Неважко зрозуміти, що цей вираз можна записати таким чином:

$$M(k_p) = \max\Big\{\max_{\substack{\underline{a}\le\hat{a}\le\overline{a}\\ \underline{b}\le\hat{b}\le\overline{b}}}(\hat{a}+\hat{b}k_p),\; -\min_{\substack{\underline{a}\le\hat{a}\le\overline{a}\\ \underline{b}\le\hat{b}\le\overline{b}}}(\hat{a}+\hat{b}k_p)\Big\}. \quad (39)$$

Оскільки ж сама функція $\hat{a}+\hat{b}k_p$ лінійна відносно змінних $\hat{a}$ і $\hat{b}$, а обмеження на ці змінні теж лінійні, то визначення мінімума і максимума даної функції, що фігурують в (39), зводиться до простійших задач лінійного програмування [9].

Враховуючи, що мінімуми і максимуми лінійних функцій при лінійних обмеженнях обов'язково досягаються у вершинах многогранника обмежень, згідно з (39) маємо

$$M(k_p) = \max\Big\{\left|\underline{a}+\underline{b}k_p\right|,\ \left|\underline{a}+\overline{b}k_p\right|,\ \left|\overline{a}+\underline{b}k_p\right|,\ \left|\overline{a}+\overline{b}k_p\right|\Big\}. \quad (40)$$

Отже, знаходження значення функції $M(k_p)$ для кожного фіксованого k_p зводиться до простого перебору значень $\left|\hat{a}+\hat{b}k_p\right|$ у чотирьох вершинах $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\hat{\theta}_3$, $\hat{\theta}_4$ області (7) (див. рис.1). Таким чином, для визначення оптимального значення k_p^* за формулою (38) залишається тепер розв'язати задачу одномірної оптимізації

$$k_p^* = \min_{k_p\in K_0} M(k_p) . \quad (41)$$

Якщо припустити, що $M(k_p)$ є унімодальною функцією від k_p на інтервалі K_0, як і функція $J(\theta, k_p, \eta)$, то для розв'язання задачі (41) можна притягнути добре відомі чисельні методи, наприклад, метод золотого перетину [9].

Схема алгоритму, який дозволяє знайти оптимальне значення $k_p = k_p^*$ коефіцієнта пропорційності в законі управління (9) або повідомити, що в даних конкретних умовах невизначеності такий закон не може бути реалізовано, наведена на рис. 5.

