УДК 519.651 (045)

Толбатов Ю. А., канд. техн. наук

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦІ В ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЯХ EXCEL

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету

У роботі розглянуто три методи обчислення власних значень та власних векторів матриці в оболонці електронних таблиць (ЕТ) Excel. Запропоновано метод знаходження власних значень матриці з використанням вбудованої математичної функції обчислення визначника МОПРЕД та програми «Поиск решения», а також чисельний метод виключення знайдених власних значень з характеристичного рівняння.

Приведення квадратичної функції до канонічної, знаходження власних частот та форм коливань механічних систем приводиться до знаходження власних значень та відповідних їм власних векторів матриць [1, 2].

Нехай задана квадратна матриця [3]

$$[\mathrm{A}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Число λ називається ***власним значенням*** (характеристичним числом) квадратної матриці порядку *n*, якщо можна знайти такий n-мірний ненульовий вектор $\vec{\mathrm{X}}$, що виконується умова:

$$[\mathrm{A}]\cdot\vec{X}=\lambda\cdot\vec{X}\ (1),\qquad \text{де}\qquad \vec{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Якщо λ власне число матриці [A], то всякий вектор-стовпець $\vec{\mathrm{X}}$, який задовольняє умову $[\mathrm{A}]\cdot\vec{X}=\lambda\cdot\vec{X}$, називається власним вектором матриці [A], який відповідає власному числу **λ**.

Матричне рівняння (1) рівнозначне системі *n* рівностей (2):

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=\lambda\cdot x_1, \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=\lambda\cdot x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\ldots+a_{nn}\cdot x_n=\lambda\cdot x_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Які можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1n}\cdot x_n=0, \\ a_{21}\cdot x_1+(a_{22}-\lambda)\cdot x_2+\ldots+a_{2n}\cdot x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)\cdot x_n=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Отримали однорідну систему лінійних рівнянь. Система лінійних однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0\cdot \qquad (4)$$

Отримане рівняння $\left|[\mathrm{A}]-\lambda\cdot[\mathrm{E}]\right|=0$ називається *характеристичним рівнянням* матриці [A]. Визначник (4) є многочленом *n*-ї степені відносно λ. Доведено: якщо матриця [A] симетрична і елементи матриці дійсні числа, то власні значення також дійсні числа.

Якщо власним векторам $\vec{X}$ і $\vec{Y}$ відповідають різні власні числа λ для симетричної матриці [A], то скалярний добуток цих вектор-стовпчиків дорівнює нулю.

$$(\vec{X}\ \vec{Y})=0.$$

Власні вектори квадратної матриці, які відповідають різним власним значенням – лінійно незалежні.

Приклад 1. Знайдемо власні значення і власні вектори матриці.

$$[\mathrm{A}]=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння матриці

$$\left|[A]-\lambda\cdot[E]\right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$ є власними значеннями матриці [A].

Знайдемо відповідно власні вектори, які належать знайденим власним значенням ($\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$).

Власний вектор, який належить власному значенню $\lambda_1=1$ є ненульовий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} (4-1)x_1+3x_2=0, \\ 2x_1+(3-1)x_2=0. \Rightarrow \quad 3x_1=-3x_2 \end{cases}.$$

Якщо x_2 надати значення 1, то $x_1=-1$.

Власному значенню $\lambda_1=1$ відповідає власний вектор

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Власному значенню $\lambda_2=6$ відповідає рівняння $x_1 = \dfrac{3}{2}x_2$, або при $x_2=1$ знаходимо власний вектор

$$\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Приклад 2. Знайдемо власні значення і власні вектори симетричної матриці.

$$[A] = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Симетрична матриця завжди має дійсні власні значення.

