

УДК 681.5.03

Глазок О. М.

РОБОЧІ ДІАПАЗОНИ СТАНІВ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З НЕЛІНІЙНИМИ ЯКІСНИМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університета

Досліджується метод аналітичного конструювання регуляторів для нелінійних динамічних керованих систем з використанням модифікованого функціоналу якості. Розглядається вплив значень параметрів загасання, з якими синтезовано регулятор, на поведінку керованої системи. Визначено границі множини станів, з яких система повернеться до точки рівноваги.

Вступ

Розвиток сучасних технологій відбувається в напрямку більш повного використання ресурсів і можливостей керованих об'єктів. Відповідно до цього вимоги до регуляторів і якості руху керованих об'єктів також зростають і ускладнюються. Актуальною проблемою є розробка методів синтезу систем керування, які могли б забезпечити підвищення точності і ефективності роботи керованих динамічних об'єктів, більш повно задовольнити вимоги замовника до якості руху керованого об'єкта. З огляду на те, що сучасні високоманеврені керовані об'єкти, зокрема, літальні апарати, на багатьох етапах руху мають суттєво нелінійну динаміку, є актуальною задачею синтезу для нелінійних систем регуляторів, які дозволяють забезпечити вимоги до якості керування.

Постановка задачі

З метою врахування на етапі проектування системи керування вимог до якості руху керованого об'єкта було створено метод синтезу регуляторів [1], в якому до процесу синтезу введено чисельні показники, що дозволяють врахувати вимоги до якості руху на етапі проектування. Метод аналітичного конструювання регуляторів є за своєю природою ітеративним процесом [2], отже, після знаходження коефіцієнтів регулятора необхідно провести дослідження отриманої керованої системи з точки зору виконання вимог до якості руху та обмежень, пов'язаних з конструктивними причинами (зокрема, обмежень на величини керування). Одним з практично важливих елементів цього дослідження є вивчення питання про те, в

якому діапазоні значень змінних стану система керування (стабілізації) може задовільно виконувати свої функції і як цей діапазон пов'язаний зі значеннями параметрів якості, які було використано при синтезі регулятора. Для отримання відповіді на це питання при розв'язанні конкретної задачі слід використати модель динаміки безпосередньо керованого об'єкта і вивчити його рух; але попередньо необхідно встановити загальні закономірності залежності характеру руху керованої системи від значень показників якості, використовуючи модельні приклади.

З цією метою проведемо дослідження нелінійної керованої системи першого порядку, що складається з керованого об'єкта

$$\dot{x} = a_1x + a_2x^2 + bu \quad (1)$$

і регулятора, оптимального з точки зору функціонала якості

$$I = \int_0^{\infty} (px^2 + ru^2 + c_0V_0 + c_1V_1)dt = \\ = \int_0^{\infty} (px^2 + ru^2 + c_0qx^2 + c_1vx^3)dt, \quad (2)$$

де V_0, V_1 – частини функції Белмана, визначені, як в [1].

Поставимо мету з'ясувати, як залежить діапазон початкових відхилень, з яких система повернеться до стану рівноваги (тобто поводитиметься як стійка), від величин коефіцієнтів c_0 і c_1 .

Синтез регулятора

Допоміжну функцію будемо шукати у вигляді

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x), \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} V_0(x) &= qx^2, \\ V_1(x) &= vx^3, \end{aligned} \quad (4)$$

q, v – деякі числа, які необхідно знайти.

Тоді

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_0}{\partial x} = 2qx, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} = 3vx^2.$$

Оптимальне керування матиме вигляд

$$u_{opt} = -\frac{b}{2r} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = -\frac{b}{2r} (2qx + 3vx^2), \quad (5)$$

Розглянемо спочатку лінеаризовану систему

$$\dot{x} = a_1 x + bu. \quad (6)$$

Функцію Ляпунова для неї будемо шукати у вигляді $V(X) = V_0(X)$ (4), а функціонал якості визначимо як

$$I(u) = \int_0^{\infty} (px^2 + ru^2 + c_0 qx^2) dt, \quad (7)$$

де c_0 – задане число (показник загасання).

