УДК 004.4

Гамаюн В. П., д-р техн. наук,
Журавель С. В.

ОБЧИСЛЮВАЧ НА БАЗІ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету

Паралельна форма обробки є перспективним напрямом у організації комп'ютерних засобів. При визначені паралельної обробки даних передбачається, що фази обчислювального процесу реалізуються на окремому обладнані та одночасно. При цьому підвищується швидкодія засобів обробки та в результаті зменшується час отримання рішення завдання. В роботі розглянуто питання про трансформацію алгоритмів у квазіпаралельну форму та методи і засоби реалізації таких алгоритмів за допомогою апарату ланцюгових дробів.

Існуючі моделі паралельної організації структур даних та обчислень є інструментом для вирішення широкого кола задач. Але зростаючі вимоги по швидкодії та деяким іншим показникам комп'ютерних засобів (побудови систем комутації, зберігання, операційних структур) визначають розробки нових форм організації паралельної обробки. Особливо це важливо для задач, які не мають природного паралелізму, або зовсім не підлягають розпаралелюванню.

Пропонується альтернатива в організації обчислень на підставі квазіпаралельних методів обробки за допомогою апарату ланцюгових дробів. Кінцева мета – частина обчислювального алгоритму або алгоритму в цілому замінюється відповідним ланцюговим дробом, реалізація якого може бути програмною або апаратно підтриманою у вигляді універсального обчислювача.

Ланцюговий дріб є потужним апаратом, який застосовується у багатьох прикладних галузях науки та техніки. Також перевагою ланцюгового дробу є її регулярна структура, тобто для обчислення різних функцій не має потреби кожного разу будувати новий обчислювач чи змінювати структурні зв'язки між елементами апаратури. Простіший ланцюговий дріб має вигляд [3]:

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ldots+\cfrac{a_n}{b_n+\ldots}}}, \qquad (1)$$

Так, ланцюговий дріб, який складається з однакових ланок $\frac{a_i}{b_i+r_i}$ (i = 1,2,…) можна зобразити і в геометричній формі, де кожній такій ланці поставити у відповідність фігуру, яка зображена на рис. 1, де число a_i (йому відповідає точка, з якої виходять дві стрілки) ділиться на суму ділиться на суму двох чисел (їм відповідають кінці стрілок).

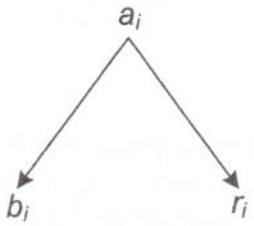

Рис. 1. Геометричне зображення будь-якої ланки ланцюгового дробу

Тоді легко отримати геометричне зображення ланцюгового дробу (1), яке представляє собою орієнтований граф типу дерево (рис. 2)

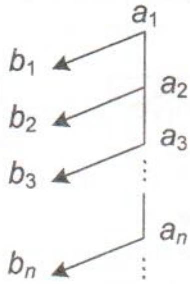

Рис. 2. Геометричне зображення ланцюгового дробу (1)

Звичайний ланцюговий дріб являється приватним випадком гіллястого ланцюгового дробу.

Як було зазначено, ланцюгові дроби з усіма їх перевагами, мають один дуже вагомий недолік – їх обчислення потребують великої точності. Тобто похибка мала велике значення. Для зменшення значення похибки необхідно збільшувати глибину ланцюгового дробу. Але чим глибший ланцюговий дріб, тим складніше її обчислити, навіть маючи значні обчислювальні ресурси. Це пов'язано з тим, що з кожним діленням кількість двійкових розрядів (якщо зійти до рівня бітів в машині) може значно збільшуватися. Часто необхідно оперувати з числами, в яких на велику кількість нулів приходиться одна одиниця, що вимагає зберігання великої кількості інформації. Так як розрядність машини кінцева, то на певному етапі трапляється переповнення розрядної сітки машини, і досягти необхідної точності не має можливості. Ця проблема може бути вирішена за допомогою спеціальної форми представлення даних.

