УДК 519.872

**Алиева С.Г.,**
orcid.org/0000-0002-5073-9124

# МАТРИЧНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ-ЗАПАСАНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И РАЗРУШАЮЩИМИ ЗАЯВКАМИ

**Бакинский государственный университет**

s@aliyeva.info

## Введение

Классическая теория систем управления запасами базируется на нескольких основных допущениях [1]. Одно из них состоит в том, что не учитывается возможности образования очереди заявок, в том числе пребывания заявок в орбите. В случаях, когда возникает необходимость учета образования очереди (или формирования источника повторных заявок) следует рассматривать гибрид моделей систем массового обслуживания и систем управления запасами. Такие системы получили название систем обслуживания-запасания (Queuing-Inventory Systems, QIS) [2].

Основы теории QIS заложены в работах [3,4] и она в последние три десятилетия широко изучаются различными авторами. Состояние теории QIS описано в работе [5].

Важным подклассом QIS являются системы с портящимися запасами, в которых предполагается, что запасы портятся с течением времени (детерминированного или случайного), например, системы снабжения лекарственными препаратами, химические предприятия, системы обеспечения пищевыми продуктами и т.д. В таких системах уровень запасов уменьшается не только после их отпуска потребителям, этот уровень уменьшается также в результате их порчи с течением времени. Подобные модели широко изучены в доступной литературе [6,7]. Однако в доступной литературе не изучены модели QIS, в которой учитывается возможности мгновенного уничтожения запасов из-за внезапных событий. Такие ситуации возможны, например, в результате небрежного отношения сотрудников склада к своей работе, технических аварий и т.д. Работа посвящена изучению именно таких моделей QIS, при этом здесь мгновенные порчи запасов учитываются с помощью введения потока разрушающих заявок (destructive customers, $d$-заявки). В отличие от обычных расходующих заявок (consumer customers, $c$-заявки), $d$-заявки не требуют обслуживания (запасы), а их поступление приводит к мгновенному уменьшению уровня запасов.

Данная статья мотивирована работой [8], где изучена подобная модель QIS с портящимися запасами, в которой не учитывается наличие $d$-заявок, а также в ней не рассмотрен эффект обратной связи. Здесь предложена обобщение указанной модели.

## Описание модели и постановка задачи

Структурная схема изучаемой системы показана на рисунке. Изучается QIS с мгновенным обслуживанием расходующих заявок, которая имеет склад с максимальной вместимостью $S$. Приняты следующие допущения:

- входящий поток расходующих заявок ($c$-заявок) является пуассоновским с параметром $\lambda$, и для простоты изложения принимается, что каждая $c$-заявка требует запас единичного размера;
- если в момент поступления $c$-заявки уровень запасов равен нулю, то она согласно схеме Бернулли либо с вероятностью $\alpha$ покидает систему либо с дополнительной вероятностью $1-\alpha$ уходит в орбиту для повторения своего запроса;

- если в момент поступления $c$-заявки уровень запасов является положительным, то она мгновенно получает запас и согласно схеме Бернулли либо с вероятностью $\beta$ покидает систему либо с дополнительной вероятностью $1-\beta$ уходит в орбиту для повторения своего запроса (этот эффект в QIS называется обратная связь);
- только одна заявка с орбиты может повторить запрос для получения запаса, при этом время между этими запросами имеет показательную ф.р. с параметром $\eta$.
- если в момент поступления повторной заявки ($r$-заявки) уровень запасов равно нулю, то она согласно схеме Бернулли либо с вероятностью $\gamma$ покидает орбиту либо с дополнительной вероятностью $1-\gamma$ остается в орбите для повторения своего запроса;
- поток разрушающих заявок ($d$-заявок) является пуассоновским с параметром $\kappa$, и в момент поступления такой заявки уровень запасов мгновенно уменьшается на единицу, а если в этот момент уровень запасов равно нулю, то эта заявка не влияет на работу системы;
- в системе принята $(s, S)$ политика пополнения запасов, т.е. если уровень запасов опускается до величины $s, s < (S/2)$, то делается заказ на вышестоящий склад для пополнения запасов системы, при в момент выполнения заказа уровень запасов достигается до предельного значения $S$.
- время выполнения заказа является случайной величиной, имеющей показательную ф.р. с параметром $\nu^{-1}$.