Оптимальне керування знайдемо як

$$u_{opt} = -\frac{b}{2r} \left(\frac{\partial V_0}{\partial x} \right) = -\frac{b}{r} qx. \quad (8)$$

Рівняння Белмана для задачі про синтез оптимального керування для системи (6) з функціоналом якості (7) набуває вигляду квадратного рівняння, більший з двох розв'язків якого дорівнює

$$q_+ = \frac{r}{b^2} \cdot \left(a_1 + \frac{c_0}{2} + \sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2} \right)^2 + \frac{b^2 p}{r}} \right). \quad (9)$$

Другий доданок $\frac{b^2 p}{r}$ під коренем у виразі

(9) є суворо позитивною величиною, оскільки вагові коефіцієнти функціонала (2), (7) позитивні за припущенням: $p > 0, r > 0$; а $b \neq 0$, оскільки при $b = 0$ об'єкт (1) був би некерованим. Тому

$$\sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2} \right)^2 + \frac{b^2 p}{r}} > \left| a_1 + \frac{c_0}{2} \right|.$$

Отже, незалежно від знаку суми $a_1 + \frac{c_0}{2}$,

в дужках виразу (9) стоїть додатня величина. З тих же міркувань витікає, що і

$\frac{r}{b^2} > 0$. Отже, і величина q_+ позитивна

при будь-якому знаку виразу $a_1 + \frac{c_0}{2}$.

Таким чином, оптимальне лінійне керування знайдено як (8), (9). Для системи (6), охопленої знайденим оптимальним керуванням, вираз функціонала якості (7) з врахуванням (8) та (9) набуває вигляду

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_0^{\infty} (px^2 + r \left(-\frac{b}{r} q_+ x \right)^2 + c_0 q_+ x^2) dt = \\ &= \left(p + \left(\frac{b^2}{r} + c_0 \right) q_+ \right) \int_0^{\infty} x^2(t) dt. \end{aligned}$$

Дослідження руху лінеаризованої системи

Підставляючи вирази (8) та (9) до рівняння (6), отримаємо диференційне рівняння, що описує рух замкненої лінеаризованої системи з оптимальним регулятором:

$$\dot{x} = - \left(\frac{c_0}{2} + \sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2} \right)^2 + \frac{b^2 p}{r}} \right) x. \quad (10)$$

Розглянемо перехідний процес, що відбувається в системі (10) за початкової умови

$$x(0) = x_0. \quad (11)$$

Якщо c_0 і a_1 такі, що коефіцієнт при x в правій частині диференційного рівняння (10) від'ємний (зокрема, якщо $c_0 > 0$), то розв'язком задачі Коші (10), (11) є затухаюча експонента:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{T}},$$

де

$$T = \left(\frac{c_0}{2} + \sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2} \right)^2 + \frac{b^2 p}{r}} \right)^{-1}.$$

При збільшенні c_0 постійна часу перехідного процесу T зменшується, але загальний вигляд розв'язку не змінюється. В силу лінійності системи вигляд перехідного процесу не залежить і від початкового значення x_0 .

Врахування нелінійності

Тепер врахуємо квадратичний член в правій частині системи (1). Допоміжну функцію будемо шукати у вигляді (3). Необхідно зауважити, що функція (3), на відміну від (4), знакозмінна.

Розглянемо рівняння $V(x)=0$, причому запишемо функцію $V(x)$ у вигляді добутку:

$$V(x)=qx^2+vx^3=x^2(q+vx)=0. \quad (12)$$

Це рівняння має два корені: $x=0$ і

$$x_1 = x|_{V(x)=0} = -\frac{q}{v}. \quad (13)$$

З запису (12) видно, що в точці $x=0$ графік функції $V(x)$ дотикається до осі абсцис, але знак вона не змінює; а в точці $x=x_1$ – змінює знак.

