

МОДЕЛЮВАННЯ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОФІЛЮ НИЗЬКОТЕПЛОПРОВІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

¹Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С. П. Корольова

²Інститут проблем матеріалознавства ім. І. Н. Францевича НАН України

Запропоновано математичне моделювання температурного профілю низькотеплопровідних матеріалів символьним методом диференціальних перетворень. Показано співпадіння результатів моделювання з даними експерименту.

Постановка проблеми

Розробка теплозахисних матеріалів має важливе значення для проектування аерокосмічних літальних апаратів. Експериментальне вивчення фізичних процесів в теплозахисних матеріалах поблизу їх, поверхні є проблемним, бо температура поблизу поверхні теплозахисних матеріалів часто перевищує робочий діапазон термопар. В зв'язку з цим виникає задача математичного моделювання температурного профілю низько теплопровідних матеріалів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1, 2] показав, що на практиці використовують методи апроксимації експериментальних даних на основі аналітичних функцій. Недолік такого імітаційного моделювання полягає в тому, що вигляд апроксимуючої функції невідомий і залежить від режиму прогрівання теплозахисних матеріалів. Вказаний недолік усувається у випадку математичного моделювання теплових процесів на основі диференціальних перетворень рівняння теплопровідності і граничних умов, які описують режим прогрівання і зносу маси теплозахисних матеріалів.

Мета статті

Мета статті полягає в аналітичному моделюванні методом диференціальних перетворень фізичних процесів, які опи-

сують температурний профіль низькотеплопровідних матеріалів.

Розглянемо математичні моделі теплових процесів у теплозахисних матеріалах. Відомо, що при постійних теплофізичних властивостях матеріалу математичну модель можна представити [1] у вигляді лінійного рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (1)$$

яка при крайових умовах першого роду:

$$\begin{aligned} T(y, \tau)|_{y=0} &= \bar{T}_w, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} T(y, \tau) &= T_0, \end{aligned} \quad (2)$$

описує температурний профіль у зразку у вигляді:

$$\begin{aligned} T(y, \tau) &= T_0 + (\bar{T}_w - T_0) \cdot \\ &\cdot \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

де a – коефіцієнт температуропроводності, \bar{T}_w – стаціонарна температура поверхні, що нагрівається, T_0 – температура непрогрітого матеріалу, y – координата, яка відраховується від поверхні зразка, τ – час нагрівання.

В режимі стаціонарного руйнування зразка експериментальні виміри теплового поля, як показано в [1], суттєво відрізняються від температурного профілю (3),

отриманого на основі інтегральних перетворень Лапласа.

В роботі [2] наведені більш точні математичні моделі теплових процесів, які добре узгоджуються з експериментальними даними. Але в [2] відсутні обґрунтування результатів моделювання на цих моделях. Як показано в [2] при стаціонарному руйнуванні поверхні матеріалу рівняння теплопровідності (1) слід розглядати при наступних граничних умовах:

$$\begin{aligned} -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) \Big|_{y=s(\tau)} &= \rho \cdot c \cdot \bar{V}_\infty (\bar{T}_W - T_0), \\ T(y, \tau) \Big|_{y=s(\tau)} &= \bar{T}_W, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T(y, \tau) = T_0, \\ y &> s(\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

де λ – теплопровідність, ρ – густина матеріалу, c – теплоємність, $s(\tau)$ – товщина знесеного шару матеріалу, \bar{V}_∞ – швидкість лінійного зносу матеріалу.

Краєві умови (4) крім умов (2) включають додаткову умову, яка справедлива при руйнуванні матеріалу із стаціонарною швидкістю \bar{V}_∞ .

Розв'яжемо рівняння (1) при граничних умовах (4) символічним методом [3] на основі диференціальних перетворень [4, 5]:

$$T(q, \tau) = \frac{H_y^q}{q!} \cdot \left[\frac{\partial^q T(y, \tau)}{\partial y^q} \right]_{y=s(\tau)}, \quad (5)$$

де $T(q, \tau)$ – диференціальне зображення функції $T(y, \tau)$, q – цілочисельний аргумент, що набуває значень $0, 1, 2, 3, \dots, \infty$, H_y – додатна масштабна стала для змінної y .

