

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМЫ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ МОБИЛЬНЫХ СТАНЦИЙ

Институт компьютерных технологий Национального авиационного университета

*Выведены выражения для расчета потенциальной помехоустойчивости и асимптотической точности разностно-дальномерного измерителя координат мобильной станции при неограниченном увеличении «большого параметра», в роли которого выступает отношение сигнал/помеха. Даны оценки скорости сходимости к асимптотическим величинам. Приведены результаты расчетов.*

### Введение

В работе [1] синтезирован оптимальный обнаружитель-измеритель системы определения местоположения мобильной станции (телефона, профессионального измерительного терминала и т.п.). Отмечено, что наиболее приемлемым является только способ расчетного определения линий или поверхностей положения и вычисления координат объекта относительно известных ориентиров. Остальные способы невозможно использовать без полного изменения как сетевой инфраструктуры, так и конструкции и технических характеристик мобильной станции (МС).

Основным требованием к системе определения местоположения МС является обеспечение требуемой точности. Для условий плотной городской застройки, лесопарковой зоны среднеквадратическая ошибка измерения не должна превышать единицы, в крайнем случае – несколько десятков метров, иначе визуальное обнаружение объекта – носителя МС будет просто невозможным. Если координаты определяются со слишком большой ошибкой, то при выходе в поисковой группы в точку ожидаемого расположения объекта он может, например, находиться за зданием или густой растительностью и не быть виден. В работе [2] работе проанализированы некоторые статистические характеристики измерителя. В данной работе приведены результаты оценивания – зависимости ошибок измерения от длительности интервала наблюдения и от отношения сигнал/помеха на

входах приемников базовых станций. Кроме того, выведены выражения для оценки потенциальных характеристик обнаружения и точности измерения.

### Алгоритм приема и обработки сигнала

Для решения задачи определения местоположения предложено использовать разностно-дальномерный метод с несколькими (минимум с тремя) базовыми станциями (БС). Та БС, в зоне обслуживания которой в данный момент находится МС, является ведущей. Мощность ее сигнала на входе приемника МС является максимальной. Другие две БС с наибольшими уровнями сигнала являются ведомыми. Обозначим ведущую БС как БС<sub>1</sub>, а ведомые – БС<sub>2</sub> и БС<sub>3</sub>.

В системе измеряются  $\tau_i, i = \overline{1,3}$  – задержки сигналов, принимаемых ведущей и ведомыми базовыми станциями. Измерения задержек сигналов на БС проводятся или поочередно: БС<sub>1</sub>, БС<sub>2</sub>, БС<sub>3</sub>, БС<sub>1</sub>, ... , или с перемежением: БС<sub>1</sub>, БС<sub>2</sub>, БС<sub>1</sub>, БС<sub>3</sub>, БС<sub>1</sub>, ... . По измеренным задержкам вычисляются разности дальностей  $\Delta r_{12} = (\tau_2 - \tau_1)/c$  и  $\Delta r_{13} = (\tau_3 - \tau_1)/c$ . Линии равных разностей дальностей на плоской поверхности представляют собой гиперболы. Координаты объекта находятся в точке пересечения двух гипербол.

Для передачи информации в системах мобильной связи используются сигналы с фазоразностной модуляцией типа GMSK, QPSK, 8PSK и др. В качестве оптимального обнаружителя таких сигналов можно использовать когерентные или не-



когерентные демодуляторы [2]. При достаточно больших отношениях сигнал/(помехи плюс шум) вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги в обоих случаях практически (в рамках статистической погрешности) одинаковы.

Сигнал с выхода обнаружителя подается на измеритель временной задержки.

С учетом изменения состояния объекта – носителя МС – полезный сигнал  $S_{\Pi}(t, \bar{X})$  является функцией времени и некоторого вектора состояния  $\bar{X}^T = [\Delta\tau_{dl}, W_1, a_1, \Delta r_i, \Delta W_i, \Delta a_i, \Delta\phi_{ik}]$ , компоненты которого следующие:  $\Delta\tau_{dl}, l = \overline{1,3}$  – изменение задержки сигнала на дальности  $r_l$ , обусловленное перемещением объекта – носителя МС, условиями приема и т.д.;  $W_i$  и  $a_i$  – скорость и ускорение объекта относительно БС<sub>1</sub> соответственно;  $\Delta r_i = r_i - r_1$  – разность дальностей от МС до БС<sub>i</sub> и до БС<sub>1</sub>,  $i = \overline{2,3}$ ;  $\Delta W_i$  и  $\Delta a_i$  – разности скоростей и ускорений объекта относительно БС<sub>1</sub> и относительно БС<sub>i</sub> соответственно;  $\Delta\phi_{ik} = \delta\phi - \delta\phi$  – разность фазовых ошибок сигналов БС<sub>i</sub> и БС<sub>1</sub>.