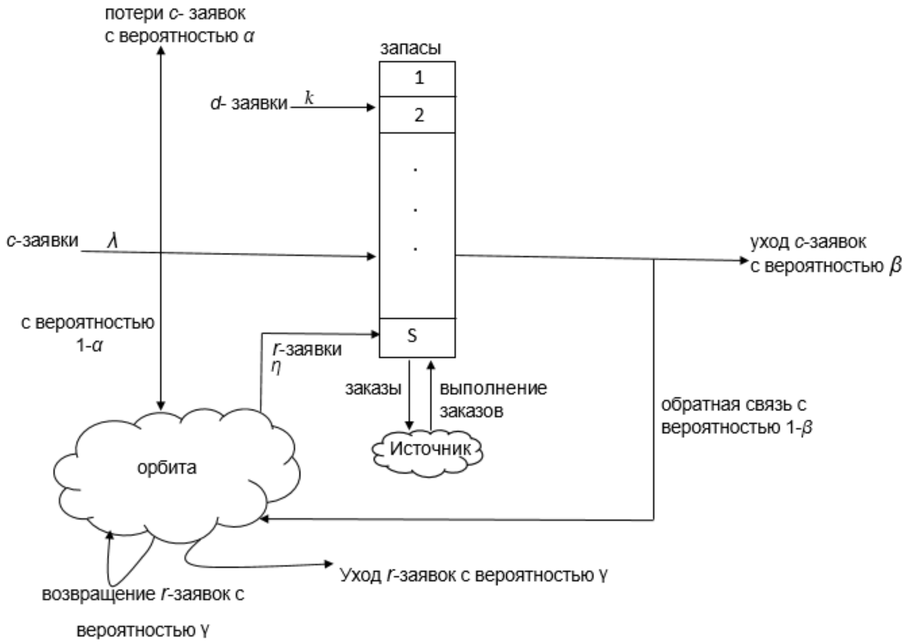


Рис. Структурная схема изучаемой системы

Задача заключается в нахождении характеристик данной системы: средний уровень запасов; средний размер заказов; среднее число $r$-заявок в орбите; средняя интенсивность заказов; средняя интенсивность уничтожения запасов системы; вероятность потери $c$-заявок; вероятность потери $r$-заявок.

## Матрично-геометрический метод

Работа изучаемой QIS описывается двумерной цепью Маркова (Two Dimensional Markov chain, 2-D MC). Состояния этой цепи задаются двумерными вектора $(n, m)$, где компонента $n$ указываеет число r-заявок в орбите, $n = 0,1, \ldots$, а компонента $m$ определяет уровень запасов, $m =$

$0,1,\dots,S$. Пространство состояний данной 2D МС определяется так:

$$E=\bigcup_{n=0}^{\infty}L(n), \tag{1}$$

где $L(n)=\{(n,0),(n,1),\dots,(n,S)\}$, $n=0,1,2,\dots$.

Пусть $q\big((n_1,m_1),(n_2,m_2)\big)$ обозначают элементы генератора изучаемой 2D МС, т.е. эти величины определяют интенсивностей переходов из состояния $(n_1,m_1)\in E$ в состояние $(n_2,m_2)\in E$. Исходя из описанного выше допущений относительно работы системы, заключаем, что эти положительные значения указанных величин вычисляются из следующих соотношений:

$$q\big((n_1,m_1),(n_2,m_2)\big)=\begin{cases}\lambda\beta+\kappa & \text{if } m_1>0,(n_2,m_2)=(n_1,m_1-1),\\ \eta & \text{if } n_1m_1>0,(n_2,m_2)=(n_1-1,m_1-1),\\ \eta\gamma & \text{if } n_1>0,m_1=0,(n_2,m_2)=(n_2-1,m_1),\\ \lambda(1-\alpha) & \text{if } m_1=0,(n_2,m_2)=(n_1+1,m_1),\\ \nu & \text{if } m_1\le s,(n_2,m_2)=(n_1,S),\\ \lambda(1-\beta) & \text{if } m_1>0,(n_2,m_2)=(n_1+1,m_1-1).\end{cases} \tag{2}$$