Підвищення ефективності способів обробки інформації, які здійснюються апаратними і мікропрограмними засобами, являється визначальною ознакою обчислювальних структур та пристроїв, які розвиваються у теперішній час.

Загальна модель генератора ланцюгового дробу.

Нехай задана функція N змінних $f(x)$, де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Вирішення заданої функції складається з двох етапів. На першому необхідно перетворити функцію у ланцюгову дріб і на другому вже здійснювати саме обчислення цієї дроби. Формула перетворення функції у ланцюгову дріб має вигляд [4]:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k_1=1}^{N} \frac{x_{k_1} - x_{k_1}^0}{{}_{x_{k_1}}{}' f(x^0) + \sum_{k_2=1}^{N} \frac{x_{k_2} - x_{k_2}^0}{2\, {}_{x_{k_2}}{}' \Big| {}_{x_{k_1}}{}' f(x) \Big|_{x=x_0} + \vdots}} = f(x^0) + \mathop{D}_{m=1}^{\infty} \sum_{k_m=1}^{N} \frac{x_{k_m} - x_{k_m}^0}{{}_{x_{k_m}}{}' \Big| {}_{x_{k_{m-1}} \dots x_{k_1}}^{(m\text{-}1)} f(x) \Big|_{x=x_0}}$$

Для її перетворення необхідно спочатку визначити першу, другу, і так далі, n-ну приватні зворотні похідні (ПЗП).

Вони визначаються за наступною схемою: спочатку за формулою ${}_{x_{k_1}}{}' f(x) = \frac{1}{f'_{x_{k_1}}(x)}$ визначається ПЗП першого порядку, потім остання ПЗП зворотно диференціюється і отримуємо ПЗП другого порядку ${}_{x_{k_1}}{}'' f(x) = \frac{1}{({}' f_{x_{k_1}}(x))'}$ і так далі до отримання ПЗП n-го порядку ${}_{x_{k_1}}^{(n)} f(x) = \frac{1}{({}^{(n\text{-}1)} f_{x_{k_1}}(x))'}$. Тобто визначення n-ої ПЗП здійснюється за n послідовних кроків зворотного диференціювання. Графічно це виглядає таким чином (рис.3):

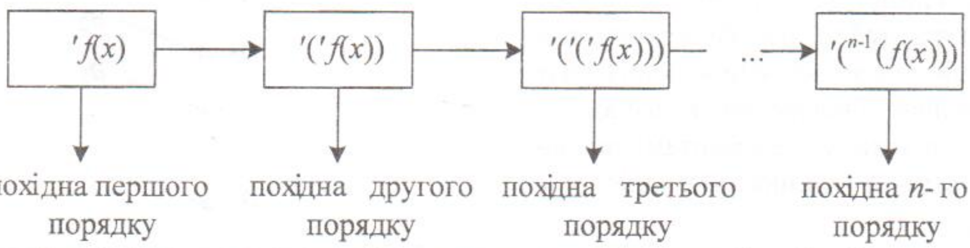

Рис. 3. Структурна схема обчислення приватної зворотної похідної n-порядку

Загальна схема базового обчислювача ланцюгового дробу зображена на рис. 4.

