УДК 621.50

Антонов В. К., канд. техн. наук

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ С КРАТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ

Институт компьютерных технологий Национального авиационного университета

Функционал с кратным интегралом расширяет степени свободы для обеспечения заданного качества переходных процессов. Кратные функционалы соответствуют физическим законам.

Введение

В задаче аналитического конструирования регуляторов применяются функционалы с одним интегралом. Использование функционалов с кратным интегралом позволяет расширить множество интегральных многообразий замкнутой системы. Воспользуемся этим для улучшения качества переходных процессов. При положительно определенной подынтегральной функции двойной (или большей кратности) интеграл возрастает быстрее, поэтому его минимизация приводит к увеличению быстродействия.

Построение кратного уравнения Беллмана

Управляемая дифференциальная система описывается уравнением

$$\dot{X} = F(t, X, u). \tag{1}$$

Функционал назначим в виде двойного интеграла

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(t, X, u) dt^2, \tag{2}$$

или в виде, когда подынтегральное выражение зависит также и от функции Ляпунова и ее производной. Для системы (1) и функционала (2) согласно принципу оптимальности Беллмана имеем выражение для функции Ляпунова-Беллмана

$$V(t, X) = \min_u \int_t^\infty \int_t^\infty \omega(\tau, X, u) d\tau^2 . \tag{3}$$

Двойным дифференцированием (3) по нижнему пределу – времени получаем дифференциальные уравнения для функции Ляпунова

$$\dot{V} = -\int_t^\infty \omega(\tau, X, u) d\tau \text{, и } \ddot{V} = \omega(t, X, u). \tag{4}$$

Для построения уравнения Беллмана для функционала (2) с двойным интегралом выделим на оптимальной траектории две близкие точки времени t и $t + \Delta t$. Тогда согласно принципу оптимальности Беллмана имеем

$$V(t,X) = \min_u \left\{ \omega(t,X,u) \cdot \Delta t^2 + \int_{t+\Delta t}^\infty \int_{t+\Delta t}^\infty \omega(\tau,X,u) d\tau^2 \right\} =$$

$$= \min_u \left\{ \omega(t,X,u) \cdot \Delta t^2 + V(t+\Delta t, X+\Delta X) \right\} =$$

$$= \min_u \left\{ \omega(t,X,u) \cdot \Delta t^2 + V(t,X) + \frac{1}{2} \ddot{V}(t,X) \cdot \Delta t^2 \right\}. \tag{5}$$

В правой части уравнении (5) функцию Ляпунова-Беллмана можно вынести за скобки, поскольку она не зависит от управления, при этом она взаимно уничтожится с функцией в левой части, и, поделив затем выражение в правой части на Δt^2, получим

$$0 = \min_u \left\{ \omega(t, X, u) + \frac{1}{2} \ddot{V}(t, X) \right\}. \tag{6}$$

Определим в (6) вторую полную производную по времени от функции Ляпунова-Беллмана в силу системы (1) как производную в силу системы от производной в силу системы. Тогда, далее перенося в левую часть частную производную по времени от функции Ляпунова-Беллмана, получаем окончательную запись для уравнения Беллмана

$$-\frac{\partial^2 V(t,X)}{\partial t^2} = \min_u \left\{ 2\cdot\omega(t,X,u) + \frac{DF^T(t,X,u)}{\partial t}\frac{\partial V(t,X)}{DX} + \right.$$

$$+F^T(t,X,u)\frac{\partial^2 V(t,X)}{DX\partial t} + \frac{\partial^2 V(t,X)}{\partial t DX^T}F(t,X,u) +$$

$$+F^T(t,X,u)\frac{DF^T(t,X,u)}{DX}\frac{\partial V(t,X)}{DX} +$$

$$\left. + F^T(t,X,u)\frac{\partial^2 V(t,X)}{DXDX^T}F(t,X,u) \right\}. \qquad (7)$$

В уравнении (7) все члены умножены на 2 для сокращения записи. Полученное уравнение имеет решением функцию Ляпунова-Беллмана, через которую выражается искомое управление.

Случай интегралов разной кратности

Естественным продолжением построения является рассмотрение функционалов, содержащих одновременно интегралы разной кратности. При этом, вводя эти интегралы в функционал например в виде суммы с весовыми коэффициентами (возможна и любая другая конструкция, например содержащая степени, произведения и частные, нелинейные функции с интегралами, дифференциальные уравнения настройки для функционала и его компонент), следует исходить из целесообразности, определяемой в предметной области исследования. Изменение цели в процессе ее достижения не является неестественным, и может быть результатом развития динамического процесса. Примером являются задачи стабилизации при наличии больших начальных отклонений. При больших отклонениях требуется быстрота их устранения, но по мере уменьшения отклонений приоритет изменяется, требуется без колебательности стабилизировать траекторию. Практическое решение подобных задач приводит к регуляторам с переменной структурой. Цель движения зависит от состояния объекта управления, что характерно для задач самоорганизации.