Перенумеровав состояния из (1) лексикографическим порядком, получаем, что эта 2D МС представляет собой квазипроцесс размножения и гибели со следующим генератором:

$$G=\begin{pmatrix} B & A_0 & . & . & .\\ A_2 & A_1 & A_0 & . & .\\ . & A_2 & A_1 & A_0 & .\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\end{pmatrix} \tag{3}$$

Блочные матрицы в (3) являются квадратными размерности $S+1$ и из соотношений (2) заключаем, что элементы матриц $B=\|b_{ij}\|$ и $A_k=\left\|a_{ij}^{(k)}\right\|, i,j=0,1,\dots,S$, определяются так:

$$b_{ij}=\begin{cases}\nu & \text{если } i\le s,\ j=S,\\ \lambda\beta+\kappa & \text{если } i>0,\ j=i-1,\\ -(\nu+\lambda(1-\alpha)) & \text{если } i=j=0,\\ -(\nu+\kappa+\lambda) & \text{если } 0<i\le s, i=j,\\ -(\kappa+\lambda) & \text{если } s<i\le S, i=j,\\ 0 & \text{в других случаях;}\end{cases} \tag{4}$$

$$a_{ij}^{(0)}=\begin{cases}\lambda(1-\alpha), & i=j=0,\\ \lambda(1-\beta), & i>0,\ j=i-1,\\ 0 & \text{в других случаях;}\end{cases} \tag{5}$$

$$a_{ij}^{(1)}=\begin{cases}\nu & \text{если } 0\le i\le s,\ j=S,\\ \lambda\beta+\kappa & \text{если } i>0,\ j=i-1,\\ -(\nu+\lambda(1-\alpha)+\eta\gamma) & \text{если } i=j=0,\\ -(\nu+\kappa+\lambda+\eta) & \text{если } 0<i\le s, i=j,\\ -(\kappa+\lambda+\eta) & \text{если } i>s, i=j,\\ 0 & \text{в других случаях;}\end{cases} \tag{6}$$

$$a_{ij}^{(2)}=\begin{cases}\eta\gamma & \text{если } i=j=0,\\ \eta & \text{если } i>1,\ j=i-1,\\ 0 & \text{в других случаях.}\end{cases} \tag{7}$$

Стационарное распределение, соответствующее генератору $A=A_0+A_1+$

$A_2$ обозначается через $\pi = \left(\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(S)\right)$. Другими словами, имеем следующую систему уравнений равновесия (СУР):

$$\pi A = 0, \pi e = 1, \quad (8)$$

где 0 обозначает нулевой вектор-строку размерности $S$+1 и $\boldsymbol{e}$ указывает вектор-столбец размерности $S$+1, в который все компоненты равны 1.

Из соотношений (5)-(7) заключаем, что элементы генератора $A = \|a_{ij}\|, i, j = 0,1, \dots, S$, определяются таким образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\nu & \text{если } i = j = 0, \\ \nu & \text{если } 0 \le i \le s,\ j = S, \\ \lambda + \kappa + \eta & \text{если } i > 0,\ j = i - 1, \\ -(\lambda + \kappa + \nu + \eta) & \text{если } 0 < i \le s,\ j = i, \\ -(\lambda + \kappa + \eta) & \text{если } i > s,\ j = i, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (9)$$

***Утверждение.*** Система является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\lambda\left(\pi(0)(1-\alpha) + (1-\pi(0))(1-\beta)\right) < \eta\left(1-(1-\gamma)\pi(0)\right). \quad (10)$$

