УДК 681.518.2

Баранов В. Л., д-р техн. наук,
Водоп'ян С. В., канд. техн. наук,
Костюченко Р. М.

МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ОДНОМІРНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету

Запропоновано метод моделювання фізичних процесів, оснований на одномірних диференціальних перетвореннях крайових задач. Наведені приклади моделювання.

Постановка проблеми

Математичне моделювання фізичних процесів вимагає чисельного розв'язку на ЕОМ рівнянь в частинних похідних з початковими і граничними умовами. Відомі чисельні методи вимагають виконання значної кількості обчислень на ЕОМ і не завжди можуть бути виконані в межах обмеженого часу. Обмеження на час моделювання виникають у випадку моделювання швидкоплинних фізичних процесів в реальному та прискореному часі з метою виявлення небажаних тенденцій розвитку фізичного процесу. В зв'язку з цим існує потреба в розробці методів моделювання, що базується на аналітичних і чисельно–аналітичних методах розв'язку крайових задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1 – 8] показав, що існуючі методи моделювання, основані на інтегральних і диференціальних перетвореннях, мають суттєві обмеження на клас задач, які можна розв'язати. З метою розширення області застосування в [1 – 4] запропоновано комбінований метод моделювання, що оснований на конечно–різницевій апроксимації частинних похідних по просторовим змінним і застосуванні одномірних диференціальних перетворень по часовому аргументу.

Основний недолік цього методу пов'язаний з методичною похибкою відображення фізичного процесу в область зображень.

Мета статті

Метою статті є розробка методу моделювання на основі точного аналітичного відображення фізичного процесу в область диференціальних зображень.

Розглянемо фізичні процеси, що описуються функцією $U(x, t)$ двох незалежних змінних в області, що визначається обмеженнями,

$$0 \le x_1 \le H_1, \tag{1}$$

$$0 \le x_2 \le H_2. \tag{2}$$

де H_1, H_2 – задані додатні сталі.

Моделювання процесів виду $u(x_1, x_2)$ виконаємо, використовуючи систему двох одномірних диференціальних перетворень виду:

$$U(k_1, x_2)=\frac{H_1^{k_1}}{k_1!}\left(\frac{\partial^{k_1} u(x_1,x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right)_{x_1=0}, \tag{3}$$

$$u(x_1, x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{H_1}\right)^{k_1} U(k_1, x_2), \tag{4}$$

$$U(x_1, k_2)=\frac{H_2^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{\partial^{k_2} u(x_1,x_2)}{\partial x_2^{k_2}}\right)_{x_2=0}, \tag{5}$$

$$u(x_1, x_2)=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2}{H_2}\right)^{k_2} U(x_1, k_2). \tag{6}$$

де цілочисельні аргументи k_1 і k_2 приймають значення 0, 1, 2, 3, ... Вираз (3) описує прямі диференціальні перетворення функції $u(x_1, x_2)$ у функцію $U(k_1, x_2)$ цілочисельного аргументу k_1 і незалежної змінної x_2, яка називається зображенням, або диференціальним спектром процесу $u(x_1, x_2)$, що моделюється. Обернені диференціальні перетворення (3) дозволяють за диференціальним спектром $U(k_1, x_2)$

відновити в області оригіналів процес $u(x_1, x_2)$, який моделюється. Аналогічним чином вирази (5) і (6) описують відповідно прямі і обернені диференціальні перетворення по змінній x_2.

Диференціальні спектри $U(k_1, x_2)$, $U(x_1, k_2)$ є аналогами в області зображень фізичного процесу, математична модель якого задається функцією $u(x_1, x_2)$.

З метою моделювання фізичних процесів може використовуватись диференціальний спектр $U(k_1, x_2)$ або $U(x_1, k_2)$. В деяких крайових задачах виникає потреба в дослідженні обох диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ і $U(x_1, k_2)$.