Запишемо характеристичне рівняння матриці. До останнього стовпчика визначника додамо перший помножений на (–1) і другий стовпчики, а потім винесемо за знак визначника загальний множник. У наступному визначнику останній рядок додамо до першого рядка і віднімемо від другого. Отриманий визначник розкладемо за елементами останнього стовпчика:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & \lambda-7 \\ -1 & 3-\lambda & 7-\lambda \\ 1 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(7-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (7-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(7-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\cdot(\lambda^2-8\lambda+4)=0$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = 7,\quad \lambda_2 = 2(2-\sqrt{3}),\quad \lambda_3 = 2(2+\sqrt{3})$ є власними значеннями матриці [A].

Для власного значення $\lambda_1=7$ знайдемо власний вектор із однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_2+x_3=0, \\ -x_1-4x_2+3x_3=0, \\ x_1+3x_2-2x_3=0. \end{cases}$$

Із першого рівняння знаходимо $x_2=x_3$, із другого або третього $x_2=-x_3$. Надавши x_3 значення 1, отримаємо

$$\vec{X}_I = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для власного значення $\lambda_3=2(2+\sqrt{3})$ знаходимо власний вектор із однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} (3-2\sqrt{3})x_1 - x_2 + .x_3 = 0, \\ -x_1 + (-1-2\sqrt{3})x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + (1-2\sqrt{3})x_3 = 0. \end{cases}$$

Склавши друге і третє рівняння, знайдемо $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}x_3$,

а із першого рівняння $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}x_3$.

Поклавши $x_3=1$, знайдемо власний вектор

$$\vec{X}_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Перевіримо твердження: власні вектори симетричної матриці, які відповідають різним власним значенням, – ортогональні:

$$(\vec{X}_I;\vec{X}_3) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot(-1) + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot 1 + 1 = 0.$$

Аналогічно можна показати, що виконуються умови $(\vec{X}_1;\vec{X}_2)=0$, $(\vec{X}_2;\vec{X}_3)=0$.

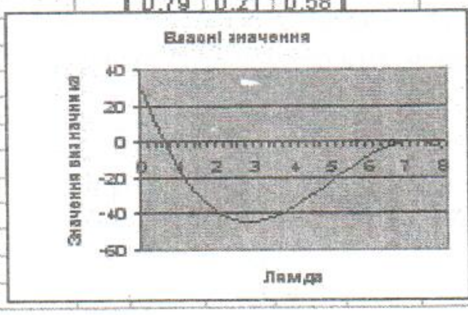
Розглянемо три способи знаходження власних значень та відповідних їм власних векторів засобами ЕТ *Excel*.

Перший спосіб полягає в попередній таблично-граничній оцінці кількості та розміщення власних значень матриці з наступним уточненням цих значень методом перерізуючих. Відповідні власні вектори знаходилися модифікованим методом Гауса з використанням можливостей складання в ЕТ *Excel* з відносними, мішаними та абсолютними посиланнями на комірки і послідуючим їх копіюванням.

Порядок виконання операцій: в діапазон комірок B2:D4 та F2:H4 вводимо значення елементів симетричної [А] та одиничної [Е] матриць (табл. 1).