***Доказательство.*** Из соотношений (9) заключаем, сто СУР (8) имеет следующий вид:

$$\left(\nu + (\lambda+\kappa+\eta)(1-\delta_{m,0})\right)\pi(m) = (\lambda+\kappa+\eta)\pi(m+1), 0 \le m \le s; \quad (11)$$

$$(\lambda+\kappa+\eta)\pi(m) = (\lambda+\kappa+\eta)\pi(m+1)\chi(s+1 \le m \le S-1) +$$
$$+\nu \textstyle\sum_{m=0}^{s} \pi(m)\, \delta_{m,S}\ ,\ s+1 \le m \le S\ . \quad (12)$$

здесь $\delta_{x,y}$ – символы Кронеккера и $\chi(A)$ – индикаторная функция события $A$.

Из (11) и (12) все вероятности $\pi(m), m = 1, \dots, S$, выражаются через $\pi(0)$следующим образом:

$$\pi(m) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\nu}{\lambda+\kappa+\eta}\right)^m \pi(0), & \text{if } 1 \le m \le s+1, \\ \left(1 + \dfrac{\nu}{\lambda+\kappa+\eta}\right)^{s+1} \pi(0), & \text{if } s+1 < m \le S, \end{cases} \quad (13)$$

где вероятность $\pi(0)$ определяется из условия нормировки, т.е. $\pi(0) + \pi(1) + \dots \pi(S) = 1$ . Иными словами,

$$\pi(0) = \left(1 + \sum_{m=1}^{s+1}\left(1 + \frac{\nu}{\lambda+\kappa+\eta}\right)^m + (S-s-1)\left(1+\frac{\nu}{\lambda+\kappa+\eta}\right)\right)^{-1}.$$

Согласно [9] изучаемый квази-процесс размножения и гибели является эргодичной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\pi A_0 e < \pi A_2 e \quad (14)$$

С учетом (5), (7) и (13) после определенных преобразований из (14) получаем, что соотношение (10) является верное.

*Замечание* 1. Условие эргодичности (10) имеет вероятностный смысл. Действительно, левая часть неравенства (10) представляет собой взвешенную общую интенсивность поступления в орбиту первичных заявок (при условии отсутствия запасов) и заявок, которые поступают в результате обратной связи (при наличии запасов), а правая часть (10) определяет взвешенную интенсивность поступления заявок с орбиты (когда уровень запасов больше нуля). Следовательно, соотношение (10) означает следующее: взвешенная общая интенсивность заявок на орбиту должна быть меньше, чем взвешенная интенсивность повторных заявок, поступающих с орбиты. Условие (10) может быть заменено грубым, но в то же время легко проверяемым условием $\lambda max(1-\alpha, 1-\beta) < \eta$ .

*Замечание* 2. При $\beta = 1$ (т.е. при отсутствии эффекта обратной связи) найденное здесь условие эргодичности (10) полностью совпадает с условием, полученное в работе [8] при допущении о том, что интенсивности порчи запасов не зависит от их уровня.

Стационарное распределение вероятностей, соответствующее генератору $G$ обозначим через $p = (p_0, p_1, p_2, \dots)$ , где $p_n = \left(p(n,0), p(n,1), \dots, p(n,S)\right), n = 0,1, \dots$. При выполнении условие эргодичности (10) искомые вероятности состояний вычисляются из следующих уравнений:

$$p_n = p_0 R^n, n \geq 1, \qquad (15)$$

где $R$ является минимальное неотрицательное решение следующей матрично-квадратичное уравнение:

$$R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = 0.$$

Граничные вероятности $p_0$ находятся из следующих систем уравнений с нормирующим условием:

$$p_0(B + R A_2) = 0.$$

$$p_0(I - R)^{-1} e = 1 \ , \qquad (16)$$

где $I$ является единичная матрица размерности $S + 1$.

### Характеристики системы

После вычисления стационарных вероятностей состояний построенной 2D МС с помощью системы уравнений (15), (16) удается вычислить основные характеристики системы.