З'ясуємо, чи буде стійкою система (1) з регулятором (5). Оскільки керування (5) визначене як функція x , то і права частина диференційного рівняння (1) є функцією лише x , і тому за своїм змістом рівняння (1) визначає залежність поведінки системи від її поточного стану, тобто залежність величини $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ від значення координати стану x . Метою регулювання є повернення системи з деякої точки $x=x_0$, в якій система опинилася в результаті дії зовнішнього фактору (збурення), до положення рівноваги $x=0$. Отже, рух системи має бути таким, щоб при $x>0$ величина x зменшувалась, при $x<0$ – збільшувалась, а в точці $x=0$ система повинна зупинитись:

$$\dot{x} < 0 \text{ при } x > 0 ; \quad (14)$$

$$\dot{x} = 0 \text{ при } x = 0 ; \quad (15)$$

$$\dot{x} > 0 \text{ при } x < 0 . \quad (16)$$

Розглянемо праву частину керованої системи (1),(5) і перевіримо, чи задовольняє вона цим вимогам. Підстановка (5) до (1) дає:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) = \\ &= a_1x + a_2x^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2r}(2qx + 3vx^2) \right) = \\ &= \left(a_1 - \frac{b^2q}{r} \right)x + \left(a_2 - \frac{3b^2v}{2r} \right)x^2. \end{aligned} \quad (17)$$

З (17) видно, що $f(0)=0$ при будь-яких коефіцієнтах a_1, a_2, b, q, v , тобто вимога (15) виконується: точка $x=0$ є точкою рівноваги системи. Але поведінка системи при $x \neq 0$ суттєво залежить від названих коефіцієнтів.

Розглянемо поведінку системи при малих відхиленнях від точки $x=0$. Враховуючи (15) і існування та неперервність часткових похідних будь-якого порядку по x від функції $f(x)$ виду (17), можемо замість (14), (16) записати умови стійкості системи в малому околі точки $x=0$ як умови на значення функції $f(x)$ і її похідних:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}|_{x=0} &= f(x)|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}|_{x=0} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x}|_{x=0} < 0 \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}|_{x=0} &= f(x)|_{x=0} = 0 ; \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}|_{x=0} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x}|_{x=0} = 0 ; \\ \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial x^2}|_{x=-0} &= \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}|_{x=-0} > 0 ; \\ \frac{\partial^2 \dot{x}}{\partial x^2}|_{x=+0} &= \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}|_{x=+0} < 0 ; \dots \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

і так далі.

Вигляд функції $f(x)$ (17) показує, що умову $f(0)=0$ виконано автоматично. Розглянемо умови на похідні. З (17) знаходимо:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left(a_1 - \frac{b^2q}{r} \right) + \left(a_2 - \frac{3b^2v}{2r} \right) \cdot 2x ; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 2a_2 - \frac{3b^2v}{r}. \quad (21)$$

Оскільки за даного вигляду $f(x)$ складові виразу для $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$ (21) не залежать від x , умови (19) не може бути виконано, так само, як і подібні до (19) умови з використанням похідних вище другого порядку. Тому перейдемо до розгляду

умови (19) не може бути виконано, так само, як і подібні до (19) умови з використанням похідних вище другого порядку. Тому перейдемо до розгляду

умов (18). Використовуючи (20), отримуємо:

$$\begin{aligned} \left(a_1 - \frac{b^2 q}{r}\right) + \left(a_2 - \frac{3b^2 v}{2r}\right) \cdot 2x \Big|_{x=0} &= \\ &= a_1 - \frac{b^2 q}{r} < 0; \\ \frac{b^2 q}{r} &> a_1, \end{aligned} \quad (22)$$

де $q = q_+$ (9).

Визначимо, при яких c_0 виконується нерівність (22). При $a_1 \not\leq$ нерівність (22) є тривіальною, оскільки, як було показано вище, $q_+ > 0$, а $r > 0$ за припущенням. Отже, при $a_1 \not\leq$ умова (18) стійкості системи в околі точки $x=0$, представлена тепер у формі (22), не дає обмежень на значення c_0 .

