УДК 62-501.5

Онищенко С. М., д-р физ.-мат. наук,
Клименко Е. Л.

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ЖЕСТКОГО СИНТЕЗА СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ

Институт электроники и систем управления Национального авиационного университета

Анализируется группа из шести алгоритмов жесткого синтеза систем стабилизации. Рассматривается применение второго из них к синтезу нелинейных систем стабилизации.

Введение

Решение задачи синтеза нелинейных систем стабилизации традиционно осуществляется путем прямого использования процедуры второго метода Ляпунова, которая приводит к известному матричному уравнению

$$\dot{D} + D(A - BC) + (A - BC)^T D = -Q, \quad (1)$$

в котором $A : R_n \times T \to R_{n\times n}$ – матрица коэффициентов исходной системы n-го порядка, приведенной к псевдолинейной векторно-матричной форме [1]

$$\dot{x} = A(x,t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$B : R_n \times T \to R_{n\times m}, m \le n,$ – известная матрица; $C : R_n \times T \to R_{m\times n}$ – искомая матрица управления;

$$D,Q : \begin{Bmatrix} D^T = D : T \to R_{n\times n}, \\ D > 0 \forall t \in T; \\ Q^T = Q : R_n \times T \to R_{n\times n}, \\ Q > 0 \forall x \in \Omega \subset R_n, \forall t \in T \end{Bmatrix}$$

– матрицы коэффициентов некоторых положительно определенных квадратичных форм; *точкой* обозначена операция дифференцирования по времени $t \in T = [t_0, \infty) \subset R_1$.

К сожалению, уравнение Ляпунова (1) при решении задачи стабилизации оказывается плохо обусловленным – из него необходимо определять *две* матрицы: C и D. Тем не менее, проблема решается несколькими путями:

- матрица D задается априори, как в задачах анализа (это направление получило название *монотонной стабилизации* [2]);
- матрица D находится как решение матричного уравнения Ляпунова

$$\dot{D} + DA_0 + A_0^T D = -Q, \quad (3)$$

записанного для линейного стационарного приближения

$$\dot{x} = A_0 x, \quad x(t_0) = x_0, \quad (4)$$

исходной разомкнутой системы (2) (это предполагает асимптотическую устойчивость системы (4)), после чего найденная из (3) матрица D используется в уравнении (1) уже как заданная;

- априори вводится связь матрицы C с матрицей D, чаще всего мультипликативная, вида $C \underline{\Delta} KD$ (здесь и далее $\underline{\Delta}$ означает *равно по определению*); этот подход приводит к замене уравнения Ляпунова (1) матричным уравнением Рикка-ти и обычно позволяет решать задачи *оптимальной стабилизации* [3];
- наконец, фиксируется структура матрицы D мультипликативной параметризацией любой невырожденной блочно-треугольной матрицей D_* (например, нижней) в виде

$$D \underline{\Delta} D_* D_*^T, \quad (5)$$

или соответственно

$$D\underline{\Delta}D_*^T D_*, \qquad (6)$$

при условии

$$\det D_* \neq 0., \qquad (7)$$

когда гарантируется ее симметричность, и положительная определенность [4], а также уменьшается количество ее независимых блоков, требующих непосредственной идентификации из уравнения (1); указанное направление получило название *жесткой стабилизации* [5].

Постановка задачи

Реализация жесткой стабилизации систем возможна несколькими методами синтеза и существенно зависит от свойств матрицы B.