Таблиця 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		Власні значення та власні вектори матриці (1-й спосіб)													
2		7	-1	1		1					0	-1	1		
3	[A]=	-1	3	3	[E]=		1			[A]-л*[E]=	-1	-4	3		
4		1	3	5				1			1	3	-2		
5		h=	0,2	=МОПРЕД($B$2:$D$4-B7*$F$2:$H$4)							=B2:D4-B42*F2:H4				
6		Лямда	D		Лямда	D		Лямда	D		Лямда	D			
7		0	28		0	28,00		4	-36		8	-4			
8		0,20	16,59		0,20	16,59		4,20	-33,49		8,20	-6,77			
9		0,40	6,34		0,49	2,04		6,87	-0,51		7,71	-1,26			
10		0,60	-2,82		0,53	0,19		6,91	-0,33		7,60	-0,57			
11		0,80	-10,91		0,54	0,00		6,98	-0,05		7,51	-0,15			
12		1,00	-18,00		0,54	0,00		7,00	-0,01		7,47	-0,03			
13		1,20	-24,13		0,54	0,00		7,00	0,00		7,46	0,00			
14		1,40	-29,34		0,54	0,00		7,00	0,00		7,46	0,00			
15		1,60	-33,[illegible]	=E8-(E8-E7)*F8/(F8-F7)					=B2:D4-E14*F2:H4			=B2:D4-H14*F2:H4			
16		1,80	-37,23		x1	x2	x3		x1	x2	x3		x1	x2	x3
17		2,00	-40,00		6,46	-1	1		0	-1	1		-0,46	-1	1
18		2,20	-42,05		-1	2,46	3		-1	-4	3		-1	-4,46	3
19		2,40	-43,42		1	3	4,46		1	3	-2		1	3	-2,46
20		2,60	-44,18		=E17/$E1	=F18-F$17*$E18/$E$17									
21		2,80	-44,35		x1	x2	x3		x1	x2	x3		x1	x2	x3
22		3,00	-44,00		1	-0,15	0,15		0,25	0	0,25		1	2,15	-2,15
23		3,20	-43,17		0	2,31	3,15		0,25	1	-0,75		0	-2,31	0,85
24		3,40	-41,90		0	3,15	4,31		0,25	0	0,25		0	0,85	-0,31
25		3,60	-40,26												
26		3,80	-38,27		x1	x2	x3		x1	x2	x3		x1	x2	x3
27		4,00	-36,00		1	0	0,37		1	0	1,00		1	0	-1,37
28		4,20	-33,49		0	1	1,37		0	1	-1,00		0	1	-0,37
29		4,40	-30,78		0	0	0,00		0	0	0,00		0	0	0,00
30		4,60	-27,94												
31		4,80	-24,99		Л1=	0,54	Норм		Л2=	7	Норм		Л3=	7,46	Норм
32		5,00	-22,00		x1=	-0,37	-0,21		x1=	-1	-0,58		x1=	1,37	0,79
33		5,20	-19,01		x2=	-1,37	-0,79		x2=	1	0,58		x2=	0,37	0,21
34		5,40	-16,06		x3=	1,00	0,58		x3=	1	0,58		x3=	1,00	0,58
35		5,60	-13,22		=МУМНОЖ(МУМНОЖ(K37:M39;B2:D4);F3							=МОБР(F37:H39)			
36		5,80	-10,51				Перевірка B=Qобр*A*Q								
37		6,00	-8,00			-0,21	-0,6	0,79			-0,21	-0,79	0,58		
38		6,20	-5,73		[Q]=	-0,79	0,58	0,21		[Q]обр=	-0,58	0,58	0,58		
39		6,40	-3,74			0,58	0,58	0,58			0,79	0,21	0,58		
40		6,60	-2,10												
41		6,80	-0,83			0,54	0,00	0,00							
42		7,00	0,00		[B]=	0,00	7,00	0,00							
43		7,20	0,35			0,00	0,00	7,46							
44		7,40	0,18												
45		7,60	-0,58												
46		7,80	-1,95			0,54	0,00	0,00							
47		8,00	-4,00		[B]=	0,00	7,00	0,00							
48						0,00	0,00	7,46							
49		MQ=	-1		=МОПРЕД(F37:H										



З кроком h=0,2 в діапазон комірок вводимо значення λ в межах від 0 до 8. Для цього в комірку B7 вводимо значення 0, а в комірку B8 – формулу =B2+C$5. Отриману формулу шляхом авто заповнення копіюємо в решту комірок, або вводимо в комірки B7, B8 відповідно значення 0 і 0,2, активізуємо ці комірки. Наводимо курсор на маленький прямокутник в правому нижньому куті активізованих комірок і після перетворення курсору в маленький жирний хрестик протягуємо курсор по необхідному діапазону комірок (авто заповнення комірок). В комірку C7 вводимо формулу знаходження значення характеристичного многочлена в точці, значення якої знаходиться в комірці B7. Значення характеристичного многочлена знаходиться з використанням вбудованої математичної функції МОПРЕД:

=МОПРЕД($B$2:$D$4-B7*$F$2:$H$4).