Справедливы следующие соотношения для вектора  $\bar{X} = \bar{X}(t)$  [1]:

$$\frac{d}{dt} \bar{X}(t) = 0 \quad \text{при}$$

$$t_k \leq t \leq t_k + \Delta T; \quad (1)$$

$$\bar{X}(t = t_k) = \bar{X}_k;$$

$$\frac{d}{dt} \bar{X}(t) = F(t) \bar{X}(t) + G(t) \bar{V}_B(t) \quad \text{при}$$

$$t_k + \Delta T \leq t \leq t_{k+1}; \quad (2)$$

$$\bar{X}(t = t_k + \Delta T) = \bar{X}(t_k + \Delta T).$$

Здесь  $\bar{V}_B(t)$  – вектор формирующих белых гауссовских шумов с единичными интенсивностями и нулевыми математическими ожиданиями. Матрицы  $F(t)$  и  $G(t)$  содержат коэффициенты преобразования составляющих векторов  $\bar{X}(t)$  и  $\bar{V}_B(t)$ .

Теоретически обосновано [3-5], что при достаточно высокой апостериорной точности измерений можно аппроксимировать апостериорную плотность вероятности (АПВ) гауссовской в малой окрестности вокруг истинного значения измеряемого параметра. С использованием данного метода и был синтезирован измеритель разностей дальностей МС от БС [1]. На рис. 1 изображена обобщенная схема обнаружителя-измерителя.

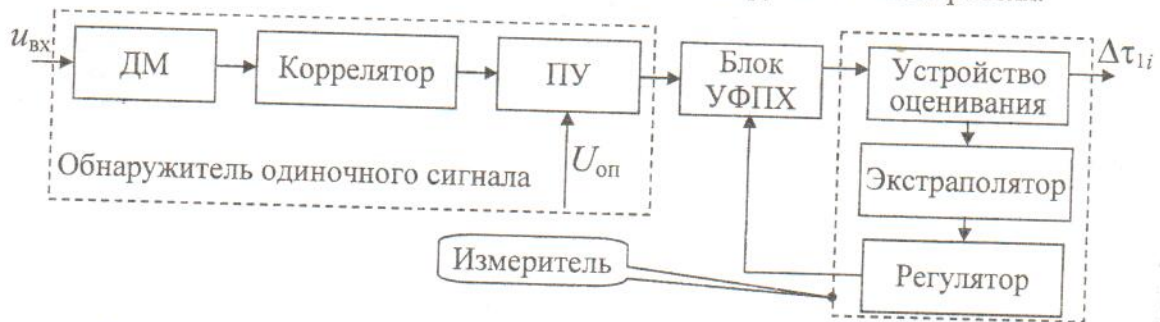


Рис. 1. Обнаружитель-измеритель задержек сигналов. УФПХ – устройство формирования пеленгационной характеристики; ДМ – демодулятор

### Оценка потенциальных характеристик измерителя

Как показано в [1], для оценки точности и помехоустойчивости измерителя необходимо решить уравнения для апостериорных дисперсий ошибок фильтрации, т.е. для диагональных элементов корреляционной матрицы  $K(t_k)$ :

$$K(t_k + \Delta T) = \left[ K^{-1}(t_k) + \Pi(\bar{X}) \Big|_{\bar{X}^*(t_k)} \right]^{-1};$$

$$K(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k + \Delta T) \cdot K(t_k + \Delta T) \times$$

$$\times \Phi^T(t_{k+1}, t_k + \Delta T) + K_d(t_{k+1}, t_k + \Delta T). \quad (3)$$

Здесь  $\Phi(*)$  – переходная матрица системы. Матрица  $K_d(*)$  находится путем ре-