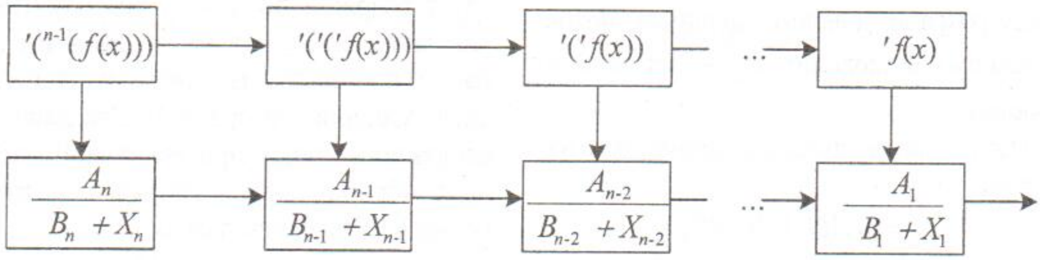

Рис. 4. Структурна схема базового обчислювача (конвеєра) ланцюгового дробу

Арифметично-алгоритмічний апарат обчислення ланцюгового дробу

Зазначимо, що при обчисленні ланцюгового дробу використовуються такі основні операції: додавання, віднімання, множення та ділення. Додавання та віднімання виконуються за одни такт. Множення та ділення виконуються за кілька тактів. Ідеалом є – виконання останніх також за один такт. Для цього необхідно різними методами прискорити виконання цих операцій.

Множення можна прискорити двома типами методів: апаратними та логічними (алгоритмічними). При застосуванні апаратних методів прискорення досягається за рахунок ускладнення апаратури арифметичного пристрою, тобто застосування швидкодіючих елементів, сумісництво додавань із зсувами, множення не на один розряд множника, а відразу на групу. Прикладом останнього випадку є матричний метод, коли в одному такті обробляються всі розряди множника.

При застосуванні логічних методів прискорення виконується ускладненням керуючого автомату. Ці методи поділяються на дві групи: методи, що призводять до зменшення циклів підсумовування (алгоритм Лемона) та методи одночасної обробки кількох розрядів множника (алгоритм множення з одночасною обробкою двох розрядів множника). Тобто виконати множення за один такт реально.

Операція ділення в силу свого послідовного характера має менше методів прискорення, ніж операції додавання, віднімання та множення. Одним з засобів прискорення ділення являється організація обчислень тільки вагомих цифр результата – розрядів частки, які не дорівнюють нулю [1]. Основа такого способу прискорення полягає у використанні спеціальної форми представлення даних – розрядно-логарифмічна.

Основні операції при розрядно-логарифмічній формі запису даних. Виконання арифметичних операцій над даним, які представлені у РЛФ запису, здійснюється за правилами:

додавання:

$Na_i + Nb_i = Na_i + Nb_i$, якщо $Na_i \neq Nb_i$;

$Na_i + Nb_i = Na_i + 1$, якщо $Na_i = Nb_i$;

віднімання:

$Na_i - Nb_i = Na_i - 1, Na_i - 2, \ldots Nb_i$, якщо $Na_i \succ Nb_i$;

$Na_i - Nb_i = 0$, якщо $Na_i = Nb_i$;

множення:

$Na_i * Nb_i = Na_i + Nb_i = Nc_i$, де Nc_i - вагомий розряд добутку; Na_i, Nb_i – представлення вагомих розрядів a_i та b_i операндів A та B у РЛФ запису.

Ділення реалізується як операція, зворотна до множення. Якщо розглядати ділене як результат підсумовування частки та дільника (поелементне додавання векторів представлення), то при заданому діленому та дільнику цифри частки визначаються. виконанням дій, які зворотні при реалізації множення, тобто відніманням. Послідовність кроків при реалізації частки визначається відніманням номера старшого вагомого розряду дільника від номера старшого вагомого розряду діленого (поточного залишку):

$R_i^N = N_i(A) - N_i(B)$ чи $R_j^N = N_i(O_i^j) - N_i(B)$, де $N_i(A), N_i(B), N_i(O_i^j)$ номера старших вагомих розрядів діленого, дільника, поточного залишку відповідно; R_j^N – поточна цифра частки.

Після кроку ділення визначимо залишок як

$$O_{j+1} = A^N(O_j) - B^N R_j^N,$$

де O_{j+1}, O_j – залишок на $(j-1)$ –м та j-м кроках ділення відповідно.

Наступна цифра ділення частки обчислюється як

$$R_{j+1} = N_i(O_{j+1}) - N_i(B),$$

$N_i(O_{j+1})$ – номер старшого вагомого розряду залишку.