Оскільки адреси матриць ввели абсолютними, а адреса значення λ – відносна, то при копіюванні формули в решту комірок будемо знаходити $f(\lambda)$ у відповідних точках. Після автозаповнення формул дістанемо таблицю значень характеристичного многочлена (діапазон комірок B6:C47). На основі табличних значень, використовуючи майстер діаграм, будуємо графік характеристичного многочлена. Із графіка видно, що характеристичний многочлен має три дійсних кореня. Для обчислення коренів характеристичного многочлена (власних значень матриці [A]), скористаємося методом перерізуючи. Нагадаємо, що в методі Ньютона ітераційна формула має вигляд $\lambda_{n+1} = \lambda_n - \dfrac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)}$. Оскільки ми не знаємо вигляду функції і не можемо знайти значення похідної цієї функції, то похідну замінимо наближеною формулою:

$$f'(\lambda_n) \approx \frac{f(\lambda_n) - f(\lambda_{n-1})}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}.$$

Після підстановки в ітераційну формулу Ньютона наближеного значення похідної дістанемо ітераційну формулу методу перерізуючих:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{(\lambda_n - \lambda_{n-1}) f(\lambda_n)}{(f(\lambda_n) - f(\lambda_{n-1}))}.$$

Якщо значення x_0, x_1 помістити відповідно в комірки E7, E8, то, наприклад, $f(x_0)$, буде знаходитись в комірці F7 за формулою МОПРЕД ($B$2 : $D$4 –E7*$F$2:$H$4). Ітераційну формулу вводимо в комірку E9:

=E8–(E8–E7)*F8/(F8–F7).

Отриману формулу копіюємо по стовпчику вниз до тих пір, поки в сусідніх комірках не співпаде необхідна кількість знаків. Тобто, поки не виконається умова $\left|f(\lambda_{n+1}) - f(\lambda_n\right| \le \varepsilon$. .

Для знаходження інших власних значень матриці копіюємо побудовану таблицю в діапазон комірок H6:I14 та K6:L14 і міняємо початкові значення в перших двох комірках відповідно із значеннями графіка характеристичної функції.

Для знаходження власних векторів використовуємо модифікований метод Гаусса розв'язання системи лінійних рівнянь [3]. В комірці E14 знаходиться перше власне значення матриці [A]. Складаємо таблицю коефіцієнтів однорідної системи лінійних рівнянь, що відповідають першому власному значенню. Для цього в комірку E17 вводимо формулу =B2-$E$14*F2 і копіюємо в решту комірок таблиці. Нагадаємо, що один крок виключення змінних складається з наступних операцій: розрахунковий рядок ділиться на розрахунковий елемент (у комірку E22 вводимо формулу =E17/$E17 і копіюємо її по рядку), решта елементів знаходяться за правилом прямокутника (у комірку F23 вводимо формулу = F18–F$17*$E18/$E$17 і копіюємо в решту комірок таблиці). Після двох кроків виключення змінних за модифікованим методом Гаусса виразимо змінні x_1 та x_2 через x_3 і, поклавши x_3=1, знайдемо координати першого власного вектора (діапазон комірок F32:F34). Після чого знаходимо нормовані координати цього вектора за формулою

$\overset{0}{x}_i = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$. Для цього в комірку G32 вводимо формулу =F32/КОРЕНЬ(СУММКВ(F$32:F$34)) і копіюємо в решту комірок. Аналогічно знаходимо нормовані власні вектори, які відповідають іншим власним значенням матриці [A]. Із нормованих векторів складаємо матрицю [Q] (діапазон комірок E37:G39) лінійного перетворення матриці в діагональну матрицю. Використовуючи вбудовані математичні функції МУМНОЖ та МОБР, перевіримо, що матриця $[B]=[Q]^{-1}[A][Q]$ подібна матриці [A] є діагональною і діагональні елементи матриці [B] є власними значеннями матриці [A]. Використовуючи вбудовану математичну функцію МОБР(F37:H39) в діапазоні комірок K37:M39 знаходимо обернену матрицю до матриці [Q]. Обернена матриця до матриці [Q] співпадає з транспонованою матрицею. В діапазоні комірок F41:H43 знаходимо матрицю [B] за формулою =МУМНОЖ(МУМНОЖ(K37:M39;B2:D4); F37:H39). Матрицю [B] можемо знайти не обчислюючи окремо обернену матрицю відповідно за формулою =МУМНОЖ(МУМНОЖ(МОБР(F37:H39); B2:D4);F37:H39).