шения уравнения типа уравнения Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_d(t, t_k + \Delta T) &= F(t) K_d(t, t_k + \Delta T) + \\ &+ K_d(t, t_k + \Delta T) F^T(t) + G(t) G^T(t); \\ K_d(t_0, t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В работе [1] получено выражение для оценки вектора  $\bar{X}(t)$  с по критерию максимума апостериорной плотности вероятности

$$X^*(t_k + \Delta) = X^*(t_k) + K(t_k) \Pi(\bar{X}), \quad t \leq t_{k+\Delta} \leq t_{k+1}, \quad (5)$$

где 
$$\Pi(\bar{X}) = \int_{t_k}^{t_k + \Delta T} \left[ \frac{\partial F(\tau, \bar{X})}{\partial \bar{X}} \right]^T dt. \quad (6)$$

Матрица  $\Pi(\bar{X})|_{\bar{X}^*(t_k)}$  находится из уравнения, аналогичного уравнению (6), где вместо истинного значения вектора  $\bar{X}(t_k)$  берется его текущая оценка  $\bar{X}^*(t_k)$ .

где  $q = 2E_c/N_{\Pi}$  – отношение энергии сигнала к усредненной в полосе приема спектральной плотности помех и шумов.

В практических задачах уравнения (3 – 4) можно решить только численными методами [3-5]. Для анализа синтезиро-

ванного алгоритма была использована стандартная вычислительная процедура – метод Рунге-Кутты четвертого порядка при следующих исходных данных:

– отношение энергии одиночного сигнала к спектральной плотности помех и шумов не менее 9,6 дБ;

– объект – носитель мобильной станции неподвижен, или движется прямолинейно и равномерно со скоростью 5 км/час, или совершает маневры (изменение направления движения на 180° или поворот с постоянной угловой скоростью по дуге радиусом 10 м);

– в качестве исходной корреляционной матрицы  $\|K(t=t_0)\|$  задавалась диагональная матрица. Элементы матрицы выбирались, исходя из общих характеристик сигналов в системе мобильной связи и реальных возможностей перемещения среднего человека – носителя МС.

Некоторые результаты оценки потенциальной точности разработанного устройства приведены на рис. 2-4. Рассмотрены зависимости относительных СКО измерений от длительности интервала наблюдения. Ошибки измерялись в долях от длительности элементарной посылки в пакете (в стандарте GSM она равна примерно 3,7 мкс). Для большей наглядности графики зависимостей СКО нарисованы с учетом знаков разностей истинного и измеренного значений координат объекта.

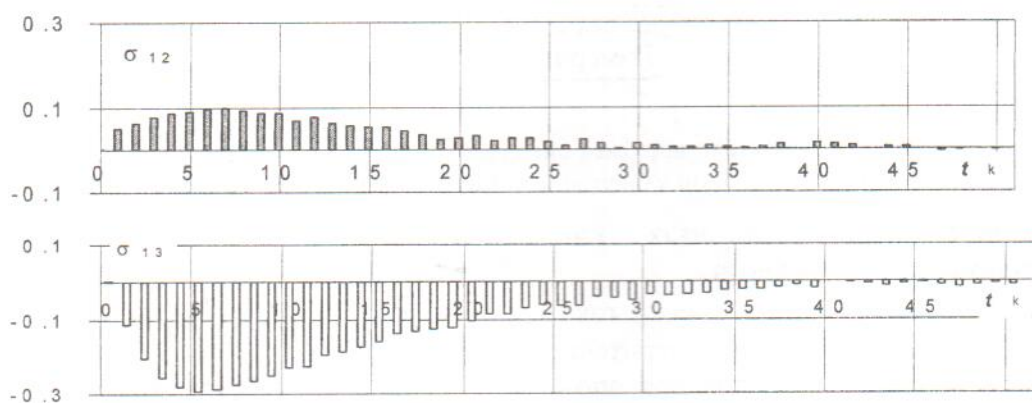


Рис. 2. Относительные СКО оценивания разностей дальностей БС<sub>1</sub> – БС<sub>2</sub> и БС<sub>1</sub> – БС<sub>3</sub>. Объект неподвижен или движется прямолинейно с постоянной скоростью

