УДК 629.7.05:535.33.07/.08

Баранов В. Л., д-р техн. наук,
Водоп'ян С. В., канд. техн. наук,
Грищук Р. В., ад'юнкт

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ІНФОРМАТИВНОГО ПАРАМЕТРУ ЗА МАТЕРІАЛАМИ КОСМІЧНОЇ ЗЙОМКИ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

Задача відновлення інформативних ознак об'єктів космічного моніторингу виражається інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду. У статті запропоновано у якості інформативного параметру обрати термодинамічну температуру і знайти її аналітичне рішення для різних умов спостереження на основі диференціальних тейлорівських перетворень.

Постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими завданнями

Перехід інформації на початку XXI століття в розряд важливих ресурсів людства вимагає широкого впровадження сучасних інформаційних космічних технологій у народногосподарську галузь держави. Потреби інформатизації народного господарства пов'язані із стрімким зростанням чисельності населення і все більш активним антропогенним впливом його на навколишнє середовище, тому проблема визначення стану об'єктів космічного моніторингу набуває особливої актуальності.

У сучасних умовах підвищити інтенсивність та різноплановість інформаційного забезпечення можливо шляхом застосування нових досягнень космічної галузі – використання інформації від гіперспектральних знімальних систем космічних апаратів. Відомо [1], що інформативні можливості гіперспектральних систем визначаються кількістю спектральних каналів та величиною спектрального розрізнення. Кількість каналів спостереження у таких системах варіюється залежно від призначення системи, від десяти до тисячі, а то і більше [1], а величина спектрального розрізнення від 0,1 до 100 нм.

Важливу роль при використанні такої інформації посідає оперативність її тематичного дешифрування. Істотного підвищення оперативності можна досягнути за рахунок автоматизації обробки зображень при використанні не тільки спектральних, а й інших додаткових інформативних ознак гіперспектральних космічних знімків.

Однією із інформативних ознак на основі якої можна визначати стан фізичних тіл на матеріалах гіперспектральної зйомки є їх термодинамічна температура. Прийнята реалізація щодо кожного із вузьких каналів зйомки в гіперспектральних системах пропорційна інтегралу від спектральної щільності енергетичної світності, і в загальному випадку описується законом теплового випромінювання Макса Планка.

$$\Re(\nu,T)_i = 2\pi h c^{-2} \int_{\nu_{i1}}^{\nu_{i2}} \varepsilon(\nu) * \nu^3 * \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^{-1} d\nu, \quad (1)$$

де $\Re(\nu,T)_i$ – спектральна щільність енергетичної світності *i*-го каналу спостереження, $Вт*м^{-3}$; h – стала Планка $\left(6{,}626*10^{-34}\ \ Вт*c^2\right)$; c – швидкість розповсюдження електромагнітного випромінювання у вакуумі $\left(3*10^8\ м/с\right)$; $\varepsilon(\nu)$ – спектральний коефіцієнт теплового випромінювання, безрозмірна величина; ν – частота хвилі випромінювання, $\nu \in \left[\nu_{i1}, \nu_{i2}\right], Гц$; k – стала Больцмана $\left(1{,}3805*10^{-23}\ Вт*с*K^{-1}\right)$; T – термодинамічна температура фізичного тіла, K.

Складність розв'язання рівняння (1)

відносно невідомої T обумовлюється тим, що підінтегральний вираз представлений як добуток ядра інтегрального рівняння $r(\nu,\mathrm{T}) = \nu^3 * \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)^{-1}$ та функції $\varepsilon(\nu)$, які в загальному випадку не зводяться до множини функцій з визначеною первісною. За таких умов точного аналітичного розв'язку (1) не існує. Задача в такій постановці представляє собою типову зворотну задачу – за значеннями спектральної щільності енергетичної світності фізичного тіла $\Re(\nu,\mathrm{T})$, що спостерігається, необхідно визначити значення термодинамічної температури T. Дана задача зводиться до класу некоректної та набуває вигляду інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Методи вирішення некоректних задач інтенсивно розвивалися у 60-х роках XX століття Тихоновим А.М., Лаврентьєвим М.М. , Арсеніним В.Я. та ін. Зокрема школою академіка Тихонова А.М. розроблено методологію розв'язання некоректних задач з використанням чисельних методів – методу підбору рішення, методу регуляризації тощо [2, 3]. При пошуку рішення на основі регуляризуючих алгоритмів виникає проблема знаходження оптимального значення параметра регуляризації, від якого у значній мірі, залежить точність результату [2]. Ряд питань присвячених відновленню сигналів у спектрометрії висвітлюється у роботі [4]. Наведені переважно чисельні методи розв'язання некоректно поставлених задач виключають можливості аналітичного дослідження задач синтезу гіперспектральних систем.