При условии

$$B \in R_{n\times n},\ rankB = n,\ \exists B^{-1}, \qquad (8)$$

когда матрица B неособенная и имеет обратную, искомую матрицу управления C можно найти из уравнения Ляпунова (1) методом кососимметризации [6], для чего его удобнее переписать для матриц

$$D\underline{\Delta}const, \quad Q\underline{\Delta}D\widetilde{Q}D \qquad (9)$$

в виде

$$(A-BC)D^{-1} + D^{-1}(A-BC)^T = -\widetilde{Q}. \quad (10)$$

Затем переписать его следующим образом:

$$\begin{gathered}[(A-BC)D^{-1} + \frac{1}{2}\widetilde{Q}] + \\ +[(A-BC)^T D^{-1} + \frac{1}{2}\widetilde{Q}]^T = 0\end{gathered} \qquad (11)$$

и, наконец, удовлетворить произвольной кососимметричной матрицей $S^T = -S$, приняв

$$[(A-BC)D^{-1} + \frac{1}{2}\widetilde{Q}] = \frac{1}{2}S^T. \quad (12)$$

В результате из (12) получим матрицу управления

$$C = B^{-1}[A + \frac{1}{2}(\widetilde{Q} + S)D], \qquad (13)$$

которая полностью решает задачу стабилизации любой нелинейной системы, даже априори неустойчивой, без каких бы то ни было условий стабилизируемости.

Проблема намного усложняется, когда матрица B имеет вид

$$B\underline{\Delta}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in R_{n\times m}. \qquad (14)$$

При этом для решения задачи стабилизации должно обязательно выполняться одно из двух условий. Или

$$B_1 \in R_{m\times m}, rankB_1 = m < n, \exists B_1^{-1}, \quad (15)$$

или

$$B_2 \in R_{m\times m}, rankB_2 = m, \exists B_2^{-1}, \qquad (16)$$

что равносильно утверждению: матрица B имеет максимально возможный ранг, равный m – размерность управления.

Вид (14) матрицы B обусловливает блочное представление матриц A, C, Q и D_*. Будем иметь

$$A\underline{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad (17a)$$

$$C\underline{\Delta}[C_1 \quad C_2], \qquad (17б)$$

$$Q\underline{\Delta}\begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* \\ Q_{12}^{*T} & Q_{22}^* \end{bmatrix}, \qquad (17в)$$

$$D_*\underline{\Delta}\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ D_{12}^T D_1 & D_2 \end{bmatrix}, \det D_i \neq 0, i = 1,2 \quad (17г)$$

Для нижней блочно-треугольной матрицы (17г) согласно (5) для D нетрудно получить выражение

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}D_{12} \\ D_{12}^T D_{11} & D_{12}^T D_{11} D_{12} + D_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

при

$$D_{ii}\underline{\Delta}D_i D_i^T, i = 1,2. \qquad (19)$$

Тогда по аналогии для верхней блочно-треугольной матрицы

$$D_*^T \underline{\Delta} \begin{bmatrix} D_1 & D_{21}^T D_2 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \det D_i \neq 0, i=1,2, \quad (20)$$

с учетом (19) будем иметь

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} + D_{21}^T D_{22} D_{21} & D_{21}^T D_{22} \\ D_{22} D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Уравнение Ляпунова (1) для «нижней» матрицы D из (18) предстанет в виде следующих трех уравнений устойчивости замкнутой системы относительно блоков матриц (17 *а-в*):

$$\dot{D}_{11} + D_{11}({}^1A_{11} - {}^1BC_1) + ({}^1A_{11} - {}^1BC_1)^T D_{11} = \\ = -Q^*_{11}, \quad (22а)$$

$$\dot{D}_{22} + D_{22}[{}^1A_{22} - B_2(C_2 - C_1D_{12})] + \\ + [{}^1A_{22} - B_2(C_2 - C_1D_{12})]^T D_{22} = -Q^*_{22} + \\ + Q^{*T}_{12} D_{12} + D_{12}^T Q^*_{12} - D_{12}^T Q^*_{11} D_{12}, \quad (22б)$$

$$D_{11}\dot{D}_{12} + D_{11}[{}^1A_{12} - {}^1A_{11}D_{12} - {}^1B\ (C_2 - C_1D_{12})] + \\ + (A_{21} - B_2C_1)^T D_{22} = -Q^*_{12} + Q^*_{11}D_{12}, \quad (22в)$$