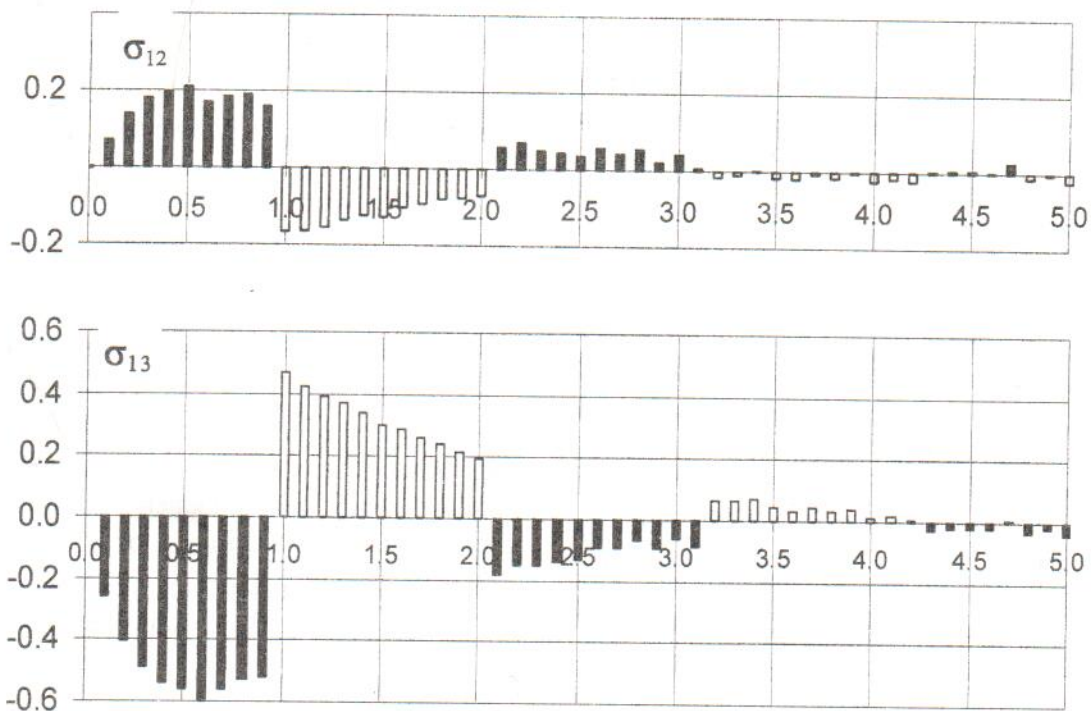


Рис. 3. Относительные СКО оценивания разностей дальностей  $BC_1 - BC_2$  и  $BC_1 - BC_3$ . Объект движется прямолинейно, регулярно меняя направление движения на противоположное

Скачкообразный характер изменения и смены знаков ошибок обусловлены

дискретностью поступления новой информации о положении объекта.