Постановка завдання та мета статті

Нехай дано:

N – кількість каналів гіперспектральної системи;

$\Re(\nu,\mathrm{T}) = \{\Re(\nu,\mathrm{T})_1,\ldots,\Re(\nu,\mathrm{T})_N\}$ – значення спектральної щільності енергетичної світності для кожного каналу спостереження, $i = \overline{1\ldots N}$;

$\nu = \left|\nu_{i1}\ \nu_{i2};\ldots;\nu_{N1}\ \nu_{N2}\right|^{\mathrm{T}}$ – матриця каналів спостереження;

Необхідно отримати аналітичний вираз для визначення термодинамічної температури T із (1).

Виклад основного матеріалу

Розв'язання рівняння (1) відносно шуканої величини T є досить складним. Сучасні аналітичні методи математичної статистики, факторного аналізу та регресійного аналізу дозволяють реалізувати лише числові моделі, які не піддаються аналітичному дослідженню і не завжди приводять до правильних результатів.

Для зменшення множини області рішень шуканого параметру та уникнення труднощів, пов'язаних із некоректністю зворотної задачі доцільно: 1) апріорно довизначити ряд вихідних даних; 2) звести складну задачу до більш простої, вирішення якої можна виконати на звичайних засобах обчислювальної техніки [4, 5] шляхом приведення інтегро-диференціального рівняння (1) до простішого виду із меншою кількістю вихідних параметрів.

Формалізація апріорних відомостей для одного гіперспектрального знімку набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{T}}{d\nu} = const; \\ \mathrm{T} > 0; \\ \varepsilon(\nu) = const < 1\ \forall\ \nu \in \left[\nu_{i1}, \nu_{i2}\right]. \end{cases} \tag{2}$$

Реалізація другого положення вимагає застосування більш складного математичного апарату. Таким апаратом оберемо сучасний математичний апарат диференціальних перетворень академіка Г.Є. Пухова.

Диференціальні перетворення – новий операційний метод, який на відміну від відомих інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є, заснований на переведенні оригіналів у область зображень за допомогою операції диференціювання. При математичному моделюванні фізичних процесів, що описуються інтегральними рівняннями, диференціальні перетворення дозволяють замінити операції інтегрування і диференціювання еквівалентними алгебраїчними операціями як в чисельному, так і в аналітичному вигляді, що значно спрощує отримання результату.

Диференціальними тейлорівськими (ДТ) перетвореннями називаються функціональні перетворення вигляду [5]

$$X(k)=\underline{x}(k)=\frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(\nu)}{d\nu^k}\right]_{\nu=0} \doteq \qquad (3)$$

$$\doteq x(\nu)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{\nu}{H}\right)^k X(k),$$

де $x(\nu)$ – оригінал, що являє собою безперервну, що диференціюється нескінченне число разів і обмежену разом із всіма своїми похідними, функцію дійсного аргументу ν; $X(k)=\underline{x}(k)$ – рівноцінні позначення диференціального зображення оригіналу, що представляє дискретну (гратчасту) функцію цілочисельного аргументу k =: 0, 1, 2, ..; H – масштабна постійна, яка має розмірність аргументу ν і часто дорівнює відрізку $0 \le \nu \le H$, на якому розглядається функція $x(\nu)$; $\doteq$ – символ відповідності між оригіналом $x(\nu)$ і його диференціальним зображенням $X(k)=\underline{x}(k)$.

У перетвореннях (3) зліва від символу $\doteq$ стоїть пряме перетворення, що дозволяє за оригіналом $x(\nu)$ знайти зображення $X(k)$, а праворуч – зворотне перетворення, що дозволяє за зображенням $X(k)$ отримати оригінал $x(\nu)$ у формі степеневого ряду, який є ні чим іншим, як інакше записаним рядом Тейлора з центром у точці $\nu = 0$. Диференціальні зображення $X(k)$ називаються диференціальними T-спектрами, а значення T-функції при конкретних значеннях аргументу k називаються дискретами. Обмеження за кількістю дискрет отримуваного в операторній формі диференціального спектру впливає на оперативність і точність розрахунків.

Випадок 1. Нехай виконується умова:

$$\begin{cases} e^{h\nu/kT} >> 1\,; \\ \nu/T > 1*10^{11} \quad Гц*K^{-1}\,; \\ \varepsilon(\nu)=1\,, \end{cases} \qquad (4)$$

тоді рівняння (1) набуває вигляду

$$\Re(\nu,T)_i = 2\pi hc^{-2}\int_{\nu_{i1}}^{\nu_{i2}} \nu^3 * \left(e^{\frac{h\nu}{kT}}\right)^{-1} d\nu\,. \qquad (5)$$

Приймемо, що

$$\begin{cases} x(\nu)=\nu^3\,; \\ y(\nu)=exp\left(h\nu/kT\right); \\ z(\nu)=\dfrac{x(\nu)}{y(\nu)}\,. \end{cases} \qquad (6)$$