Основні властивості одномірних диференціальних перетворень, встановлені в [1 – 4], справедливі для обох видів перетворень (3), (5). Математичні операції в області зображень (3), (5) виконуються за правилами відповідності, які визначаються наступними виразами:

$$u(x_1,x_2)\pm v(x_1,x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} U(k_1,x_2)\pm V(k_1,x_2), \\ U(x_1,k_2)\pm V(x_1,k_2), \end{cases} \quad (7)$$

$$c\, u(x_1, x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} C\cdot U(k_1,x_2), \\ C\cdot U(x_1,k_2), \end{cases} \quad (8)$$

$$u(x_1, x_2)\cdot v(x_1, x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} U(k_1,x_2)*V(k_1,x_2), \\ U(x_1,k_2)*V(x_1,k_2), \end{cases} \quad (9)$$

$$U(k_1, x_2)*V(k_1, x_2)=\sum_{l=0}^{l=k_1} U(l,x_2)\cdot V(k_1-l,x_2), \quad (10)$$

$$U(x_1, k_2)*V(x, k_2)=\sum_{l=0}^{l=k_2} U(x_1,l)\cdot V(x_1,k_2-l) \quad (11)$$

$$\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_1^m} \Leftrightarrow D_1^m U(k_1,x_2), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_2^m} \Leftrightarrow D_2^m U(x_1,k_2), \quad (13)$$

$$D_1^m U(k_1,x_2)=\frac{(k_1+m)!}{k_1!\,H_1^m}\, U(k_1+m, x_2), \quad (14)$$

$$D_2^m U(x_1,k_2)=\frac{(k_2+m)!}{k_2!\,H_2^m}\, U(x_1, k_2+m) \quad (15)$$

Фігурними дужками в (7) – (9) позначені математичні операції в області зображень. Верхній рядок виразу у фігурних дужках позначає виконання операцій в області зображень (3), а нижній рядок – в області зображень (5).

Вираз (7) показує, що виконанню операцій додавання і віднімання в області оригіналів відповідають ті ж операції додавання й віднімання диференціальних спектрів в області зображень (3), (5). Множенню функції $u(x_1, x_2)$ на константу C (8) відповідає множення на ту ж константу диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ і $U(x_1, k_2)$. Операції p-множення двох функцій в області оригіналів (9) відповідає спеціальна операція множення, позначена символом *, двох диференціальних спектрів в області зображень (3), (5). Операція m–кратного диференціювання функції $u(x_1, x_2)$ по змінній x_1 в області зображень (3) позначена символом D_1^m (12). Аналогічно символом D_2^m в (13) позначено m–кратне диференціювання функції $u(x_1, x_2)$ по змінній x_2 в області зображень (5).

Виконання операції множення * двох диференціальних спектрів в областях зображень (3) і (5) розкривається відповідно до виразів (10), (11). Операції m–кратного диференціювання в областях зображень (3), (5) реалізують відповідно за виразами (14), (15).

Розглянемо математичну модель фізичного процесу у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних із двома незалежними змінними:

$$f(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2})=0. \quad (16)$$

Рівняння (16) може мати нескінченну кількість частинних розв'язків. Моделювання конкретних фізичних процесів вимагає вибору з усіх розв'язків рівняння (16) такого розв'язку, який задовольняє граничним умовам. Як правило, граничні умови задають на межі Γ середовища, в якому протікає фізичний процес, який моделюють.

Граничні умови задають у вигляді:

умови Діріхле: $u(x)\big|_{x\in\Gamma}=\psi(x)$, $\quad$ (17)

умови Неймана: $\frac{du(x)}{dv}\big|_{x\in\Gamma}=\psi(x)$, $\quad$ (18)

змішані умови: $\dfrac{du(x)}{dv}+\beta u=\psi(x)$, (19)

де ψ, β неперервні функції, визначені на граничній поверхні Γ, а $\dfrac{du(x)}{dv}$ означає похідну, взяту в точці поверхні Γ в напрямку нормалі до неї.

Обмежимось класом крайових задач (16) – (19), задачами, які допускають запис рівняння (16) у вигляді однієї з двох форм, тобто:

$$\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_1^m}=\varphi_1(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}), \quad (20)$$

$$\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_2^m}=\varphi_1(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}) \quad (21)$$

До вигляду (20), (21) можна звести лінійні й квазілінійні рівняння (16).

Переведемо рівняння (20) диференціальними перетвореннями (3) в область зображень, а переведення рівняння (21) в область зображень виконаємо диференціальними перетвореннями (5).