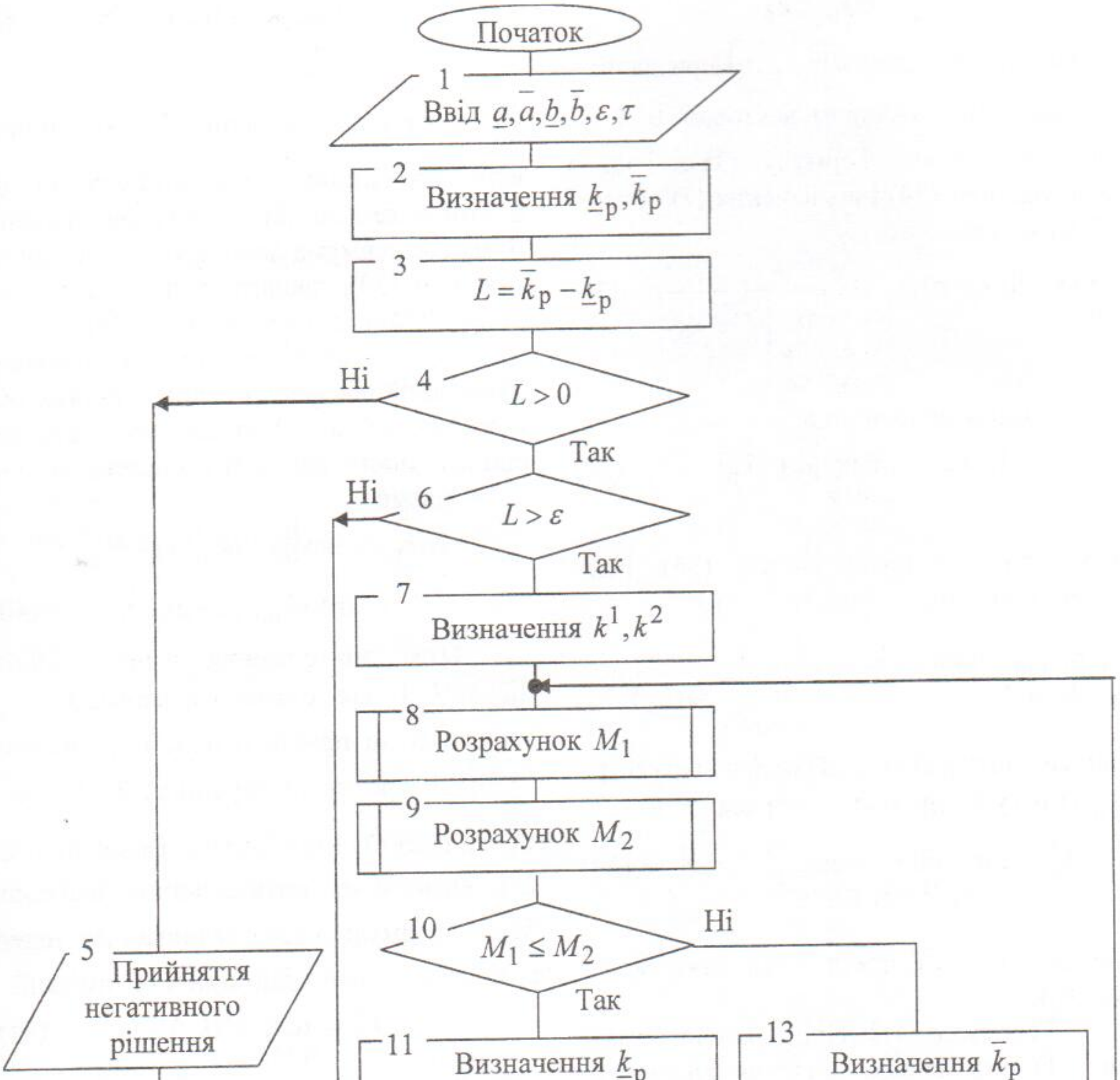

Рис. 5. Схема алгоритму розв'язання оптимізаційної задачі (38)

Реалізація даного алгоритму передбачає введення наступних початкових даних (блок 1): найменше і найбільше можливе значення параметрів a і b об'єкта (1); число $\varepsilon > 0$, яке визначає точність обчислення значення k_p^*; число Фібоначчі $\tau = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ [9]. В блоці 2 розраховуються нижня і верхня межі можливого інтервалу локалізації точки k_p^* за формулами (29), (30). Далі обчислюється величина $L = \bar{k}_p - \underline{k}_p$ (блок 3) і визначається її знак (блок 4). В тому випадку, коли виявляється, що $L \le 0$, приймається рішення: робастного регулятора в даних умовах не існує (блок 5). Після цього алгоритм припиняє свою роботу. В протилежному випадку в блоці 6 порівнюються значення L і ε. Якщо $L \le \varepsilon$, то приймається рішення $k_p^* = k^1$ (блок 17), виводиться це значення k_p^* (блок 18) і робота алгоритму завершується. Якщо ж $L > \varepsilon$, то визначається положення поточних точок k^1 і k^2 на інтервалі $[\underline{k}_p, \bar{k}_p]$ за формулами

$$k^1 = \bar{k}_p - \left(\bar{k}_p - \underline{k}_p\right)/\tau^2 ,$$

$$k^2 = \bar{k}_p - k^1 + \underline{k}_p$$

(блок 7). В блоках 8, 9 послідовно знаходяться величини $M_1 = M\left(k^1\right)$ і $M_2 = M\left(k^2\right)$ з використанням формули (40). Значення M_1 і M_2 порівнюються в блоці 10. Якщо $M_1 \le M_2$, то послідовно визначаються точки $\underline{k}_p = k^2$ (блок 11), $k^2 = k^1$, $k^1 = \bar{k}_p - k^2 + \underline{k}_p$ (блок 12). Якщо ж $M_1 > M_2$, то послідовно визначаються такі точки: $\bar{k}_0 = k^1$ (блок 13), $k^1 = k^2$, $k^2 = \bar{k}_p - k^1 + \underline{k}_p$ (блок 14). Далі незалежно від результатів порівняння M_1 і M_2 знаходиться нове значення $L = \bar{k}_p - \underline{k}_p$ (блок 15). Нарешті в блоці 16 порівнюється знайдене число L з числом ε. Якщо $L > \varepsilon$, то операції в блоках 8 – 16 повторюються. В протилежному випадку приймається $k_p^* = k^1$ (блок 17). В блоці 18 здійснюється вивід k_p^*. На цьому алгоритм завершує свою роботу.

Модельний приклад

Для демонстрації можливостей запропонованого методу оптимізації проводились обчислення оптимального значення k_p^* з використанням алгоритму, представленого на рис.5, а також моделювання замкненої системи при таких вихідних даних: $[-0{,}9 \le \hat{a} \le -0{,}2]$, $[1{,}0 \le \hat{b} \le 10{,}0]$, $a = -0{,}2$, $b = 8{,}0$, $\eta = 1{,}0$. Обчислення дало наступний кінцевий результат: $k_p^* = 0{,}1$. При такому оптимальному значенні коефіцієнта k_p згідно з формулою (22) маємо $J = 2{,}5$.

Для побудови моделі замкненої оптимальної системи (рис.6) був використаний стандартний пакет *SIMULINK*.