Другий спосіб знаходження власних значень матриці полягає в приведенні характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

до рівняння в формі Фробеніуса:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

і після розкриття по елементам першого стовпця, отримання характеристичного рівняння (многочлена *n*-ої степені).

Розглянемо приклад приведення характеристичного рівняння до формули Фробеніуса. Починаємо з останнього рядка. Елемент $a_{32}=3$, на місці якого має бути одиниця, беремо за розрахунковий. Для приведення до форми Фробеніуса виконуємо наступні дії: ділимо розрахунковий стовпець на розрахунковий елемент і умножаємо на нього рядок, який знаходиться над розрахунковим рядком, тобто:

$$\left|[A]-\lambda[E]\right| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -0.33 & 1 \\ -3 & 3-\lambda & 9 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

Щоб останній рядок мав вигляд $[0 \ 1 \ -\lambda]$, другий стовпець множимо спочатку на –1, а потім на –5 і додаємо відповідно до першого та третього стовпців:

$$= \begin{vmatrix} 7.33-\lambda & -0.33 & 2.66 \\ -6+\lambda & 3-\lambda & -6+5\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

Щоб позбавитись у другому рядку доданків з λ до нього додаємо перший рядок та третій, помножений на 5:

$$= \begin{vmatrix} 7.33-\lambda & -0.33 & 2.16 \\ 1.33 & 7.66-\lambda & -3.33 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

Аналогічні операції проробимо для приведення другого рядка до вигляду $[1 \ -\lambda \ 0]$:

$$= \begin{vmatrix} 7.33-\lambda & 0.44 & 3.55 \\ 1 & 7.66-\lambda & -3.33 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7.33-\lambda & -56.6-7.66\lambda & 28+3.33\lambda \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 15-\lambda & -60 & 28 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & -60 & 28 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (15-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -60 & 28 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 60\lambda + 28 = 0.$$

В ЕТ *Excel* дану операцію можна виконати в наступній послідовності (табл. 2):

1. Розраховуємо елементи за правилом прямокутника (вводимо в комірку D6 формулу =D2-$C2*D$4/$C$4) і копіюємо в решту комірок матриці;

2. В комірку D7 вводимо формулу: множимо формулу прямокутника на абсолютну адресу розрахункового елемента і додаємо перший рядок отриманої матриці, помножений на перший елемент розрахункового рядка та третій рядок, помножений на третій елемент розрахункового рядка – в комірці D7 формула буде мати вигляд =(D3-$C3*D$4/$C$4)*$C$4+D6*$B$4+D8*$D$4. Отриману формулу копіюємо в решту комірок цього рядка. Потім правимо формулу, яка знаходиться над розрахунковим елементом, заміняючи в формулі перший доданок на адресу комірки над розрахунковим елементом.

3. Решту комірок розрахункового стовпця ділимо на розрахунковий елемент.