а для «верхней» матрицы D из (21) – соответственно:

$$\dot{D}_{11} + D_{11}[\widetilde{A}_{11} - B_1(C_1 - C_2D_{21})] + \\ + [\widetilde{A}_{11} - B_1(C_1 - C_2D_{21})]^T D_{11} = -Q^*_{11} + \\ + D_{21}^T Q^*_{21} + Q^{*T}_{21} D_{21} - D_{21}^T Q^*_{22} D_{21}, \quad (23а)$$

$$\dot{D}_{22} + D_{22}(\widetilde{A}_{22} - \widetilde{B}_2C_2) + (\widetilde{A}_{22} - \widetilde{B}_2C_2)^T D_{22} = \\ = -Q^*_{22}, \quad (23б)$$

$$D_{22}\dot{D}_{21} + D_{22}[\widetilde{A}_{21} + D_{21}\widetilde{A}_{11} - \widetilde{B}_2(C_1 - C_2D_{21})] + \\ + (A_{12} - B_1C_2)^T D_{11} = -Q^*_{21} + Q^*_{22}D_{21}. \quad (23в)$$

В уравнениях (22) и (23) для удобства обозначено

$${}^1A_{11} \underline{\Delta} A_{11} + D_{12}A_{21},\ {}^1A_{12} \underline{\Delta} A_{12} + D_{12}A_{22}, \\ {}^1A_{22} \underline{\Delta} A_{22} - A_{21}D_{12},\ {}^1B \underline{\Delta} B_1 + D_{12}B_2; \\ \widetilde{A}_{11} \underline{\Delta} A_{11} - A_{12}D_{21},\ \widetilde{A}_{21} \underline{\Delta} A_{21} - A_{22}D_{21}, \\ \widetilde{A}_{22} \underline{\Delta} A_{22} + D_{21}A_{12},\ \widetilde{B}_2 \underline{\Delta} B_2 + D_{21}B_1. \quad (24)$$

Поскольку уравнения (22*в*) и(23*в*) в обеих системах зависят от обоих блоков C_1 и C_2 матрицы C, что позволяет формально выражать любой из них через другой, то это превращает системы (22) и (23) в равноправные три уравнения в каждой относительно искомых матриц C_1, C_2, причем из двух любых уравнений в каждой системе можно определить C_1 и C_2, а оставшееся третье соотношение после исключения в нем уже найденной матрицы управления рассматривать как *условие стабилизируемости.* В результате для каждой из систем (22) и (23) оказывается возможной реализация шести различных алгоритмов решения задачи. Их удобно свести в таблицу.

Таблица 1. Алгоритмы синтеза систем стабилизации

Алгоритм уравнения	1	2	3	4	5	6
(а)	C_1	C_1	*	C_2	C_2	*
(б)	C_2	*	C_1	C_1	*	C_2
(в)	*	C_2	C_2	*	C_1	C_1

Из нее видно, какие именно соотношения (22) или (23) используются в каждом из шести алгоритмов для определения блоков C_1 и C_2 матрицы управления C, а какие предлагаются в качестве условий стабилизируемости (они помечены звездочкой).

Цель работы состоит в анализе алгоритмов синтеза нелинейных систем стабилизации, приведенных в табл.1, и в реализации второго из них.

Следует отметить, что первый и шестой алгоритмы табл.1 уже реализованы соответственно для нижней матрицы D в виде (18) и уравнений (22) для стабилизации *нелинейных* систем [7] и для верхней матрицы D из (21) и уравнений (23) для стабилизации *линейных* нестационарных систем, канонических по управлению [8].