Отримаємо:

$$U(k_1+m, x_2)=\frac{k_1!H_1^m}{(k_1+m)!}\Phi_1[k_1, x_2, U(k_1, x_2), \frac{k_1+1}{H_1}U(k_1+1, x_2), \frac{dU(k_1,x_2)}{dx_2}, \frac{(k_1+1)}{H_1}\frac{dU(k_1+1,x_2)}{dx_2}, \frac{d^2U(k_1,x_2)}{dx_2^2}], \quad (22)$$

$$U(x_1, k_2+m)=\frac{k_2!H_2^m}{(k_2+m)!}\Phi_2[x_1, k_2, U(k_1, x_2), \frac{dU(x_1,k_2)}{dx_1}, \frac{k_2+1}{H_2}U(x_1, k_2), \frac{(k_2+1)}{H_2}\frac{dU(x_1,k_2+1)}{dx_1}, \frac{d^2U(k_1,x_2)}{dx_1^2}], \quad (23)$$

де Φ_1 – зображення функції φ_1 на основі перетворень (3); Φ_2 – зображення функції φ_2 на основі перетворень (5).

Рекурентний вигляд виразів (22), (23) дозволяє знаходити дискрети диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ і $U(x_1, k_2)$ послідовно, надаючи цілочисельним аргументам k_1 і k_2 значення 0, 1, 2, 3,…. Аналітичні обчислення за формулами (22), (23) можна виконувати з невідомими початковими дискретами диференціальних спектрів, використовуючи їх символьні позначення. Рівняння для визначення невідомих дискрет диференціальних спектрів складають на основі граничних умов (17) – (19), використовуючи обернені перетворення (4), (6). Граничні умови вигляду (17), (18) в області (1), (2) виражаються на основі властивостей одномірних диференціальних перетворень [1 – 4] наступним чином:

$$u(0, x_2)=U(0, x_2), \quad u(x_1, 0)=U(x_1, 0), \quad (24)$$

$$u(H_1, x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}U(k_1,x_2)=\psi_1(x_2), \quad (25)$$

$$u(x_1, H_2)=\sum_{k_2=0}^{\infty}U(x_1,k_2)=\psi_2(x_1), \quad (26)$$

$$U(m,x_2)=\frac{H_1^m}{m!}\left[\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_1^m}\right]_{x_1=0}$$

$$U(x_1,m)=\frac{H_2^m}{m!}\left[\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_2^m}\right]_{x_2=0}, \quad (27)$$

$$\left[\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_1^m}\right]_{x_1=H_1}= \frac{1}{H_1^m}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(k_1+m)!}{k_1!}U(k_1+m,x_2)=\psi_1(x_2), \quad (28)$$

$$\left[\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_2^m}\right]_{x_2=H_2}= \frac{1}{H_2^m}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(k_2+m)!}{k_2!}U(x_1,k_2+m)=\psi_2(x_1). \quad (29)$$

Граничні умови (19) виражаються через дискрети диференціальних спектрів на основі виразів (24) – (29). Граничні умови (24), (27) визначають початкові дискети диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ і $U(x_1, k_2)$. Невідомі дискрети диференціальних спектрів визначаються на основі розв'язку рівнянь (25), (26), (28), (29), які є в загальному випадку звичайними диференціальними рівняннями по аргументу x_1 або x_2. У випадку лінійних рівнянь в частинних похідних (16) і лінійних граничних умов (17) – (19) звичайні диференціальні рівняння (25), (26), (28), (29) також є лінійними і розв'язок їх може бути знайдений у загальному вигляді.

Після визначення дискрет диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ або $U(x_1, k_2)$ розв'язок крайової задачі (16) – (19), отриманий в області зображень, переводиться в область оригіналів оберненими перетвореннями (4) або (6).

Наведемо приклади моделювання фізичних процесів на основі одномірних диференціальних перетворень крайових задач.

Розглянемо задачу моделювання теплового поля в тонкій прямокутній пластинці OACB [9]. Через сторону OA пластинки тепло рівномірно підводиться, а через сторону OB - рівномірно відводиться. Нехай дві інші сторони AC і BC покриті тепловою ізоляцією. Потрібно знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок пластинки. Ця задача зводиться до розв'язку крайової задачі Неймана:

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}=0, \qquad (30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0}=\frac{Q}{\lambda b}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=a}=0, \qquad (31)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}=-\frac{Q}{\lambda a}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=b}=0, \qquad (32)$$

де Q – кількість теплоти, що втікає через AO і витікає через OB, а λ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності.