Таблиця 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Власні значення та власні вектори матриці (2-й спосіб)								
2		7	-1	1						
3	[A]=	-1	3	3						
4		1	3	5						
5		=C3+C6*$B$4+C8*$								
6		7,33	-0,33	2,67	=D2-$C2*D$4/$C$4					
7	[A]=	1,33	7,67	-3,33						
8		0,00	1,00	0,00	=(D3-$C3*D$4/$C$4)*$C$4+D6*$B$4+D8*$D$4					
9			=C4/$C$4			Метод Горнера				
10		15	-60	28		1	-15	60	-28	
11	[A]=	1	0	0	0,54	1	-14,46	52,25	0,00	
12		0	1	0	=F10					
13		Метод Ньютона				Діс=	0,22	=$E11*F11+G10		
14		Л1	f(Л1)	df/dx		Л2=	7			
15		0,20	-16,59	54,12		Л3=	7,46	=G11^2-4*F11*H11		
16		0,51	-1,32	45,57	=3*B15^2-2*$B$10*B15-$C$10					
17		0,54	-0,01	44,79						
18		0,54	0,00	44,78	=B15^3-$B$10*B15^2-$C$10*B15-$D$10					
19		0,54	0,00	44,78						
20		0,54	0,00	44,78	=B15-C15/D15					

Виконавши описані операції з розрахунковим елементом дістанемо визначник характеристичного рівняння в діапазоні комірок B10:D12 у формі Фробеніуса. Перше характеристичне число знайдемо за ітераційною формулою Ньютона: $\lambda_{n+1} = \lambda_n - \dfrac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)}$, для чого в комірку B15 вводимо значення λ_0 в комірку C15 – значення $f(\lambda_0)$, а в комірку D15 – формулу $f'(\lambda_0) = 3\lambda_0^2 - 30\lambda_0 + 60$ (знак функції змінимо на протилежний). Копіюємо введені формули по стовпчикам вниз доти, поки не дістанемо необхідну кількість однакових знаків в першому стовпці.

Для знаходження наступного характеристичного значення матриці [A] розглянемо функцію $f_1(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)}$. Отриманий многочлен має ті ж самі корені, що і многочлен $f(\lambda)$ за вийнятком першого кореня і буде мати порядок на одиницю менший. Знайдемо коефіцієнти цього многочлена за методом Горнера в діапазоні комірок F11:H11. Для цього в діапазон комірок F10:I10 вводимо коефіцієнти многочлена $f(\lambda)$, а в комірку E11 значення λ_1=0,536. Перший коефіцієнт многочлена $f_1(\lambda)$ буде дорівнювати першому коефіцієнту $f(\lambda)$, решту коефіцієнтів знаходимо за формулою $a_{i+1} = \lambda_1 a_i + b_{i+1}$,

де
$$f(\lambda) = b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + ... + b_n;$$
$$f_1(\lambda) = a_0\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + ... + a_{n-1}.$$

Якщо степінь многочлена $f_1(\lambda)$ більша ніж друга, то наступні характеристичні корені знову знаходимо за методом Ньютона. В даній задачі дістали многочлен другого порядку. Для знаходження коренів квадратного рівняння в комірці G13 знаходимо дискримінант, а в комірках G14, G15 – відповідно λ_2 та λ_3.

Третій спосіб знаходження власних значень та власних векторів матриці [A] полягає у використанні програми "Поиск решения"[4].

Використовуючи цю програму, знайдемо одне власне значення матриці [A]. Для цього у діапазон комірок B2:D4 та F2:H4 (табл. 3) вводимо відповідно матриці [A] і [E]. В комірці B7 буде знаходитись власне значення матриці [A], а в комірку B8 вводимо формулу обчислення характеристичного многочлена $|[A] - \lambda[E]| = 0$, тобто =МОПРЕД(B2:D4-B7*F2:H4), командами: Сервис/Поиск решения, відкриваємо діалогове вікно «Поиск решения». В текстовому вікні «Установить целевую» відмічаємо комірку B8. В текстовому полі «Изменяя ячейки» відмічаємо адресу комірки B7, де має знаходитись власне значення матриці. Активізуємо текстове поле «Ограничения», клацаємо по кнопці «Добавить». В під-вікні «Добавление ограничения», в текстовому полі «Ссылка на ячейку» відмічаємо комірку B8, вибираємо знак "=" і в текстовому полі «Ограничения» вводимо "0"(нуль). Клацаємо по кнопці "ОК", а у вікні «Поиск решения» – по кнопці «Выполнить». Після чого в комірці B7 дістанемо власне значення матриці [A]. Власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню можемо знайти за допомогою програми «Поиск решения». Для цього в діапазоні комірок E8:G10 вводимо відповідні коефіцієнти $[A] - \lambda_1[E]$ однорідної системи лінійних рівнянь, ввівши в комірку E8 формулу B2-$B$7*F2 і скопіювавши її в решту комірок. Оскільки рядки коефіцієнтів лінійно залежні, для знаходження x_1, x_2, розглядаємо два рівняння, поклавши $x_3 = 1$. В комірку G7 вводимо одиницю, комірки E7, F7 відводимо для значень x_1, x_2, а в комірки H8, I8 вводимо відповідно формули