Что же касается пятого алгоритма, то его реализация для нижней матрицы D из уравнений (22) крайне нерациональна, поскольку уравнение (22*а*) от C_2 не зависит, а определение C_1 из (22*в*) практически несостоятельно из-за того, что C_1 входит в (22*в*) как в виде C_1, так и C_1^{T}, что не позволяет получить для матрицы C_1 выражение в явном виде. В случае верхней матрицы из уравнения (23*а*) матрицу C_2 формально можно определить лишь в достаточно частном случае квадратной матрицы D_{21}, что эквивалентно соотношению

$$m = n/2. \tag{25}$$

Но в этом случае матрица C_2 определяется через C_1, так что после ее исключения в (23*в*) это уравнение станет зависимым как от матрицы C_1, так и от C_1^{T}, что не позволяет получить его матричное решение относительно C_1 в явном виде.

Реализация 4-го алгоритма из уравнений (22) для нижней матрицы D возможна лишь при определении матрицы C_1 из (22*б*) в частном случае (25) с заменой матрицы C_1 в (22*а*) на C_2 и последующим определением C_2 из (22*а*) с помощью достаточно громоздких выкладок.

Реализация этого алгоритма из уравнений (23) для верхней матрицы D встречает аналогичные трудности: здесь матрицу C_2 можно найти из (23*а*) лишь при условии (25) через матрицу C_1, которую предлагается определять из (23*б*) после замены в нем матрицы C_2 на C_1, что вряд ли можно считать конструктивным.

Все рассуждения относительно возможной реализации 4-го алгоритма полностью переносятся на случай 3-го алгоритма взаимозаменой матриц C_1 и C_2. Что же касается 2-го алгоритма, то он заслуживает отдельного исследования.

Анализ 2-го алгоритма для нижней матрицы D

Упростим правые части уравнений (22). Для этого положим в них

$$Q^*{}_{11} \underline{\Delta} D_{11} Q_{11} D_{11}, \; Q_{12}^* \underline{\Delta} Q_{11}^* D_{12}, \quad Q_{22}^* \underline{\Delta} Q_{22} + D_{12}^T Q_{11}^* D_{12}, \tag{26}$$

а также

$$D_{ii} \underline{\Delta} const, \quad i = 1,2. \tag{27}$$

Тогда они примут вид

$$D_{11}({}^1A_{11} - {}^1BC_1) + ({}^1A_{11} - {}^1BC_1)^T D_{11} = = -D_{11}Q_{11}D_{11}, \tag{28а}$$

$$\dot{D}_{22} + D_{22}[{}^1A_{22} - B_2(C_2 - C_1D_{12})] + [{}^1A_{22} - B_2(C_2 - C_1D_{12})]^T D_{22} = -Q_{22}, \tag{28б}$$

$$D_{11}\dot{D}_{12} + D_{11}[{}^1A_{12} - {}^1A_{11}D_{12} - {}^1B\ (C_2 - C_1D_{12})] + (A_{21} - B_2C_1)^T D_{22} = 0. \tag{28в}$$

Применим к уравнению (28*а*) метод кососимметризации. В результате, после использования процедуры, аналогичной (11) – (13), будем иметь

$$C_1 = {}^1B^{-1}[{}^1A_{11} + \frac{1}{2}(Q_{11} + S_{11})D_{11}], \tag{29}$$

где матрица ${}^1B$ согласно соответствующему обозначению из (24) и выполнению условия (15) будет иметь обратную при любой заданной матрице B_2 (это обеспечивается произвольным выбором матрицы D_{12}).

Исключая C_1 в (28*в*) с учетом (29), нетрудно получить сначала выражение $C_2 - C_1D_{12}$ в виде

$$C_2 - C_1D_{12} = {}^1B^{-1}[{}^1\hat{A}_{12} - {}^1A_{11}D_{12} - -\frac{1}{2}(Q_{11} - S_{11})\hat{B}_*{}^T D_{22}], \tag{30}$$

где для удобства обозначено

$${}^1\hat{A}_{12} \underline{\Delta} {}^1A_{12} + D_{11}^{-1}(A_{21}^T - {}^1A_{11}^T B_*^T)D_{22} + \dot{D}_{12}, \quad \hat{B}_* \underline{\Delta} B_2 {}^1B^{-1}, \tag{31}$$