Наступні кроки обчислення результату аналогічні і процес ділення закінчується при заповненні розрядної сітки частки або отриманні нульового залишку. При отриманні від'ємного залишку обчислена цифра частки зменшується на одиницю та визначається новий залишок. Такий метод ділення близький до ділення кутом та завдяки РЛФ запису являється таким, що його можна машино реалізувати. При реалізації ділення необхідно виконувати операції пошуку старшої вагомої одиниці операнду, віднімання, віднімання одиниці, множення на двійкову константу (зсув), визначення знаку результату. Методи ділення з використанням РЛФ запису даних мають асимптотичну складність у $n/4$ кроки, де n – розрядність даних.

Застосування РЛФ запису дозволяє реалізувати прискорене обчислення не тільки ділення, але й операторів, які включають разом з діленням й інші операції. Найбільш застосовуваний оператор $MD = A/(B+X)$ при традиційній організації передбачає обчислення знаменника, а потім виконання ділення. Реалізація MD у вигляді макрооператора визначає виконання деякого операційного циклу над даними A, B та X, в результаті якого буде отримане часткове або повне значення MD.

Операнд X, який входить до знаменника макрооператора MD, може включатися до обробки, тобто до обчислення суми $B+X$ (знаменника), як повнорозрядне число, як група розрядів, по одному розряду (послідовне включення), тільки по вагомим розрядам. У відповідності з цим існує кілька варіантів макрооператора MD. Розглянемо послідовність кроків при включенні операнда X до обробки тільки вагомими розрядами. Вираз $B+X$ визначається як

$$T_i = T_{i-1} + X_{i-1}^N,$$

де і змінюється у межах від 1 до Q, (Q - кількість вагомих одиниць у операнді X), $T_0 = B, x_{i-1}^N$ – значення j-го вагомого розряду операнда X. На першому кроці, тобто при i=1, формула обчислення MD визначається як

$$MD = \frac{A}{T_0 + x_0^N} = \frac{A}{B}.$$

Ділення виконується за вказаним вище алгоритмом:

$$R_i^N = N_i(A) - N_i(B),$$

де R_i^N – цифра частки; $N_i(A), N_i(B)$ – номера старших вагомих розрядів діленого A та дільника B.

Після кроку ділення визначається залишок як:

$$O_i = A - BR_i^N.$$

На другому кроці необхідно виконати (при i=2)

$$MD = \frac{A}{T_1 + x_1^N} = \frac{A}{B + x_1^N}.$$

Враховуючи, що у порівнянні з першим кроком дільник змінився на x_1^N треба відкоригувати залишок на величину $R_i^N x_i^N$, тобто

$$O_i^K = O_i - R_i^N x_i^N,$$

де O_i^K – відкоригований залишок після першого кроку (після надходження x_i^N).Цифра частки R_{Ki}^N, на яку треба відкоригувати результат, визначається з умови

$$O_2 = O_i^k - R_{Ki}^N(B + x_i^N) \geq 0, \qquad (2)$$

тобто різність між відкоригованим залишком O_i^K та добутком R_{Ki}^N та зміненим дільником $T_2 = B + x_i^N$ повинна бути додатною та прямувати до нуля. При цьому необхідно визначити, що виконання умови (2) досягається як при $R_{Ki}^N \succ 0$, так і при $R_{Ki}^N \prec 0$. Таким чином, цифра корекції частки визначається з урахуванням знаку $z = signR_{Ki}^N$. Обчислення R_{Ki}^N виконується таким же чином, як і при визначенні поточної цифри частки у алгоритмі ділення, що використовується:

$$R_{Ki}^N = N_i\left(O_i^K\right) - N_i\left(B + x_i^N\right),$$

де $N_i\left(O_i^K\right)$ та $N_i\left(B + x_i^N\right)$ – старші вагомі розряди задишка та дільника. Якщо умова (2) не виконується, то R_{Ki}^N змінюється на одиницю і обчислення залишку повторюється, у протилежному випадку значення R_{Ki}^N визначено вірно. Значення частки на цьому кроці ділення визначається як $R_2 = R_1^N - zR_{K1}^N$, де $z = signR_{Ki}^N$.