Розглянемо тепер випадок $a_1 > 0$. Підставимо вираз (9) до (22):

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{c_0}{2} + \sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2 + \frac{b^2 p}{r}} &> a_1; \\ \frac{c_0}{2} &> -\sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2 + \frac{b^2 p}{r}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Розглянемо нерівність (23) в двох випадках: $c_0 \geq 0$ і $c_0 < 0$.

Якщо $c_0 \geq 0$, то перший доданок підкореневого виразу $\left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2$ більший від 0 (в будь-якому разі не дорівнює нулю, оскільки ми розглядаємо випадок $a_1 > 0$, $c_0 \geq 0$). Другий доданок $\frac{b^2 p}{r}$, як уже було сказано, також позитивний. Отже, за умови припущень, які розглядаються, нерівність (23) є тривіальною, оскільки в її лівій частині стоїть невід'ємна (за припущенням) величина, а в правій частині – суворо від'ємний вираз. Це означає, що і у випадку $a_1 > 0$, $c_0 \geq 0$ умова стійкості системи в околі точки $x=0$ (18) не дає обмежень на значення c_0 .

Тепер розглянемо випадок $a_1 > 0$, $c_0 < 0$. Перетворюючи нерівність (23), отримуємо:

$$\begin{aligned} -\sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2 + \frac{b^2 p}{r}} &< \frac{c_0}{2}; \\ -\frac{2}{c_0} \sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2 + \frac{b^2 p}{r}} &> 1. \end{aligned}$$

Оскільки розглядаємо випадок $c_0 < 0$, то множник при корені $-\frac{2}{c_0} > 0$.

$$\frac{4}{c_0^2} \left(\left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2 + \frac{b^2 p}{r} \right) > 1;$$

$$\begin{aligned} \left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2 + \frac{b^2 p}{r} &= \\ = a_1^2 + a_1 c_0 + \frac{c_0^2}{4} + \frac{b^2 p}{r} &> \frac{c_0^2}{4}; \end{aligned}$$

$$a_1^2 + a_1 c_0 + \frac{b^2 p}{r} > 0;$$

$$a_1 c_0 > -\left(a_1^2 + \frac{b^2 p}{r}\right).$$

Оскільки за припущенням $a_1 > 0$, то з останньої нерівності випливає, що

$$c_0 > -\left(a_1 + \frac{b^2 p}{r a_1}\right).$$

Введемо позначення:

$$c_0^- = -\left(a_1 + \frac{b^2 p}{r a_1}\right); \quad (24)$$

Враховуючи припущення, зроблені стосовно величин, що утворюють праву частину виразу (24), можемо дійти висновку, що $c_0^- < 0$. Отже, для $c_0 < 0$ умова (18) дає обмеження знизу:

$$c_0 > c_0^-, \quad (25)$$

При $c_0 = c_0^-$ $\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$; значення

c_0^- буде границею області стійкості системи в точці $x=0$ за параметром c_0 . При $c_0 < c_0^-$ точка $x=0$ є точкою нестійкої рівноваги. При $c_0 > c_0^-$ точка $x=0$ є точкою стійкої рівноваги системи, графік функції $f(x)$ перетинає вісь абсцис в точці $x=0$, а оскільки функція (17) має вигляд полінома другого ступеня, то існує і друга

точка перетину $x = x_2$. Знайдемо x_2 як ненульовий корінь рівняння

$$\left(a_1 - \frac{b^2 q_+}{r}\right)x + \left(a_2 - \frac{3b^2 v}{2r}\right)x^2 = 0 ;$$

$$x_2 = -\frac{\left(a_1 - \frac{b^2 q_+}{r}\right)}{\left(a_2 - \frac{3b^2 v}{2r}\right)} . \quad (26)$$

Знак числівника дробу (26) визначено умовою (22):

$$a_1 - \frac{b^2 q_+}{r} < 0 .$$

Тепер розглянемо знаменник дробу (26).