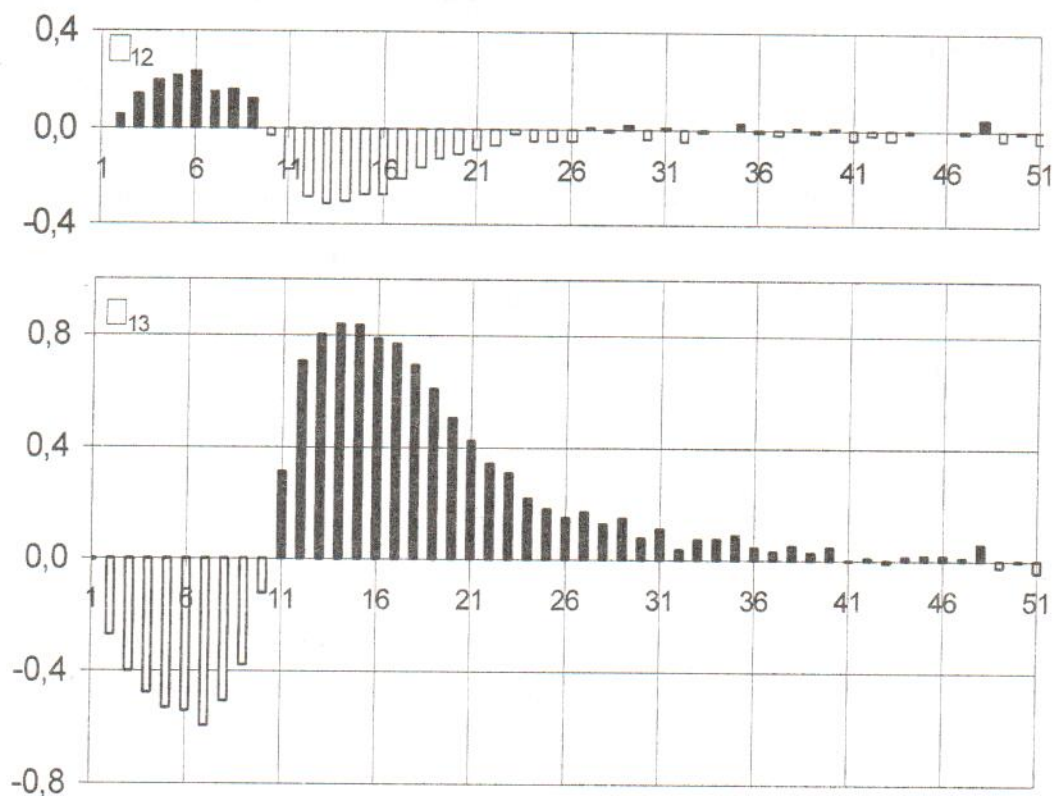


Рис. 4. Относительные СКО оценивания разностей дальностей  $BC_1 - BC_2$  и  $BC_1 - BC_3$ . Объект движется с постоянной угловой скоростью по дуге радиусом 10 м



Судя по полученным результатам, при достаточном объеме статистики средние значения ошибок оценивания асимптотически приближаются нулю независимо от характера движения объекта. Это достигается не только благодаря сглаживанию текущих результатов измерения, но и благодаря экстраполяции координат объекта на следующий цикл измерений. Экстраполятор как бы «приспосабливается» к характеру движения объекта и со временем все точнее предсказывает его будущее положение. Соответственно, может достигаться СКО измерений, равная 6...15 м. В установившемся режиме величина флуктуационной ошибки измерений зависит, в основном, от отношения сигнал/шум.

На рис. 5 изображены зависимости величины  $\sigma_{44} = k_{44}(t_k)/k_{44}(t_0)$ , характеризующей разность дальностей  $\Delta r_i$ , от относительной длительности интервала наблюдения, представляющей собой количество принятых сигналов. При достаточной длительности интервала наблюдения, как и следовало ожидать, влияние перемещений объекта сглаживается.

Производились также расчеты зависимости установившихся значений ошибок  $\sigma_{44}|_{t \rightarrow \infty}$  от отношения сигнал/(помехи плюс шум). Некоторые результаты расчетов приведены на рис. 6. В среднем при увеличении  $q$  от 10 до 17 дБ величина ошибки уменьшается на 50 % ... 75 % в зависимости от характера движения объекта.

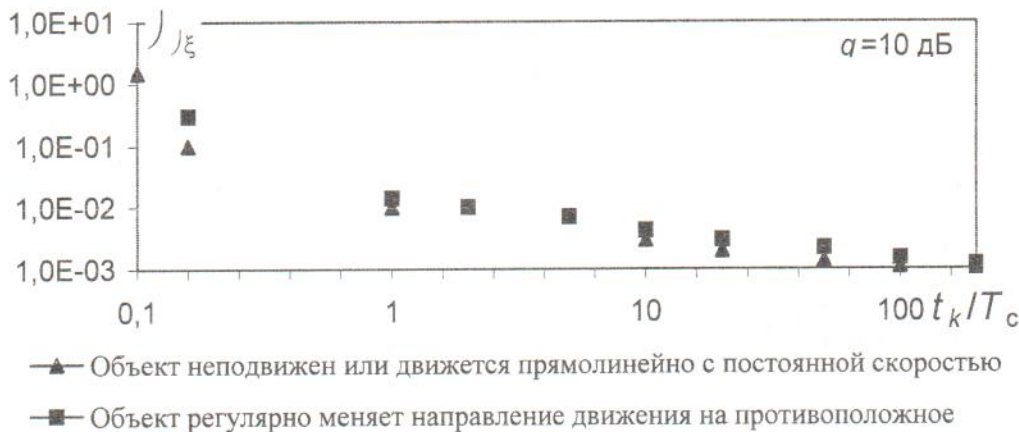


Рис. 5. Зависимости величины  $\sigma_{44}$ , характеризующей разность дальностей  $\Delta r_i$ , от относительной длительности интервала наблюдения