Рассмотрим неоднородный функционал, содержащий сумму интегралов разной кратности, – по аналогии с ПИ–регуляторами (И2И – функционал).

$$J = \int_0^\infty \omega_1(t,X,u)dt + \int_0^\infty\int_0^\infty \omega_2(t,X,u)dt^2 \,. \quad (8)$$

Наличие интегралов разной кратности приводит к введению производной дробного порядка для описания поведения функции Ляпунова-Беллмана. В случае однородного по кратности интеграла функционала порядок дифференциального уравнения для функции Ляпунова-Беллмана равен кратности интеграла. Функции минимального значения слагаемых в функционале не совпадают. Имеем ситуацию, когда необходимо с помощью одного ряда Тейлора вычислить приращение одной функции минимального значения суммы двух разных интегралов. Функции минимального значения каждого интеграла по отдельности различны. Выходом является усреднение по порядку производной. Приходим к необходимости дробной производной. Ее определение дадим исходя из интерполяционных соображений. Возможны производные комплексного порядка. Возможно применение сплайнов, методов функционального анализа Двухмерную систему координат для функции одной переменной дополним третьей координатой значения порядка производной. Целые отрицательные значения порядка соответствуют интегралам, нулевое значение – самой функции, положительные значения соответствуют производным. Применяя теорему о среднем, интерполированием по третьей координате порядка получаем дробные производные и интегралы. Их можно определить в силу заданной системы дифференциальных уравнений. По аналогии с (6) получаем уравнение Беллмана с дробной порядка r частной производной функции Беллмана, определенной в силу системы (1) – символ Σ.

$$0=\min_{u,r}\left\{\omega_1+\omega_2+\frac{1}{r!}\frac{d^rV}{dt^r}\Big|_\Sigma\right\}. \qquad (9)$$

Линейное интерполяционное приближение для дробной производной имеет вид

$$\frac{d^rV}{dt^r}\Big|_\Sigma=\frac{dV}{dt}\Big|_\Sigma+\frac{\dfrac{d^2V}{dt^2}\Big|_\Sigma-\dfrac{dV}{dt}\Big|_\Sigma}{2-1}\cdot(r-1),$$
$$1<r<2. \quad (10)$$

Возможны интегралы более высокой кратности. Возможны системы дифференциальных уравнений дробного порядка, например

$$\frac{d^{X_2}X_1(t)}{dt^{X_2}}=f_1(t,X_1,X_2);$$
$$\frac{d^{X_1}X_2(t)}{dt^{X_1}}=f_2(t,X_1,X_2).$$

Существует их связь с эквивалентными системами целого порядка.

Связь с физическими законами

Вариационные принципы механики являются обобщениями физических законов. Они не столько помогают находить новые законы, сколько указывают подобие известных. Они не измеряются и не идентифицируются, но угадываются, и их можно считать законами или ограничениями построения законов природы. Существуют ли принципы построения принципов, т.е. обобщения более высокого уровня?

Рассмотрим пример второго закона Ньютона. Для этого используем функционалы с интегралами разной кратности. Пусть «дифференциальным объектом управления» является уравнение для скорости.

$$\dot V=u\ . \qquad (11)$$

Решение мы уже знаем. В правой части (11) «управление» u равно отношению силы F к массе m. Определим его формально, построим этот закон из «деталей» принципа оптимальности.

Функционал назначим в виде одинарного интеграла от силы.

$$I=\int_0^\infty F dt\ . \qquad (12)$$

Функцию Ляпунова-Беллмана S назначим в виде отрицательного импульса

$$S=-mV\ . \qquad 13)$$

Из уравнения Беллмана для функционала с одинарным интегралом (12)

$$\min_u\left\{F-\frac{\partial}{\partial V}(mV)\cdot u\right\}=0 \qquad (14)$$

находим «оптимальное управление»

$$u=\frac{F}{m}, \qquad (15)$$

и, «замыкая им» – подставляя в систему (11), получаем формулу второго закона Ньютона.

Назначим функционал в виде двойного интеграла

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty Fudt^2\ , \qquad (16)$$

а функцию Ляпунова-Беллмана определим как кинетическую энергию с отрицательным знаком

$$S=-\frac{mV^2}{2}\ . \qquad (17)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\Big|_\Sigma\right)\Big|_\Sigma=\frac{\partial}{\partial V}\left(-mVu\right)\Big|_\Sigma=-mu^2, \quad (18)$$

и согласно (6)

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} Fu - \frac{1}{2} mu^2 \right\} = 0 \;. \qquad (19)$$

Из (19) находим

$$u_1 = 0\,, \qquad u_2 = \frac{F}{m}\;. \qquad (20)$$

Решения (20) соответствуют первому и второму законам Ньютона.