=СУММПРОИЗВ ($E$7:$F$7;E8:F8), =-G8

і копіюємо в решту комірок відповідних стовпців.

Таблиця 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			Використання програми "**Поиск решения**"							
2		7	-1	1		1				
3	[A]=	-1	3	3	[E]=		1			
4		1	3	5				1		
5			=B2-$B$7*F2							
6		Лямда			x1	x2	x3		=-G8	
7		0,536			-0,37	-1,37	1			
8		0	0		**6,46**	**-1**	1	-1	-1	
9				[A]-л*[E]=	**-1**	**2,46**	3	-3	-3	
		=МОПРЕД(B2:D4-B7*F2:H4)								
10		Лямда			1	3	4,46			
11		7				=СУММПРОИЗВ($E$7:$F$7;E8:F8)				
12		0	0							
13										
14		=МОПРЕД(B2:D4-B11*F2:H4)/(B11-B7)								
15		Лямда								
16		7,00								
17		0,00	0		=МОПРЕД(B2:D4-B16*F2:H4)					
18										

В діалоговому вікні «Поиск решения» вказуємо в текстових полях відповідні комірки:

«Установить целевую» – H8 або H9;

«Изменяя ячейки» – E7:F7;

«Ограничения» – H8:H9=I8:I9.

Після команди «Выполнить» в діапазоні комірок E7:G7 дістанемо координати власного вектора матриці [A], що відповідає знайденому власному значенню. Для знаходження другого власного значення в комірку B12 вводимо формулу знаходження значення характеристичного многочлена з виключеним першим власним значенням, тобто =МОПРЕД(B2:D2-B11*F2:H4)/(B11-B7). Порядок наступних обчислень власних значень та власних векторів за допомогою програми «Поиск решения» співпадає з попередньо описаним алгоритмом. Зрозуміло, що в комірку B16 вводиться формула =МОПРЕД(B2:D2-D15*F2:H4)/((B15–B7)*(B15-B11)).

Висновки

Кожен із запропонованих методів обчислення власних значень та власних векторів матриці в ЕТ *Excel* має свої недоліки і переваги.

Третій метод обчислення власних значень є найменш трудомісткий, але у зв'язку з запропонованим наближеним чисельним методом виключення з рівняння знайдених коренів, власні значення, починаючи з λ_2, знаходяться з недостатньою точністю. Тому, починаючи з λ_2, оцінки власних значень необхідно знаходити за описаним алгоритмом, а потім, використовуючи їх як початкові значення, знаходити власні значення матриці з використанням програми «Поиск решения».

Список літератури

1. *Толбатов Ю. А.* О колебаниях пологих цилиндрических оболочек, подкрепленных эксцентричными ребрами жесткости. Строительство, конструкции, основания и фундаменты. Под ред. И. А. Лукашенко. – М.: Высшая школа, 1974. – С. 81-89.

2. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 592 с.

3. *Толбатов Ю. А, Толбатов Є. Ю.* Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: Навч. посібник. – К.: Четверта хвиля, 2002. – 192 с.

4. *Мазаракі А. А., Толбатов Ю. А.* Математичне програмування в Excel. Навч. посібник. – К.: Четверта хвиля, 1998. – 208 с.