Переведемо $x(\nu)$ та $y(\nu)$ (6) в область ДТ-зображень, отримаємо:

$$X(k)=H^m\,ъ(k-m)=\begin{cases} H^m, & k=m; \\ 0, & k \ne m; \end{cases} \qquad (7)$$

$$Y(k)=\left(\frac{h\,H}{k\,T}\right)^k * \frac{1}{k!}\,.$$

Відповідно дискрети матимуть вигляд:

$$X(k=0.2)=0,\ X(3)=H^3,\ X(k \ge 4)=0;$$

$$Y(0)=1;\ Y(1)=\frac{h\,H}{k\,T};\ Y(2)=\frac{1}{2}\left(\frac{h\,H}{k\,T}\right)^2,\dots. \qquad (8)$$

Скориставшись властивістю ділення зображень [5]

$$Z(k)=\frac{X(k)}{Y(k)}=\frac{X(k)-\sum_{l=1}^{l=k} Z(k-l)*Y(l)}{Y(0)}\,, \qquad (9)$$

послідовно отримаємо дискрети $Z(k)$:

$$Z(0)=Z(1)=Z(2)=0,\quad Z(3)=H^3,$$

$$Z(4)=-H^4*\frac{h}{k\,T},\ \dots\ . \qquad (10)$$

Визначений інтеграл функції $\Re(\nu,T)$, що лежить в межах від ν_{i1} до ν_{i2} за її дискретами $Z(k)$ в області зображень (10) знайдемо за допомогою виразу [4]

$$\Re(\nu, T) =$$

$$= 2\pi h c^{-2} \int\limits_{\nu_{i1}}^{\nu_{i2}} \nu^3 * \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)\right)^{-1} d\nu = \quad (11)$$

$$= 2\pi h c^{-2} \left(\sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{\nu_{i2}^{k+1} - \nu_{i1}^{k+1}}{k+1} \right) * \frac{Z(k)}{H^k} \right).$$

Спектральна щільність енергетичної світності (5) у каналі спостереження визначається через дискрети диференціального спектра (11) як:

$$\Re(\nu,T) \approx 2\pi h c^{-2} \left(\frac{\nu_{i2}^4 - \nu_{i1}^4}{4} - \frac{\nu_{i2}^5 - \nu_{i1}^5}{5} * \left(\frac{h}{kT}\right) + \dots \right).$$

Обмежившись другим доданком можна визначити шукане значення термодинамічної температури T

$$T = \frac{h}{5k} \left(\frac{\nu_{i2}^5 - \nu_{i1}^5}{\frac{\nu_{i2}^4 - \nu_{i1}^4}{4} - \frac{\Re(\nu, T) c^2}{2\pi h}} \right). \quad (12)$$

Випадок 2. Нехай виконується умова

$$\begin{cases} \dfrac{\nu}{T} < 3{,}85 * 10^8 \quad Гц * K^{-1}; \\ \varepsilon(\nu) = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Розкладемо у ряд знаменник ядра інтегрального рівняння (5):

$$e^{h\nu / kT} - 1 = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \frac{1}{2!} * \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 + \dots - 1$$

та обмежимось другим членом ряду перепишемо його у наступному вигляді

$$\Re(\nu, T)_i = 2\pi k T c^{-2} \int\limits_{\nu_{i1}}^{\nu_{i2}} \nu^2 d\nu . \quad (14)$$

В області ДТ-зображень ядро рівняння набуде вигляду

$$X(k) = H^m ъ(k-m) = \begin{cases} H^m, & k = m; \\ 0, & k \neq m. \end{cases} \quad (15)$$

Відповідні дискрети матимуть вигляд

$$X(k = 0..1) = 0,\ X(2) = H^2,\ X(k \geq 3) = 0. \quad (16)$$

Значення визначеного інтегралу $\Re(\nu, T)$ за дискретами (16) набуває вигляду

$$\Re(\nu, T) = 2\pi k T c^{-2} \left(\frac{\nu_{i2}^3 - \nu_{i1}^3}{3} \right), \quad (17)$$

звідки шуканий параметр

$$T = \frac{3c^2\, \Re(\nu, T)}{2\pi k \left(\nu_{i2}^3 - \nu_{i1}^3\right)} . \quad (18)$$

Висновки та перспективи подальших досліджень

Таким чином, при накладанні певних обмежень, формули (12) та (18) є аналітичними виразами для термодинамічних температур об'єктів космічного моніторингу. Отримані вирази у подальшому дають змогу не тільки спростити громіздкі чисельні розрахунки в задачах аналізу оптико-електронних систем, але і покращують можливості для аналітичних досліджень в задачах синтезу.

Список літератури

1. *Негода О. О., Толубко В. Б., Мосов С. П., Пічугін М. Ф.* Зарубіжні системи дистанційного зондування Землі з космосу подвійного призначення. Історія створення, принципи дії, застосування і перспективи розвитку. – К.: НАО України, 2005. – 271 с.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
3. *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник – К.: Либідь, 2003. – 504 с.
4. *Засядько А. А.* Дифференциально-тейлоровская модель задачи восстановления в спектроскопии // Электронное моделирование. – 2002. – Т.24. – №6. С. 97-105.
5. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наук. думка, 1986. – 157 с.