Застосування диференціальних перетворень (5) переводить рівняння (1) в області зображень у звичайне диференціальне рівняння:

$$\frac{dT(q, \tau)}{d\tau} - a \cdot D_y^2 T(q, \tau) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$T(q, \tau) = e^{\tau \cdot a \cdot D_y^2} \cdot C(q), \quad (6)$$

де D_y^2 – символ операції дворазового диференціювання функції $T(y, \tau)$ по змінній y в області зображень, $C(q)$ – невідома функція цілочисельного аргументу q , яку необхідно визначити з граничних умов (4). Першу граничну умову (4) представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=s(\tau)} + h \cdot T(y, \tau) \Big|_{y=s(\tau)} &=, \\ &= h \cdot T_0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{де } h = \frac{\bar{V}_\infty}{a}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}.$$

Граничній умові (7) задовольняє функція:

$$T(y, \tau) = C_1 \cdot e^{-h[y-s(\tau)]} + T_0, \quad (8)$$

де C_1 – довільна константа $s(\tau) = \bar{V}_\infty \tau$.

При підстановці (8) у другу граничну умову (4) отримаємо вираз:

$$T(y, \tau) \Big|_{y=s(\tau)} = \bar{T}_W,$$

з якого слідує:

$$C_1 = \bar{T}_W - T_0. \quad (9)$$

З врахуванням (9) вираз (8) перетворимо до вигляду:

$$T(y, \tau) = T_0 + (\bar{T}_W - T_0) \cdot \exp[-h(y - s(\tau))] \quad (10)$$

Функцію (10), яка задовольняє граничним умовам (4), переведемо при $\tau=0$ в область зображень:

$$T(q, 0) = T_0 \cdot \vartheta(q) + (\bar{T}_W - T_0) \cdot E(q), \quad (11)$$

де $T(q)$ – зображення функції $\exp(-hy)$, $\vartheta(q)$ – зображення сталої одиничної функції.

Прирівняємо розв'язок (6) при $\tau=0$ до зображення функції (11), яка задовольняє граничним умовам (4). В результаті отримаємо вираз, який визначає невідому функцію $C(q)$:

$$T(q,0) = C(q) = T_0 \psi(q) + (\bar{T}_W - T_0) \cdot E(q), \quad (12)$$

Підстановка (12) в (6) дасть розв'язок рівняння (1) при граничних умовах (4) в області зображень у вигляді:

$$T(y, \tau) = \exp(\tau \cdot a D_y^2) \cdot [T_0 \psi(q) + (\bar{T}_W - T_0) \cdot E(q)] \quad (13)$$

Розв'язок (13) слід перевести з області зображень в область оригіналів. З цією метою у виразі (13) розкладемо експоненту в степеневий ряд:

$$T(y, \tau) = T_0 \cdot (\psi(q) + \frac{a \cdot \tau}{1!} D_y^2 \psi(q) + \frac{(a \cdot \tau)^2}{2!} D_y^4 \psi(q) + \dots) + (\bar{T}_W - T_0) \cdot (E(q) + \frac{a \cdot \tau}{1!} D_y^2 E(q) + \frac{(a \cdot \tau)^2}{2!} D_y^4 E(q) + \dots). \quad (14)$$

Вираз (14) переведемо в область оригіналів з врахуванням наступних відповідностей. В області оригіналів всі члени вигляду $D_y^m \psi(q)$, де m – додатне ціле число, дають нулі, тому що диференціювання будь-якого порядку сталої функції дасть нуль. Членам виду $D_y^m E(q)$ в області оригіналів відповідає вираз:

$$\frac{\partial^{2n} e^{-hy}}{\partial y^{2n}} = (h^2)^n \cdot e^{-hy},$$

де $m=2n$, n – ціле додатне число.

Зображенню $\psi(q)$ в області оригіналів відповідає одиниця.

З врахуванням вказаних відповідностей зображення розв'язку (14) в області оригіналів перетвориться у вираз:

$$T(y, \tau) = T_0 + (\bar{T}_W - T_0) \cdot e^{-hy} \cdot \left[1 + \frac{a \cdot h^2}{1!} \tau + \frac{(a \cdot h^2)^2}{2!} \tau^2 + \dots \right]. \quad (15)$$

Вираз в квадратних дужках в (15) представляє розклад в степеневий ряд функції $\exp(ah^2\tau)$. З врахуванням цього розв'язок (15) в області оригіналів можна записати наступним чином:

$$T(y, \tau) = T_0 + (\bar{T}_W - T_0) \cdot \exp[-hy + ah^2\tau], \quad (16)$$

$$\text{де } h = \frac{\bar{V}_\infty}{a}.$$

Таким чином, моделювання теплового процесу рівнянням (1) при граничних умовах (4) дасть експоненціальний температурний профіль (16) в зразку на відміну від відомого розв'язку (3).