- Средний уровень запасов ($S_{av}$):

$$S_{av} = \sum_{m=1}^{S} m \sum_{n=0}^{\infty} p(n,m); \qquad (17)$$

- Средний размер заказов ($V_{av}$):

$$V_{av} = \sum_{m=S-s}^{S} m \sum_{n=0}^{\infty} p(n, S-m); \qquad (18)$$

- Среднее число $r$-заявок в орбите ($L_o$):

$$L_o = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=0}^{S} p(n,m); \qquad (19)$$

- Средняя интенсивность заказов ($RR$):

$$RR = (\lambda + (s+1)\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} p(n, s+1) + \eta \sum_{n=1}^{\infty} p(n, s+1); \qquad (20)$$

- Средняя интенсивность уничтожения запасов системы($RDC$):

$$RDC = \kappa \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} p(n,0)\right); \qquad (21)$$

- Вероятность потери $c$-заявок $\left(P_p\right)$:

$$P_p = \left(1 - H_p\right) \sum_{n=0}^{\infty} p(n,0). \qquad (22)$$

- Вероятность потери $r$-заявок ($P_r$):

$$P_r = H_r \sum_{n=1}^{\infty} p(n,0). \qquad (23)$$

Используя современные пакеты прикладных программ для решения матричных уравнений (15),(16) удается вычислить характеристики (17)-(23), и таким образом, реализуется численное решение поставленной задачи. В последующих работах планируется анализ проведенных численных экспериментов.

### Выводы

Предложена марковская модель системы обслуживания-запасания с мгновенным обслуживанием, обратной связью и повторными заявками. Если уровень запасов равен нулю, то поступившие из вне расходующие заявки могут либо уходить из системы, либо присоединиться в орбиту для повторения их запроса в будущем. Аналогичным образом расходующие заявки после получения запаса могут либо уходить из системы, либо они становятся заявками обратной связи и присоединиться в орбиту для повторения их запроса в будущем. Интенсивность заявок с орбиты не зависит от числа повторных заявок в орбите и имеет постоянное значение. Заявки с орбиты получают запасы мгновенно при их наличии, иначе эти заявки либо окончательно покидают орбиту, либо остаются там для повторения своих запросов в будущем. В системе существует еще и пуассоновский поток разрушающих заявок, которые не требуют обслуживания, но в моменты их поступления уровень запасов мгновенно уменьшается на единицу, а если в этот момент уровень запасов равно нулю, то эти заявки не влияют на работу системы. В системе принята политика пополнения запасов, согласно которой после выполнения заказа склад системы заполняется полностью.

Показано, что математической моделью исследуемой системы обслуживания-запасания является некоторая двумерная цепь Маркова с бесконечным пространством состояний. Получено условие эргодичности построенной цепи Маркова и предложен матрично-геометрический метод для вычисления ее стационарных вероятностей состояний. На основе стационарных вероятностей состояний найдены формулы для определения основных характеристик системы.

***Литература***

1. *Rubal'skii G.B.* Stochastic theory of inventory control // Automation & Remote Control. 2009. – V. 70. – Iss. 12. – P. 2098-2108.

2. *Schwarz M., Daduna H.* Queuing systems with inventory management with random lead times and with backordering // Mathematical Methods of Operations Research. – 2006. – V. 64. – Iss. 3. – P. 383-414.

3. *Sigman K., Simchi-Levi D.* Light traffic heuristic for an M/G/1 queue with limited inventory // Annals of Operations Research. – 1992. – V. 40. – P. 371-380.

4. *Melikov A.Z., Molchanov A.A.* Stock optimization in transport/storage systems // Cybernetics. – 1992. – V. 28. – Iss. 3. – P. 484-487.

5. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Narayanan W.* Inventory with positive service time: a survey // Advanced Trends in Queueing Theory. Series of Books "Mathematics and Statistics" Sciences. Anisimov V., Limnios N. (Eds.). – London: ISTE & Wiley, 2021. – V. 2. – P. 201-238.

6. *Nahmias S.* Perishable inventory theory. – Heidelberg: Springer, 2011. – 79 p.