а затем и формулу для матрицы C_2, причем

$$C_2 = {}^1B^{-1}[{}^1\hat{A}_{12} + \frac{1}{2}(Q_{11} + S_{11})D_{11}D_{12} - \\ - \frac{1}{2}(Q_{11} - S_{11})B_*^T D_{22}]. \qquad (32)$$

Если затем в уравнении (28б) исключить выражение $C_2 - C_1D_{12}$ с помощью соотношения (30), то условие стабилизируемости примет вид

$$D_{11}[{}^1A_{22} - \hat{B}_*({}^1\hat{A}_{12} - {}^1A_{11}D_{12})] + \\ + [{}^1A_{22} - \hat{B}_*({}^1\hat{A}_{12} - {}^1A_{11}D_{12})]^T D_{11} = \\ = -Q_{22} - D_{11}\hat{B}_*Q_{11}\hat{B}_*^T D_{11}. \qquad (33)$$

Анализ 2-го алгоритма для верхней матрицы D

Упростим правые части уравнений (23). Для этого положим в них

$$Q^*{}_{11} \underline{\Delta} D_{11} Q_{11} D_{11} + D_{21}^T Q^*{}_{22} D_{21}, \\ Q_{21} \underline{\Delta} Q_{22} D_{21}, \quad Q_{22}^* \underline{\Delta} Q_{22}, \qquad (34)$$

а также

$$D_{ii} \underline{\Delta} const, \quad \dot{D}_{ii} = 0, \ i = 1,2. \qquad (35)$$

В результате получим

$$D_{11}[\widetilde{A}_{11} - B_1(C_1 - C_2D_{21})] + \\ + [\widetilde{A}_{11} - B_1(C_1 - C_2D_{21})]^T D_{11} = \\ = -D_{11}Q_{11}D_{11}, \qquad (36а)$$

$$D_{22}[\widetilde{A}_{22} - \widetilde{B}_2C_2] + [\widetilde{A}_{22} - \widetilde{B}_2C_2]^T D_{22} = \\ = -Q_{22}, \qquad (36б)$$

$$D_{22}\dot{D}_{21} + D_{22}[\widetilde{A}_{21} + D_{21}\widetilde{A}_{11} - \widetilde{B}_2(C_1 - C_2D_{21})] + \\ + (A_{12} - B_1C_2)^T D_{11} = 0. \qquad (36в)$$

Применим к уравнению (36*а*) метод кососимметризации в виде процедуры, аналогичной (11)-(13), и запишем для $C_2 - C_1D_{21}$ с учетом условия (15) соотношение

$$C_1 - C_2D_{21} = B_1^{-1}[\frac{1}{2}(Q_{11} + S_{11})D_{11} + \widetilde{A}_{11}], \quad (37)$$

которое затем исключим в уравнении (36*в*). В результате из (36*в*) оказывается нетрудно получить в явном виде значение матрицы C_2. Так, вводя обозначения

$$\widetilde{B}_* \underline{\Delta} \widetilde{B}_2 B_1^{-1} = B_* + D_{21}, \quad B_* \underline{\Delta} B_2 B_1^{-1}, \\ {}^1\widetilde{A}_{12} \underline{\Delta}\ A_{12} + D_{11}^{-1}(\dot{D}_{21}^T + \widetilde{A}_{21}^T - \widetilde{A}_{11}^T B_*^T)D_{22}, \quad (38)$$

будем иметь

$$C_2 = B_1^{-1}[{}^1\widetilde{A}_{12} - \frac{1}{2}(Q_{11} - S_{11})\widetilde{B}_*^T D_{22}], \qquad (39)$$

после чего, учитывая(39), из (37) определим

$$C_1 = B_1^{-1}[\widetilde{A}_{11} + {}^1\widetilde{A}_{12}D_{21} + \frac{1}{2}(Q_{11} + S_{11})D_{11} - \\ - \frac{1}{2}(Q_{11} - S_{11})\widetilde{B}_*^T D_{22}.D_{21}] \qquad (40)$$