Розв'язок крайової задачі (1), (4) символічним методом диференціальних перетворень виконано точно, так як розв'язок (16) точно задовольняє рівняння (1) і граничним умовам (4).

Експериментальні дані, наведені в [2], підтверджують встановлення експоненціального температурного профілю поблизу поверхні зразка при $s(\tau) \leq y \leq 2s(\tau)$ [1].

В роботі [2] показано, що для отримання температурного профілю на ділянці $y > 2s(\tau)$ рівняння (1) слід розглядати при граничних умовах:

$$T(y, \tau)|_{y=2s(\tau)} = T_0 + (\bar{T}_W - T_0) \exp\left(-\frac{\bar{V}_\infty^2}{a} \tau\right), \quad (17)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T(y, \tau) = 0.$$

Розв'яжемо рівняння (1) на ділянці $y > 2s(\tau)$ символічним методом [3] на основі диференціальних перетворень [4]. Попередньо введемо зміщені змінні: $y_c = y - 2s(\tau)$ і $T_c(y_c, \tau) = T(y_c, \tau) - T_0$

В зміщених змінних крайова задача формулюється наступним чином. Необхідно знайти розв'язок рівняння:

$$\frac{\partial T_c(y_c, \tau)}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 T_c(y_c, \tau)}{\partial y_c^2}, \quad (18)$$

при граничних умовах:

$$T_c(y_c, \tau)|_{y_c=0} = (\bar{T}_W - T_0) \exp\left(-\frac{\bar{V}_\infty^2}{a} \tau\right), \quad (19)$$

$$\lim_{y_c \rightarrow \infty} T_c(y_c, \tau) = 0,$$

Поставлену задачу розв'яжемо диференціальними перетвореннями [4] по часовому аргументу τ :

$$T_c(y_c, k) = \frac{H_\tau^k}{k!} \cdot \left[\frac{\partial^k T_c(y_c, \tau)}{\partial \tau^k} \right]_{\tau=0},$$

де $T_c(y_c, k)$ – диференціальне зображення функції $T_c(y_c, \tau)$, k – цілочисельний аргумент, що приймає значення 0, 1, 2, 3, ... ∞ , H_τ – додатна масштабна стала для часового аргументу τ .

Застосування диференціальних перетворень даного виду переводить рівняння в частинних похідних в області зображень у звичайне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 T_c(y_c, k)}{dy_c^2} - \frac{1}{a} \cdot D T_c(y_c, k) = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд:

$$T_c(y_c, k) = \exp\left(-\frac{y_c}{\sqrt{a}} \sqrt{D}\right) \cdot A(k) + \exp\left(\frac{y_c}{\sqrt{a}} \sqrt{D}\right) \cdot B(k), \quad (20)$$

де D – символ операції диференціювання функції $T_c(y_c, \tau)$ по часовому аргументу τ в області зображень, $A(k)$ і $B(k)$ – невідомі функції цілочисельного аргументу k , які необхідно визначити із заданих граничних умов.

Переведемо другу граничну умову (19) в область зображень:

$$\lim_{y_c \rightarrow \infty} T_c(y_c, k) = 0, \quad (21)$$

Якщо в розв'язку (20) прийняти $B(k)=0$ і підставити його в граничну умову (21), то отримуємо:

$$\lim_{y_c \rightarrow \infty} e^{-\frac{y_c}{\sqrt{a}} \sqrt{D}} A(k) = 0,$$

Таким чином друга гранична умова (19) виконується, якщо розв'язок крайової задачі (18), (19) в області зображень матиме вигляд:

$$T_c(y_c, k) = e^{-\frac{y_c}{\sqrt{a}} \sqrt{D}} A(k), \quad (22)$$

Переведемо першу граничну умову (19) в область диференціальних перетворень:

$$T_c(y_c, k)|_{y_c=0} = (\bar{T}_W - T_0) E(k), \quad (23)$$

де $E(k)$ – зображення функції $\exp\left(-\frac{\bar{V}_\infty^2}{a} \tau\right)$.