7. *Karaesmen I., Scheller-Wolf A., Deniz B.* Managing perishable and aging inventories: Review and future research directions // Planning production and inventories in the extended enterprise. A state of the art handbook. (Eds. Kempf K., Keskinocak P, Uzsoy P.). – Springer, 2011. – V. 1. – P. 393-438.

8. *Melikov A., Shahmaliyev M., Sztrik.* Matrix-geometric solutions for the models of perishable inventory systems with a constant retrial rate // Proc. of the 24th International Conference on Distibuted Computer and Communication Networks. – Moscow, 21-24 Sept, 2021. – P. 51-59.

9. *Neuts M.F.* Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach. – Baltimore: John Hopkins University Press, 1981. – 352 p.

**Алиева С.Г.**

## МАТРИЧНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ-ЗАПАСАНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И РАЗРУШАЮЩИМИ ЗАЯВКАМИ

*В данной работе предложена марковская модель системы обслуживания-запасания с мгновенным обслуживанием, обратной связью, первичными и повторными расходующими заявками различных типов и разрушающими заявками. Первичные заявки формируют пуассоновский поток и при наличии запасов они мгновенно получают запасы. Если в момент поступления первичной заявки уровень запасов равен нулю, то эта заявка согласно схеме Бернулли либо покидает систему, либо уходит в бесконечный буфер для* *повторения своего запроса в будущем. Интенсивность повторных заявок является постоянной величиной и если в момент поступления повторной заявки уровень запасов равен нулю, то эта заявка согласно схеме Бернулли либо покидает орбиту, либо остается в орбите для повторения своего запроса в будущем. Разрушающие заявки также формируют пуассоновский поток, однако в отличие от расходующих заявок они не требуют обслуживания, так как в момент поступления такой заявки уровень запасов мгновенно уменьшается на единицу. В системе принята политика пополнения запасов, согласно которой в момент поступления склад системы заполняется полностью. Время выполнения заказа является случайная величина, которая имеет показательное распределение. Показано, что математической моделью изучаемой системы является некоторая двумерная цепь Маркова с бесконечным пространством состояний. Разработан алгоритм для вычисления элементов производящей матрицы построенной цепи и найдено условие эргодичности данной цепи. Для вычисления стационарных вероятностей состояний используется матрично-геометрический метод. Найдены формулы для вычисления основных характеристик системы.*

***Ключевые слова:*** *система обслуживания-запасания, обратная связь, расходующие заявки, повторные заявки, разрушающие заявки, матрично-геометрический метод.*

**Aliyeva S.H.**

**MATRIX-GEOMETRIC METHOD TO STUDY QUEUEING-INVENTORY SYSTEM WITH FEEDBACK AND DESTRUCTIVE CUSTOMERS**

*In this paper, we propose a Markov model of a queueing-inventory system with instant service, feedback, primary and repeated spending customers of various types, and destructive customers. Primary orders form a Poisson flow and, if stocks are available, they instantly receive stocks. If at the moment of receipt of the initial request the stock level is equal to zero, then this request, according to the Bernoulli scheme, either leaves the system or goes into an infinite buffer to repeat its request in the future. The intensity of repeated requests is constant, and if at the moment of receipt of a repeated request the level of reserves is zero, then this request, according to the Bernoulli scheme, either leaves orbit or remains in orbit to repeat its request in the future. Destructive customers also form a Poisson flow, however, unlike spending customers, they do not require servicing, since at the moment such a customer arrives, the inventory level instantly decreases by one. The system has adopted a replenishment policy, according to which, at the time of receipt, the system's warehouse is completely filled. Lead time is a random variable that has an exponential distribution. It is shown that the mathematical model of the system under study is a two-dimensional Markov chain with an infinite state space. An algorithm for calculating the elements of the generating matrix of the constructed chain has been developed and the ergodicity condition for this chain has been found. To calculate the stationary probabilities of states, a matrix-geometric method is used. Formulas are found for calculating the main characteristics of the system.*

***Keywords:*** *queueing-inventory system, feedback, spending customers, repeated customers, destructive customers, matrix-geometric method.*