Представимо рівняння (30) у формі (21) і переведемо його одномірними диференціальними перетвореннями (5) в область зображень (23).

$$U(x_1, k_2+2)=-\frac{H_2^2}{(k_2+1)(k_2+2)}\,\frac{\partial^2 U(x_1,k_2)}{\partial x_1^2}. \qquad (33)$$

Рекурентний вираз (33) дозволяє визначити диференціальний спектр $U(x_1, k_2)$ при умові, що початкові дискрети диференціального спектра $U(x_1, 0)$ і $U(x_1, 1)$ задані. В задачі Неймана (30) – (32) початкова дискрета $U(x_1, 0)$ невідома, тому позначимо її символом функції $\varphi(x_1)$. Перша дискрета $U(x_1, 1)$ визначається на основі виразів (5) і (32), тобто:

$$U(x_1, 1)=-H_2\cdot\frac{Q}{\lambda a}.$$

Другу дискрету $U(x_1, 2)$ знайдемо за формулою (33) при $U(x_1, 0)=\varphi(x_1)$. Маємо

$$U(x_1, 2)=-\frac{H_2^2}{2}\cdot\frac{d^2\varphi(x_1)}{dx_1^2}.$$

Обмежимось трьома дискретами диференціального спектра $U(x_1, k_2)$:

$$U(x_1, 0)=\varphi(x_1),\ U(x_1, 1)=-H_2\cdot\frac{Q}{\lambda a},$$

$$U(x_1,2)=-\frac{H_2^2}{2}\cdot\frac{d^2\varphi(x_1)}{dx_1^2}. \qquad (34)$$

Граничну умову (32) виразимо через диференціальний спектр (34), використовуючи вираз (29) при $m=1$, $H_2=b$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{x_2=b}=\frac{1}{H_2}\left[U(x_1,1)+U(x_1,2)\right]=-\frac{Q}{\lambda a}-b\cdot\frac{d^2\varphi(x_1)}{dx_1^2}=0. \qquad (35)$$

Рівняння (35) є звичайним диференціальним рівнянням відносно невідомої функції $\varphi(x_1)$. Інтегруючи рівняння (35), отримаємо:

$$\varphi(x)=C_0+C_1\,x-\frac{Q}{2\lambda ab}\cdot x^2, \qquad (36)$$

де C_0, C_1 – сталі інтегрування.

Підставимо вираз (36) у диференціальний спектр (34) і оберненими перетвореннями (6) відновимо оригінал розв'язку крайової задачі (30) – (32).

$$u(x_1,\ x_2)=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2}{H_2}\right)^{k_2}U(x_1,\ k_2)=C_0+C_1\ x-\frac{Q}{2\lambda ab}\cdot x_1^2-\frac{Q}{\lambda a}\cdot x_2-\frac{Q}{2\lambda ab}\cdot x_2^2. \qquad (37)$$

Підстановка розв'язку (37) у граничні умови (31) дозволяє знайти сталу інтегрування

$$C_1=\frac{Q}{\lambda b}. \qquad (38)$$

З врахуванням (38) розв'язок (37) можна представити у вигляді:

$$u(x, y)=C_0+\frac{Q}{2\lambda ab}[(y-b)^2-(x-a)^2]. \quad (39)$$

Функція (39) точно задовольняє рівнянню (30) і крайовим умовам (31), (32).

Розглянемо моделювання фізичного процесу, що описується хвильовим рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad (40)$$

з граничними умовами:

$$u(0, t)=u(\pi, t)=0, \quad (41)$$

і початковими умовами: $u(x,0)=sin\ x$, $\frac{\partial(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$ (42)

Цей приклад розв'язаний в [1] апроксимацією похідних по x центральними різницями й застосуванням по часовому аргументу t одномірних диференціальних перетворень.

Введемо позначення $x=x_1$, $t=x_2$ і переведемо рівняння (40) диференціальними перетвореннями (5) в область зображень (23)

$$U(x_1,k_2+2)=\frac{H_2^2}{(k_2+1)(k_2+2)}\times$$

$$\times\frac{d^2U(x_1,k_2)}{dx_1^2}. \quad (43)$$

Початкові дискрети диференціального спектра $U(x_1, k_2)$ визначаємо за початковими умовами (42) і співвідношеннями (24), (27)

$U(x_1, 0)=\sin x_1$,

$$U(x_1, 1)=\frac{H_t}{1}\left(\frac{du(x,t)}{dt}\right)_{t=0}=0. \quad (44)$$

За рекурентним виразом (43) і початковими дискетами (44), надаючи цілочисельному аргументу k_2 значення 0, 1, 2, 3, ..., визначаємо диференціальний спектр $U(x_1, k_2)$:

$U(x_1, 0)=sinx,$ (45)

$U(x_1, 1)=0,$

$U(x_1, 2)=-\frac{H_2^2}{2!}sinx_1,$

$U(x_1, 3)=0,$

$U(x_1, 4)=\frac{H_2^4}{4!}sinx,$

$U(x_1, 5)=0,$

$U(x_1, 6)=-\frac{H_2^6}{6!}sinx_1.$

Використовуючи обернені перетворення (6) диференціального спектра (45), отримуємо розв'язок в області оригіналів:

$$u(x_1, x_2)=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2}{H_2}\right)^{k_2}U(x_1, k_2)=$$

$$=(1-\frac{x_2^2}{2!}+\frac{x_2^4}{4!}-\frac{x_2^6}{6!}+\ldots)\sin x_1=\sin x_1\cos x_2. \quad (46)$$

Якщо повернутись до початкових позначень, то отримаємо розв'язок, що точно задовольняє рівняння (40), граничним умовам (41), і початковим умовам (42):

$$u(x, t)=\sin x\cos t. \quad (47)$$

Приклад показує, що у даному випадку нема необхідності в апроксимації похідних по x центральними різницями, яка вносить методичну похибку. Розв'язок крайової задачі (40) – (41) комбінованим методом одномірних диференціальних перетворень і конечно-різнецевою апроксимацією похідних по x [1] дає наближений розв'язок при $x=\frac{\pi}{2}$ у вигляді ряду

$$u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=\left(1-4\left(\frac{t}{\pi}\right)^2+\frac{8}{3}\left(\frac{t}{\pi}\right)^4-\ldots\right). \quad (48)$$

Якщо обмежитись у розв'язку (46) такою ж кількістю членів ряду як в (48), то при $x=\frac{\pi}{2}$ отримаємо:

$$u(\frac{\pi}{2}, t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}. \quad (49)$$

Порівняємо похибки розв'язку (48) і (49) при $t=\frac{\pi}{3}$, враховуючи, що точний розв'язок (47) отримаємо в точці $u(x=\frac{\pi}{2},t=\frac{\pi}{3})$=0,5. Обчислення за формулами (48) і (49) дають відповідно значення розв'язку 0,59 та 0,5018, а абсолютні похибки складають відповідно ξ_1=0,09, ξ_2=0,0018. Абсолютна похибка розв'язку крайової задачі (40) – (42) запропонованим методом для вибраної точки $x = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{3}$ в 50 разів менше, чим комбінованим методом одномірних диференціальних перетворень по одній змінній і конечно-різницевою апроксимацією похідних по іншій змінній.

На кінець відмітимо можливість застосування запропонованого методу для розв'язку нелінійних крайових задач. Це можливо завдяки реалізації операції множення двох функцій в області зображень за виразами (12), (13).

Висновки

Запропонований метод моделювання фізичних процесів на основі одномірних диференціальних перетворень крайових задач є точним операційним методом. Реалізація методу з використанням одномірних диференціальних перетвореннях простіше відомого методу, основаного на двомірних диференціальних перетвореннях. Порівняння запропонованого методу з відомим комбінованим методом, що використовує конечно-різнецеву апроксимацію похідних по одній змінній і одномірні диференціальні перетворення по іншій змінній показало перевагу запропонованого методу, що не містить методичної похибки відображення математичної моделі фізичного процесу в область зображень.

Предметом подальших досліджень є розвиток методу одномірних диференціальних перетворень на моделювання фізичних процесів, що описуються нелінійними крайовими задачами.

Список літератури

1. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1980. – 420 с.

2. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наук. думка, 1986. – 158 с.

3. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.

4. *Пухов Г. Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – К.: Наук. думка, 1988. – 216 с.

5. *Береговенко Г. Я., Пухов Г. Е., Саух С. Е.* Численные операторные методы решения дифференциальных уравнений и анализа динамических систем. – К.: Наук. думка, 1993. – 262 с.

6. *Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д.* Численные методы. Использование MATLAB. – М.: "Вильямс", 2001. – 720 с.

7. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П, Кобельков Г. М.* Численные методы. – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.

8. *Поршнев С. В.* Вычислительная математика. – С.Пб.: БХВ – Петербург, 2004. – 320 с.

9. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1976. – 288 с.