При решении уравнений (14) и (19) мы сразу находим «управление», поскольку функция Ляпунова-Беллмана известна.

Таким образом, кратные функционалы имеют не только чисто техническое приложение, но и физический смысл.

Построение регуляторов для линейных систем

Рассмотрим задачу аналитического конструирования стабилизирующего регулятора для линейного объекта

$$\dot{X} = AX + Bu \;. \qquad (21)$$

Назначим положительно определенную квадратичную функцию Ляпунова-Беллмана

$$V = X^T QX \;. \qquad (22)$$

Функционал зададим в виде

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty (X^T PX + \dot{X}^T G\dot{X} + u^T Ru + c_1\dot{V} + c_2 V)dt^2 \quad (23)$$

где c_1 и c_2 – числа, определяемые из условия устойчивости однородной части уравнения

$$\ddot{V} - c_1\dot{V} - c_2 V = X^T PX + \dot{X}^T G\dot{X} + u^T Ru\,, \quad (24)$$

имеющей отрицательные действительные собственные числа. При нулевой правой части (24) определяет собственное (не вызванное стандартной подынтегральной частью функционала (23)) изменение функции V. Этим достигается заданное быстродействие.

Обозначим

$$\dot{X} = AX + Bu = F;\; \omega = X^T PX + \dot{X}^T G\dot{X} + u^T Ru. \quad (25)$$

Тогда уравнение (7) имеет вид

$$0 = \min_u \Bigg\{ \omega + c_2 V + c_1 F^T \frac{\partial V}{DX} + c_1 \frac{\partial V}{DX^T} F + \left(F^T \frac{DF^T}{DX} + \dot{u}^T \frac{DF^T}{Du} \right) \cdot \frac{\partial V}{DX} + \qquad (26)$$

$$+ \frac{\partial V}{DX^T} \cdot \left(\frac{DF}{DX^T} F + \frac{DF}{Du^T} \dot{u} \right) + F^T \frac{\partial^2 V}{DXDX^T} F \Bigg\}.$$

Рассмотрим отдельно слагаемые в (26):

$$\omega = X^T PX + \dot{X}^T G\dot{X} + u^T Ru =$$

$$= X^T PX + X^T A^T GAX + u^T B^T GAX$$

$$+ X^T A^T GBu + u^T (B^T GB + R)u;$$

$$c_2 V = c_2 X^T QX; \qquad (27)$$

$$c_1\dot{V} = c_1\dot{X}^T QX + c_1 X^T Q\dot{X} =$$

$$= c_1 (X^T A^T QX + u^T B^T QX + X^T QAX + X^T QBu);$$

$$\ddot{V} = \ddot{X}^T QX + \dot{X}^T Q\dot{X} + \dot{X}^T Q\dot{X} + X^T Q\ddot{X} =$$

$$= \dot{u}^T B^T QX + X^T A^T A^T QX + u^T B^T A^T QX +$$

$$+ X^T QAAX + X^T QABu + X^T QB\dot{u} + 2X^T A^T QAX +$$

$$+ 2u^T B^T QAX + 2X^T A^T QBu + 2u^T B^T QBu$$

Подставляя выражения (27) в уравнение (26), и дифференцируя выражение в фигурных скобках по вектору управления u, находим управление

$$u=-(B^T GB+2B^T QB+R)^{-1}\times$$
$$\times(B^T GA+c_1 B^T Q+B^T A^T Q+2B^T QA)X=KX. \qquad (28)$$

В (28) K – обозначение матричного коэффициента усиления, содержащего подлежащую определению симметричную положительно определенную матрицу Q квадратичной формы V. Для ее определения подставим в уравнение Беллмана (26) управление (28) и выражения (27), и решим полученное уравнение относительно матрицы Q. Уравнение (26) содержит производную по времени от управления. Определим ее в силу системы (21)

$$\dot{u}=K\dot{X}=K(AX+Bu)=KAX+KBKX. \qquad (29)$$

Получаем замкнутую систему уравнений (25) – (29) для определения управления.