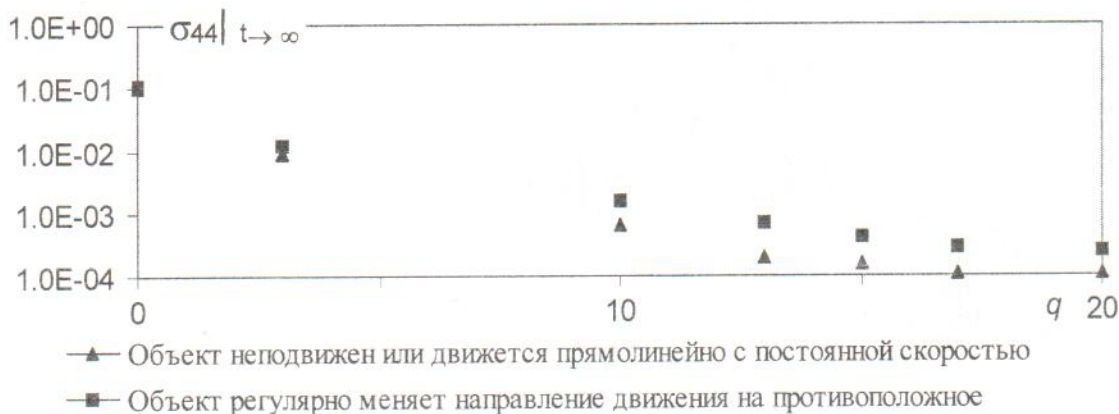


Рис. 6. Результаты расчетов зависимости установившихся значений ошибок  $\sigma_{44}|_{t \rightarrow \infty}$  от отношения сигнал/(помехи плюс шум)

В заключение приведем некоторые соображения по асимптотическим харак-

теристикам измерителя. В соответствии с [4] введем некий «большой параметр»,

В заключение приведем некоторые соображения по асимптотическим характеристикам измерителя. В соответствии с [4] введем некий «большой параметр», при наличии которого обеспечивается нечувствительность результатов к изменениям статистики сигналов и помех и к отклонениям параметров измерителя от расчетных. В рассматриваемой задаче в качестве такого параметра логично использовать отношение сигнал/(помехи плюс шум)  $q$ . Рассмотрим уравнение (2) при

$$N_p = q \rightarrow \infty. \quad (7)$$

При выполнении условия (7) и абсолютной интегрируемости матриц  $F(t)$  и  $G(t)$  влияние второго члена на решение становится пренебрежимо малым, и интеграл дифференциального уравнения (2) мажорируется экспонентой вида

$$C_0 + C_1 \exp(-F(t)), \quad (8)$$

где  $C_0$  и  $C_1$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Скорость сходимости решения (2) к (8) определяется размерностью параметра  $N_p$ . Поскольку для рассматриваемого случая  $N_p$  является энергетическим параметром, скорость сходимости при линейном увеличении  $N_p$  является, как минимум, сверхлинейной, а в потенциале – квадратичной.

## Выводы

В синтезированном измерителе удастся достичь приемлемой точности определения местоположения объекта при реальных отношениях сигнал/(помехи плюс шум). Вмешательство в инфраструктуру сети мобильной связи является минимальным, поскольку вся обработка может осуществляться в универсальной ЭВМ или цифровом процессоре вне зависимости от процессов организации собственно связи.

## Список литературы

1. Виноградов Н. А., Абу-Бакер Д. М. Синтез оптимального обнаружителя измерителя системы позиционирования мобильных станций // Зв'язок, № 4, 2006.
2. Виноградов Н. А., Абу-Бакер Д. М. Потенциальные статистические характеристики системы позиционирования мобильных станций // Зв'язок, № 5, 2006.
3. Окунев Ю.Б. Цифровая передача информации фазомодулированными сигналами. – М.: Радио и связь, 1991. – 296 с.
4. Стратонович Р. Л. Принципы адаптивного приема. – М.: Советское радио, 1973. – 144 с.
5. Стратонович Р. Л. Условные Марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. – М.: МГУ, 1966. – 319 с.
6. Ярлыков М. С. Статистическая теория радионавигации. – М.: Радио и связь, 1985. – 344 с.