и, исключая C_2 в уравнении (36*б*), получим условие стабилизируемости в виде

$$D_{22}[\widetilde{A}_{22} - \widetilde{B}_*{}^1\widetilde{A}_{12}] + [\widetilde{A}_{22} - \widetilde{B}_*{}^1\widetilde{A}_{12}]^T D_{22} = \\ = -Q_{22} - D_{22}\widetilde{B}_*Q_{11}\widetilde{B}_*^T D_{22}. \qquad (41)$$

Выводы

Из шести алгоритмов синтеза систем стабилизации, сведенных а табл.1, наиболее конструктивными можно считать 1-й, 2-й и 6-й. Что же касается 3-го, 4-го и 5-го алгоритмов, то их наличие в группе прямых методов жесткого синтеза систем стабилизации, по-видимому, является исключительно формальным, поскольку проведенные исследования позволяют заключить, что их возможная реализация оказывается явно непродуктивной: они проигрывают 1-му, 2-му и 6-му алгоритмам.

При этом необходимо отметить особое место, которое занимает 1-й алгоритм. Он достаточно полно исследован в работах [7, 9] при использовании «нижней» матрицы D коэффициентов квадратичной формы с параметризацией *нижней* блочно-треугольной матрицей. В работе [10] показано, что 1-й алгоритм можно использовать и с «верхней» матрицей D, причем в обоих случая синтез матрицы управления C осуществляется на l этапах рекуррентной процедурой, а условие стабилизируемости сводится к условиям Сильвестра положительной определенности (l-1)-й вспомогательных матриц m-го порядка [9].

Что касается 6-го алгоритма, то до недавнего времени его использование ограничивалось исключительно областью линейных нестационарных систем, канонических по управлению [8]. В работе [10] показано, что его можно использовать для решения задач синтеза нелинейных систем как с нижней, так и с верхней матрицей D.

Аналогичный результат получен в настоящей работе для 2-го алгоритма, причем матрица управления C полностью синтезируется им на единственном (первом) этапе и синтез сопровождается единственным условием стабилизируемости, анализ которого может явиться предметом дальнейших исследований.

Характерно, что применение во 2-м алгоритме нижней матрицы D приводит к более простому виду матрицы C_1 и к более сложной структуре матрицы C_2, тогда как использование верхней матрицы приводит к противоположному результату: структура матрицы C_2 оказывается проще, чем у C_1.

Список литературы

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.

2. *Зубер И. Е.* О монотонной стабилизации линейных импульсных систем регулирования // Автоматика и телемеханика, 1968. – №3.– С. 50-60.

3. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высш.шк., 1989. – 447 с.

4. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения. – М.: Мир, 1980. – 454 с.

5. *Онищенко С. М.* Жесткая монотонная стабилизация нелинейных систем прямым методом Ляпунова // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1991. – №4. – С. 35-38.

6. *Онищенко С. М.* Модальный подход к синтезу нелинейных систем стабилизации // Проблемы управления и информатики, 1996. – №6.– С. 5-19.

7. *Онищенко С. М.* Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза // Проблемы управления и информатики, 2000. – №3.– С. 17-25.

8. *Онищенко С. М.* Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза линейных канонических систем стабилизации // Проблемы управления и информатики, 2000.– №4. – С. 49-58.

9. *Онищенко С. М.* Об условиях стабилизируемости в методах жесткого синтеза систем стабилизации // Вопросы аналитической механики и ее приложений / Праці Інституту математики НАН України. Т.26. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – С. 257-276.

10. *Онищенко С. М., Коваленко Н. П., Сусол М. Н.* Применение шестого алгоритма синтеза систем стабилизации к нелинейным объектам // Проблеми інформації та управління: Зб. наук. праць. – К.: НАУ, 2005. – №13. – С. 73-77.