Численное решение

Система (25)-(29) решается градиентным способом. Строится целевая минимизируемая функция. Для нее задается асимптотически устойчивое вспомогательное дифференциальное уравнение. Уравнение настройки задается в виде дифференциального уравнения для искомой матрицы, правая часть которого определяется как произведение коэффициента пропорциональности на антиградиент целевой функции по искомой матрице. Вспомогательное уравнение и уравнение настройки могут иметь порядок выше первого. Коэффициент пропорциональности определяется из условия обращения в тождество вспомогательного уравнения на решениях уравнения настройки. Его численное интегрирование дает установившееся искомое решение. Начальные условия могут быть нулевыми или определенными из решения для одинарного функционала.

Этот вычислительный прием позволяет решать задачи параметрической идентификации регрессионным методом – сведением к асимптотическому решению линейного алгебраического уравнения относительно вектора искомых параметров по обновляющимся на траектории идентификации данным измерений коэффициентов уравнения.

Возможно построение фильтров Калмана для кратных функционалов, адаптивных методов идентификации динамических объектов, систем управления с эталонной моделью, обеспечивающих заданное качество в условиях возмущений.

Кратное уравнение Эйлера

Ищется экстремаль функционала

$$I=\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y'')dx^2\,. \qquad (30)$$

Все вычисления проведем по схеме Эйлера. Для нахождения условий экстремума требуется формула кратного интегрирования по частям. Она выводится подобно случаю одинарного интегрирования. Рассмотрим вторую производную от произведения двух функций

$$(VU)''_{x^2}=(V'_x U+VU'_x)'_x=V''_{x^2}U+2V'_x U'_x+VU''_{x^2}. \qquad (31)$$

Дважды проинтегрируем (31).

$$\iint\frac{d^2(VU)}{dx^2}dx^2=VU=$$
$$=\iint U\frac{d^2V}{dx^2}dx^2+2\iint\frac{dV}{dx}\frac{dU}{dx}dx^2+\iint V\frac{d^2U}{dx^2}dx^2. \qquad (32)$$

Получаем формулу двойного интегрирования по частям

$$\iint Vd^2U=UV-\iint Ud^2V-2\iint dUdV. \qquad (33)$$

Для нахождения экстремалей функционалов более высокой кратности подобным образом выводятся формулы интегрирования по частям соответствующей кратности.

Рассмотрим вариацию функционала (30)

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x,y,y'')dx^2 - \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y'')dx^2 =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x,y+\delta y,y''+\delta y'')dx^2 + \quad (34)$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} [F(x,y+\delta y,y''+\delta y'') - F(x,y,y'')]dx^2 .$$

Член во второй строке (34) равен нулю ввиду малости вариации δx_1^2:

$$\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1}\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x,y+\delta y,y''+\delta y'')dx^2 =$$

$$(35)$$

$$= F(x,y,y'')\Big|_{x_1} \cdot \delta x_1^2 = 0.$$

Член в третьей строке (34) преобразуем. В нем первый член разложим в ряд Тейлора по вторым степеням вариаций экстремали δy и $\delta y''$:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} [F(x,y+\delta y,y''+\delta y'') - F(x,y,y'')]dx^2 =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} [F(x,y,y'') + \frac{\partial^2 F(x,y,y'')}{2\partial y^2}\delta y^2 +$$

$$(36)$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y,y'')}{2\partial y''^2}\delta y''^2 - F(x,y,y'')]dx^2 .$$

В (36) под интегралом первый и последний члены взаимно уничтожаются. Третий член проинтегрируем по частям по формуле (32), обозначая

$$\frac{\partial^2 F(x,y,y'')}{2\partial y''^2} = V; \quad \delta y''^2 dx^2 = d^2 U . \quad (37)$$

Тогда при условии независимости порядка выполнения операций варьирования и дифференцирования выражение для него принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 F(x,y,y'')}{2\partial y''^2}\delta y''^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x,y,y'')}{\partial y''}\cdot \delta y^2 \Big|_{x_0}^{x_1} -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial^2 F(x,y,y'')}{2\partial y''^2}\delta y^2 dx^2 - \quad (38)$$

$$- \int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F(x,y,y'')}{\partial y''^2}\cdot\frac{d}{dx}\delta y^2 dx^2 .$$

Первый член в (38) равен нулю при условии закрепления концов экстремали. Третий член в (38) также равен нулю, поскольку вариация экстремали не зависит от независимой переменной. В итоге условие равенства нулю вариации функционала принимает вид

$$\frac{\partial^2 F(x,y,y'')}{\partial y^2} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial^2 F(x,y,y'')}{\partial y''^2} = 0. \quad (39)$$

Уравнение (39) справедливо для всех точек экстремали кроме граничных, в которых вариации равны нулю. Его можно назвать кратным уравнением Эйлера. Из его вида следует правило записи условий экстремума для функционалов более высокой кратности. В случае применения неоднородного функционала все особенности, которые имеют место при выводе для этого случая уравнения Беллмана, сохраняются.