Наступні кроки у обчисленні оператора *MD* реалізуються аналогічно. На *j*-му кроці при надходженні чергової цифри, що змінює дільник, виконуються:

- корегування залишку, який отриманий на $(j$-1)-му кроці:

$$O_{j-1}^K = O_{j-1} - R_{j-1}x_j^N,$$

де R_{j-1} – значення частки на (j-1)-му кроці;

- обчислення цифри зміни частки R_{j-1}:

$$R_{Kj}^N = N_i\left(O_{j-1}^K\right) - N_i\left(T_j\right),$$

де $N_i\left(O_{j-1}^K\right), N_i\left(T_j\right)$ – старші вагомі розряди відкоригованого залишку O_{j-1}^K, та зміненого дільника $T_j = B + x_1^N + x_2^N + ... + x_j^N$;

- визначення залишку $O_j = O_{j-1}^K - R_{Kj}^N T_j$ з урахуванням знаку R_{Kj}^N та виконання умови (2). Якщо $O_j \prec 0$, то $R_{Kj}^N = R_{Kj}^N \pm 1$ та визначення O_j повторюється;

- формування значення макрооператора *MD* на *j*-му кроці: $R_j = R_{j-1} - zR_{Kj}^N$,

де $z = signR_{Ki}^N$; R_{j-1} – результат ділення, який отриманий на (j-1)-му кроці.

За умовою, що операнд X повністю включений до обробки ($i = Q$) та при отриманні залишку, який дорівнює нулю, чи при заповненні всієї розрядної сітки частки ділення вважається виконаним. Якщо при ($i = Q$) отриманий залишок не дорівнює нулю та не заповнена вся розрядна сітка частки, ділення продовжується до виконання вказаних умов з дільником $T_Q = B + X$

Виконане вище моделювання показує, що по запропонованому методу можливо побудувати алгоритми обчислення макрооператорів типу:

$$\frac{A}{B - X}, \frac{A}{B + X + Y}, \frac{A}{B + X - Y},$$
$$\frac{A}{B - X - Y}, \frac{A}{B \pm \sum X \pm \sum Y},$$

де X, Y – операнди, які включаються до обробки у різних варіантах.

Також одним із застосувань може бути організація обчислень у конвеєрному режимі багатоступеневого ланцюгового макрооператора, який включає в себе ділення. Цифра корекції частки R_j^K, яка отримується у кожному операційному циклі, може бути передана для ініціалізації обробки до наступного операційного пристрою. Схема обчислень у такому конвеєрі організується, як показано на рис. 5. На рис. 5 такі позначення: $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ – оператори обробки; $t_j, t_{j+1}, ..., t_m$ - інтервали передачі розрядів корекції результату.

Якщо $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ реалізують однакові макрооператори, які включають в себе ділення $MD_i = \dfrac{A}{B + X}$, то на такому конвеєрі можна обчислювати ланцюгові дроби виду $\left[a_0; \dfrac{b_1}{a_1}; \dfrac{b_2}{a_2}; ...\right]$.

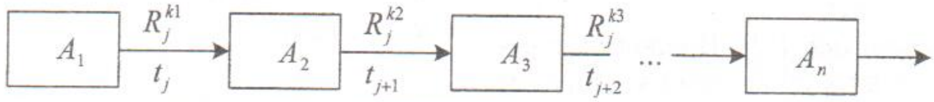

Рис. 5. Структурна схема обчислень ланцюгового макрооператора, який включає в себе ділення

Робота конвеєра організована наступним чином: на першому кроці обчислюються початкові значення частки при діленні $\frac{b_i}{a_i}$ одночасно на всіх ступенях конвеєра, на другому та наступних кроках виконується ділення на змінні дільники, де на вхід ступенів конвеєра поступають дані, що являються розрядами корекції результатів ділення, які були отримані на попередніх кроках.