Прирівнюючи першу граничну умову (23) в області зображень до розв'язку крайової задачі (22), отримуємо вираз для невідомої функції у вигляді:

$$A(k) = (\bar{T}_W - T_0) E(k). \quad (24)$$

Підставляючи вираз (24) у розв'язок крайової задачі (22), отримуємо шуканий розв'язок в області зображень:

$$T_c(y_c, k) = (\bar{T}_W - T_0) \cdot \left[e^{-\frac{y_c}{\sqrt{a}} \sqrt{D}} \cdot \psi(k) * E(k) \right], \quad (25)$$

де, $E(k) = \psi(k) * E(k)$, $\psi(k)$ – зображення сталої одиничної функції, а символ $*$ позначає виконання операції множення в області зображень.

Розв'язок (25) крайової задачі переведемо з області зображень в область оригіналів. З цією метою введемо позначення:

$$\Phi(k) = \exp\left(-\frac{y_c}{\sqrt{a}}\sqrt{D}\right) \cdot b(k). \quad (26)$$

Цій функції в області оригіналів згідно таблиці відповідності зображень і оригіналів, наведеній в [4], відповідає оригінал виду:

$$1 - \operatorname{erf} \frac{y_c}{2\sqrt{a \cdot \tau}}.$$

З врахуванням позначень (26) розв'язок крайової задачі (25) в області зображень набуде вигляду:

$$T_c(y_c, k) = (\bar{T}_W - T_0) [\Phi(k) * E(k)]. \quad (27)$$

Враховуючи, що символу * в області оригіналів відповідає звичайна операція добутку двох функцій, а зображенню $E(k)$ відповідає оригінал $\exp\left(-\frac{\bar{V}_\infty^2}{a}\tau\right)$, розв'язок крайової задачі в(18), (19) набуде вигляду:

$$T_c(y_c, \tau) = T_0 + (\bar{T}_W - T_0) \cdot \exp\left(-\frac{\bar{V}_\infty^2}{a}\tau\right) \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \frac{y_c}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right]. \quad (28)$$

З врахуванням співвідношень $y_c = y - 2s(\tau)$ і $T_c(y_c, \tau) = T(y_c, \tau) - T_0$ розв'язок (28) крайової задачі зводиться до вигляду:

$$T(y, \tau) = T_0 + (\bar{T}_W - T_0) \cdot \exp\left(-\frac{\bar{V}_\infty^2}{a}\tau\right) \left[1 - \operatorname{erf} \frac{y - 2s(\tau)}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right]. \quad (29)$$

Розв'язок (29) можна перетворити, якщо врахувати, що координата рухомої поверхні визначається з однієї сторони віднесенням шаром $y_{II} = s(\tau) = \bar{V}_\infty \tau$, а з іншої сторони виражається через нерухому координату y вигляді $y_{II} = y - s(\tau)$. Звідси впливає співвідношення $y - s(\tau) = \bar{V}_\infty \tau$, підстановка якого у розв'я-

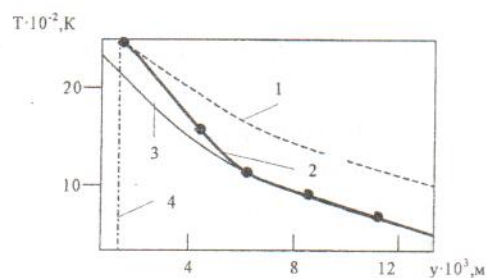
зок (29) приводить до наступної форми запису крайової задачі:

$$T(y, \tau) = T_0 + (\bar{T}_W - T_0) \cdot \exp\left(-\frac{\bar{V}_\infty}{a}[y - s(\tau)]\right) \left[1 - \operatorname{erf} \frac{y - y_s}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right]. \quad (30)$$

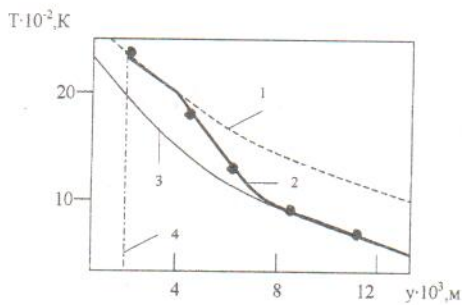
де $y_s = 2s(\tau)$, а розв'язок справедливий при $y > 2s(\tau)$ [2].