$$a_2 - \frac{3b^2 v}{2r} = a_2 - \frac{3b^2}{2r} \cdot \frac{2q_+ a_2}{\left(\frac{3b^2}{r} q_+ - c_1 - 3a_1\right)} =$$

$$= \frac{-\left(\frac{c_1}{3} + a_1\right) \cdot a_2}{\left(\frac{c_0}{2} + \sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2 + \frac{b^2 p}{r}} - \frac{c_1}{3}\right)} . \quad (27)$$

Якщо

$$\frac{c_0}{2} + \sqrt{\left(a_1 + \frac{c_0}{2}\right)^2 + \frac{b^2 p}{r}} - \frac{c_1}{3} \neq 0$$

і

$$\left(\frac{c_1}{3} + a_1\right) \cdot a_2 \neq 0 ,$$

тобто вираз (27) має сенс і не дорівнює нулю, знаменник виразу (26) може бути як додатним, так і від'ємним, в залежності від значення коефіцієнта c_1 , на яке досі не було накладено ніяких обмежень, та від значень інших величин, що входять до виразу (27). Відповідно, точка $x = x_2$ може знаходитись зліва чи справа від точки $x = 0$.

Варіанти поведінки функції $f(x)$ подано на рис. 1. На рис. 1, а, б штриховою на осі абсцис показано множину точок, з яких система рухається до точки $x=0$. У випадках, коли точка $x=0$ є точкою нестійкої рівноваги системи, точкою стій

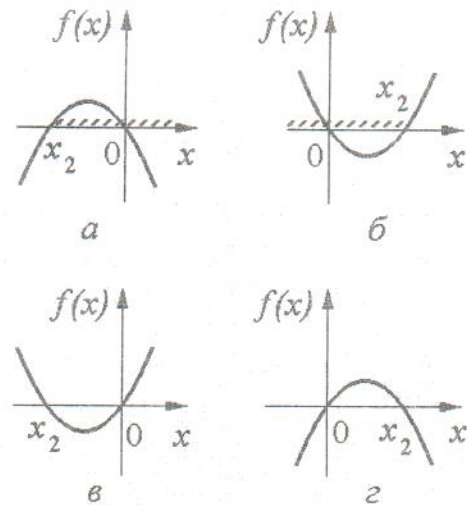


Рис. 1. Можливі варіанти поведінки функції $f(x)$ (17). а – точка $x=0$ є точкою стійкої рівноваги системи, $x_2 < 0$; б – точка $x=0$ є точкою стійкої рівноваги системи, $x_2 > 0$; в, г – точка $x=0$ є точкою нестійкої рівноваги системи

кої рівноваги виявляється точка $x = x_2$ (рис. 1, в, г).

Окремо слід розглянути випадок, коли $-\left(\frac{c_1}{3} + a_1\right) \cdot a_2 = 0$. Оскільки при $a_2 = 0$ немає сенсу розглядати керований об'єкт у вигляді (1), то такий випадок можливий при $c_1 = -3a_1$. Порівнюючи вирази (17) та (27), бачимо, що при цьому

$$a_2 - \frac{3b^2 v}{2r} = 0$$

і регулятор компенсує нелінійність системи. Функція $f(x)$ набуває вигляду :

$$f(x) = \left(a_1 - \frac{b^2 q}{r}\right)x .$$

В цьому випадку за умови (24)–(25) нерівності (14) і (16) буде виконано не лише в околі точки $x=0$, а й при всіх x .

Результати чисельного моделювання

На рис. 2 наведено результати чисельного моделювання перехідних процесів, отриманих при різних початкових відхиленнях $x(0)$ в системі (1) з регулятором (5) з параметрами:

$$a_1 = 1 ; a_2 = 0.5 ; b = 1 ; p = r = 1 , \quad (28)$$

$$c_0 = 1, c_1 = 2 . \quad (29)$$

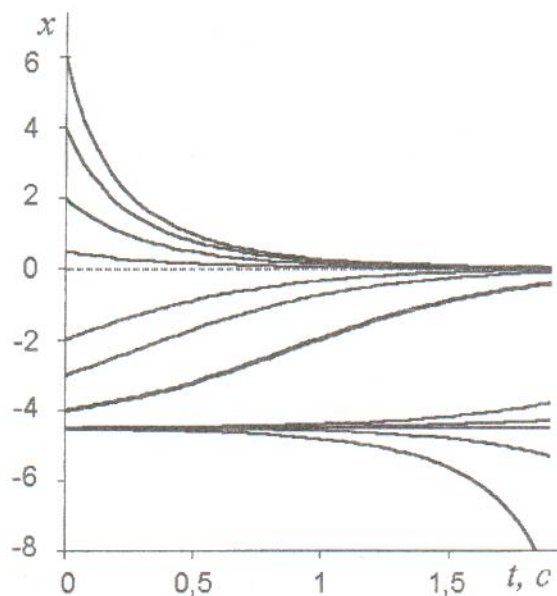


Рис. 2. Перехідні процеси в системі (1), (5) з параметрами (28), (29)

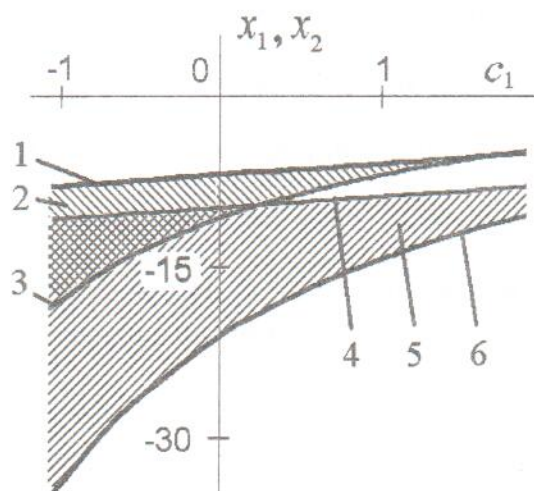


Рис. 3. Залежність величин x_1 (13) та x_2 (26) від значення c_1 для системи (1), (5) з параметрами (28). 1 – графік $x_1(c_1)$ при $c_0 = 1$; 2 – область, де $x_2 < x < x_1$ при $c_0 = 1$ (штриховка з нахилом вліво); 3 – графік $x_2(c_1)$ при $c_0 = 1$; 4 – графік $x_1(c_1)$ при $c_0 = 2$; 5 – область, де $x_2 < x < x_1$ при $c_0 = 2$ (штриховка з нахилом вправо); 6 – графік $x_2(c_1)$ при $c_0 = 2$.

При вказаних параметрах системи поведінка функції $f(x)$ відповідає графіку рис. 1, а, при цьому знайдене за формулою (26) значення x_2 дорівнює наближено -4.5211 . З графіків видно, що при початкових відхиленнях, менших за цю величину, система не повертається до точки $x=0$. Можна зробити висновок, що результати чисельного моделювання підтвердили правильність розрахунків.

На рис. 3 подано приклади графіків, що відображають поведінку величин x_1 та x_2 в залежності від величин коефіцієнтів c_0, c_1 при $a_1 = 1, a_2 = 0.5, b = 1, p = r = 1$. Інтерес для подальших досліджень представляє дослідження руху динамічної системи та поведінки допоміжної функції $V(x)$ (3) на траєкторіях руху керованої системи при таких значеннях параметрів об'єкта і регулятора, що виконується умова $x_1 > x_2$, і при таких значеннях змінної стану x , що $x_2 < x < x_1$, оскільки при цьому рух системи до стану рівноваги (чисельне моделювання показує, що повернення системи до нуля відбувається) супроводжується зміною знаку функції (3). Необхідно вивчити характер впливу значень коефіцієнтів загасання на швидкість системи, на початкову і кінцеву стадії перехідного процесу, а також бажано б було отримати аналітичні вирази для діапазонів стійкості у випадку багатовимірних нелінійних динамічних систем.

Список літератури

1. Глазок О. М. Методи синтезу якісних регуляторів для нелінійних динамічних систем. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004. – №4. – С. 92-102.
2. Красовский А. А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1969. – 240 с.