Так як ми маємо справу з гіллястою ланцюговим дробом, то побудуємо базовий обчислювач і для неї. Загальна структурна схема базового обчислювача побудованого за формулою перетворення функції у гіллястий ланцюговий дріб зображена на рис. 6.

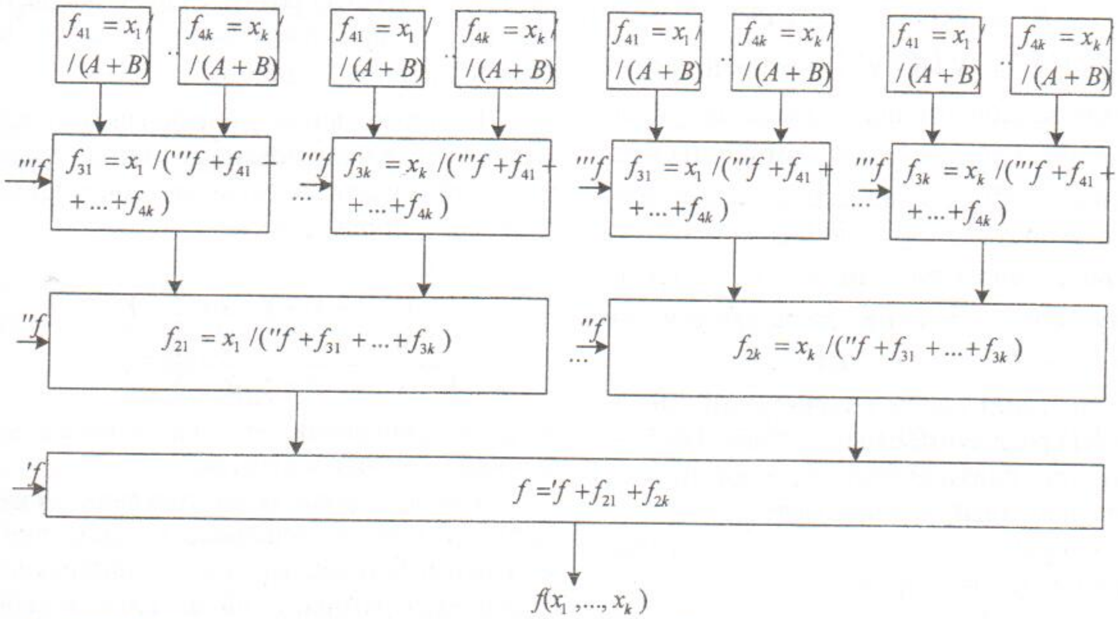

Рис. 6. Загальна структурна схема базового обчислювача, побудованого за формулою перетворення функції у гіллястий ланцюговий дріб - генератора гіллястого ланцюгового дробу

Таким чином, на базі формули перетворення функції у ланцюговий дріб був побудований базовий обчислювач її вирішення.

Список літератури

1. *Гамаюн В. П.* О повышении эффективности мотодов реализации операции деления // Методы и стредства обработки информации в системах реального времени. – К.: ИК АН Украины, 1990. – С. 23-33.
2. *Гамаюн В. П.* Метод реализации макрооператоров с делением. // Управляющие системы и машины. – К.: ИК АН Украины, 1993. – Вып. 2. – С. 25-29.
3. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 116 с.
4. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: ГИТТЛ 1956. – 203 с.
5. *Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. І., Пташник Б. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби. – ДАН УРСР, аер. А, 1967, № 2 – 112 с..
6. *Боднарчук П. І. Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – К.: Наук. думка, 1974 – 308 с.
7. *Недашковский Н. А.* Решение систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. – К.: КГУ, 1980 – 28 с.
8. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.