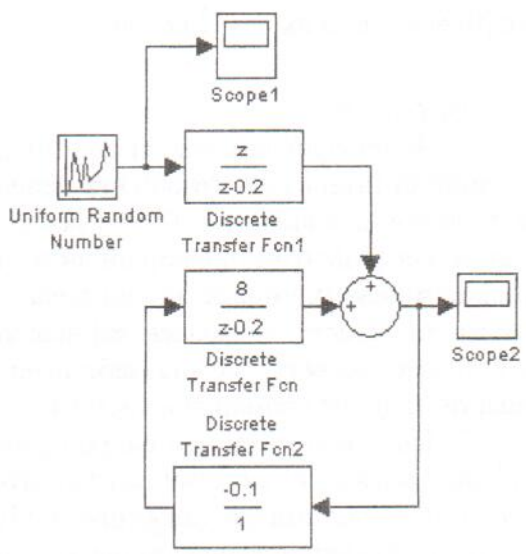

Рис.6. Модель замкненої системи

При проведенні модельного експерименту послідовність $\{v_n\}$ генерувалася як псевдовипадкова послідовність чисел, рівномірно розподілених в інтервалі [-1,0; 1,0] (див рис. 6).

Результати моделювання тривалістю 400 тактів наведені на рис. 7.

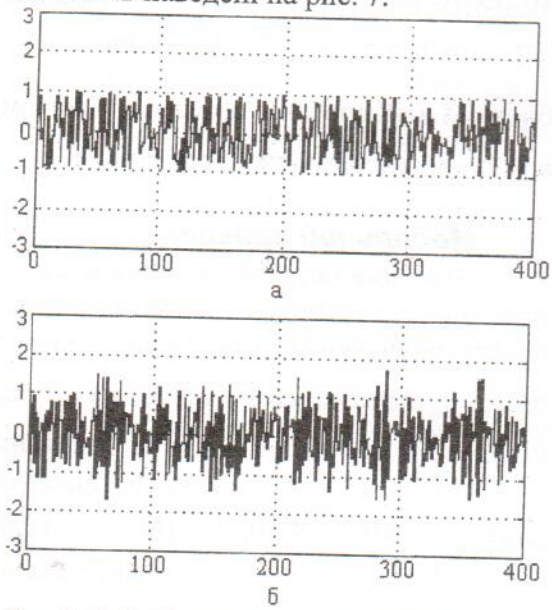

Рис. 7. Змінні оптимальної системи: а) збурення v_n; б) вихід y_n

Модельний експеримент підтвердив очікуваний результат: замкнена система залишилась стійкою; при цьому найбільше за модулем значення y_n в умовах прикладу не перевищувало 2,5 при всіх $n \in [0,\ 400]$, тоді як $M(k_{\text{p}}^{*}) = 5{,}0$.

Висновки

1. Якщо функцію стабілізації вихідної змінної інтервального об'єкта першого порядку покласти на П-регулятор зі сталим коефіцієнтом пропорційності, то лише при певних умовах, що визначають вимоги до області невизначеності параметрів такого об'єкту, можна забезпечити робастну стійкість замкненої системи.

2. При виконанні умови робастної стійкості замкненої системи задача оптимізації цієї системи за показником (10) якості її функціонування зводиться до розв'язання певної мінімаксної задачі, яка передбачає послідовне розв'язання простішої задачі лінійного програмування і задачі знаходження мінімума функції однієї змінної.

3. Для визначення оптимального значення коефіцієнта пропорційності П-регулятора доцільно використовувати один з відомих чисельних методів оптимізації унімодальної функції на заданому інтервалі, наприклад, метод золотого перетину.

Список літератури

1. *Блохин Л. Н.* Оптимальные системы стабилизации. – К.: Техніка, 1982. – 144 с.

2. *Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н.* Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. – К.: Наук. думка, 1973. – 151 с.

3. *Сунцев В. Н.* Оптимизация дискретных систем с обратными связями при полной и неполной информации о компонентах вектора координат объекта // Кибернетика и вычисл. техника. – 1985. – Вып. 67. – С. 21–27.

4. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход.– К.: Наук. думка, 1985. – 248 с.

5. *Поляк Б. Т.* Новые подходы к управлению дискретными системами при ограниченных возмущениях // Междунар. конф. по проблемам управления (29 июня – 2 июля 1999 г.). Сб. пленарных докладов. – М.: Фонд "Проблемы управления". – 1999. – С. 111–117.

6. *Азарсков В. Н., Блохин Л. Н., Житецкий Л. С., Куссуль Н.Н.* Робастные методы оценивания, идентификации и адаптивного управления. – К.: НАУ, 2004. – 500 с.

7. *Якубович Е. Д.* Решение одной задачи оптимального управления дискретной линейной системой // Автоматика и телемеханика. – 1975. – № 9. – С. 73–79.

8. *Цыпкин Я. З.* Синтез робастно оптимальных систем управления объектами в условиях ограниченной неопределенности // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 9. – С. 139–159.

9. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 396 с.