Розв'язок (29) або (30) крайової задачі (1), (17) на ділянці $y > 2s(\tau)$ точно задовольняє рівнянню (1) і граничним умовам (17), що підтверджує аналітичні можливості символічного методу [3] диференціальних перетворень.

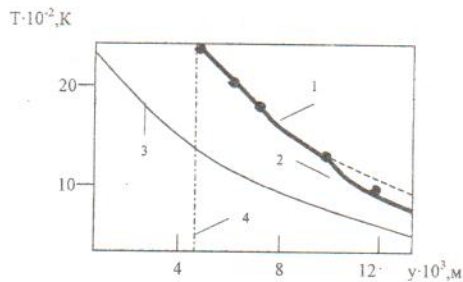
Математичне моделювання, виконане на основі диференціальних перетворень, добре узгоджується з експериментальними дослідженнями [2] температурного профілю в легірованій кварцовій склокераміці (КСК). Результати цих досліджень наведені на рисунках а), б), в). Моделювання температурного профілю (крива 2) за виразами (16), (30), які отримані символічним методом диференціальних перетворень, співпадають з експериментальними даними, зображеними точками. Результати розрахунку температурного профілю за виразом (3), отриманим на основі відомої моделі крайової задачі (1), (2), суттєво розбігаються з експериментальними даними (крива 3 на рис. а) і б)).



а)



б)



в)

Порівняння розрахункових та експериментальних профілів температури в легітованій КСК: а) і б) – $\bar{V}_\infty = 0,05 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$, $T_w = 2400 \text{ К}$, $a = 0,65 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $T_0 = 300 \text{ К}$, а) – на 30 секунд нагріву; б) – на 50 секунд нагріву; в) – $\bar{V}_\infty = 0,11 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$, $T_w = 2390 \text{ К}$, $a = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $T_0 = 300 \text{ К}$, на 50 секунд нагріву; 1 – розрахунок по (16), 2 – по (30) при $y \geq y_s$ і по (16) при $S(\tau) < y \leq y_s$, 3 – по (3), 4 – положення поверхні, що нагрівається; точки – експеримент

Слід відмітити, що розв'язок (16) крайової задачі (1), (4) може бути отриманий також інтегральними перетвореннями Лапласа. Цей розв'язок на рисунках зображає крива 1. Але розв'язок, отриманий інтегральними перетвореннями Лапласа (крива 1) співпадає з експериментальними даними тільки поблизу поверхні зразка в межах прогрітого шару, а далі суттєво відхиляється від експериментальних даних (рис. а), б)). З іншої сторони, розв'язок (3), отриманий інтегральними перетвореннями Лапласа по моделі (1),

(2), суттєво розбігається з експериментальними даними поблизу поверхні зразка, а потім наближається до експериментальних даних (крива 3).

Результати моделювання символічним методом диференціальних перетворень співпадають з експериментальними даними по всій довжині зразка (крива 2).

Висновки

Математичне моделювання температурного профілю низькотеплопровідних матеріалів символічним методом диференціальних перетворень дозволило обґрунтувати точний аналітичний розв'язок крайової задачі, який узгоджується з експериментальними дослідженнями теплового поля в легітованій кварцовій склокераміці.

Список літератури

1. Фролов Г. А. Константа теплового разрушения и ее роль в процессах прогрессива и уноса массы материала// Инженерно-физический журнал НАН Беларуси. – 2004. – Т. 77, №3. – С. 19-46.
2. Фролов Г. А., Баранов В. Л. Температурный профиль в стационарном и нестационарном режимах прогрессива и уноса массы низкотеплопроводных материалов// Инженерно-физический журнал НАН Беларуси. – 2005. – Т. 78, №6. – С. 49-55
3. Баранов В. Л., Водоп'ян С. В., Костюченко Р. М. Символический метод решения уравнений в частных производных на основе системноаналоговых дифференциальных перетворень// Вісник ЖДТУ. – 2005. – №3(34). – С. 89-95.
4. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1980. – 420 с.
5. Пухов Г. Е. Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.