

## ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПРОБЛЕМИ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ В ЗАДАЧІ ДИСКРЕТНОГО ЛОГІСТИЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

Національний науково-дослідний центр оборонних технологій і воєнної безпеки України

*В роботі досліджено фізичний зміст умов виникнення детермінованого хаосу при розв'язанні дискретних логістичних рівнянь, які використовуються при моделюванні воєнно-економічних процесів. Введено поняття та знайдені умови «зриву» прогнозування. Досліджена залежність помилок прогнозування від параметрів логістичних рівнянь. Отримані результати дозволяють управляти якістю дискретного прогнозування воєнно-економічних процесів.*

Збройні Сили України знаходяться в трансформаційному стані, який містить багато невизначеностей. Це робить актуальним питання побудови автоматизованих систем оперативної підтримки управлінських рішень щодо оборонного планування процесів реформування та розвитку Збройних Сил України, в яких негайне отримання задовільного рішення цінніше, ніж отримання відмінного через деякий час.

Тому, актуальною є розробка методів моделювання процесів реформування та розвитку Збройних Сил України на підставі спрощених моделей. Одним з варіантів останнього є використання логістичних рівнянь [1, 2], перевагою яких є можливість суттєвого спрощення моделей без втрати адекватності, завдяки синергетичних властивостей добутоків та складних *SL*-функцій, які в [3] розглянуті на прикладі моделювання воєнно-економічних процесів. Але в деяких випадках була виявлена особливість розв'язання дискретних логістичних рівнянь у вигляді, так званого, детермінованого хаосу [4]. У [4, 5] умови виникнення хаосу розглянуті для спрощеного логістичного рівняння, без врахування певних параметрів, які є важливими для побудови моделей реальних об'єктів, оскільки саме вони і надають цим рівнянням індивідуальний фізичний зміст.

Актуальним є питання дослідження фізичного змісту умов виникнення та шляхів запобігання виникненню детермі-

нованого хаосу при розв'язанні дискретних рівнянь, які описують воєнно-економічні процеси розвитку Збройних Сил України.

Метою статті є з'ясування фізичного змісту умов виникнення та шляхів запобігання виникненню детермінованого хаосу при розв'язанні дискретних логістичних рівнянь, які описують воєнно-економічні процеси розвитку.

Відоме диференціальне логістичне рівняння [6] задамо у більш узагальненому вигляді (1) [3]

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot (x - X_{\min}) \cdot (X_{\max} - x), \quad (1)$$

де  $x$  – вихідна кількість ресурсу;  $X_{\min}$ ,  $X_{\max}$  – нижнє та верхнє обмеження на ресурс;  $k > 0$  – коефіцієнт. В (1) вхідним ресурсом є час. В загальному випадку вхідними ресурсами також можуть бути фазові координати чи управління. Розглянемо приклади використання (1) в моделях воєнно-економічних процесів.

**Приклад 1.**  $X_{\min} = 0$ . Засвоєння оборонної технології.  $x$  – рівень розвитку технології. Чим вище  $x$ , тим швидше засвоюються нові можливості технології. По мірі вичерпання можливостей технології (наближення  $x$  до  $X_{\max}$ ) її розвиток уповільнюється. Подальший зріст потребує зміни технологій.

**Приклад 2.**  $X_{\min} = 0$ . Бойова підготовка.  $x$  – рівень бойової підготовки. Чим вищий рівень підготовки, тим швид-

ше відбувається подальша підготовка. При наближенні до межі людських можливостей  $X_{\max}$  зріст уповільнюється. Для подальшого зросту рівня бойової підготовки необхідно включити до програми навчання принципово нові види вправ.

**Приклад 3.**  $X_{\min} > 0$ . Впровадження технології замість застарілої, але стійко працюючої. Наприклад, впровадження автоматизованої системи прицілювання замість ручної. Якщо нова технологія знає невдачі  $x = 0$ , можна повернутися до старої і мати позитивну ефективність процесу.

Для базової безперервної моделі (1) позначимо  $x_i, x_{i+1}$  фазові координати в  $i$ -й,  $i+1$ -й суміжних точках та запишемо рівняння дискретного логістичного прогнозування

$$x_{i+1} = \mu \cdot \left( -x_i^2 + \left( a + \frac{1}{\mu} \right) \cdot x_i - d \cdot (a + d) \right) = \varphi_1(x_i), \quad (2)$$

параметри якого можливо ідентифікувати за даними окремих дискретних вимірів або співвідношень

$$\mu = \Delta t \cdot k, \quad a = X_{\max} - X_{\min}, \quad d = X_{\min},$$

де  $\Delta t$  – період дискретизації. Точкове відображення  $\varphi_1$  пов'язує дискретні точки рішень рівняння (2), які слідує одна за одною. Індекс при  $\varphi$  означає певний тип відображення  $\varphi_1, \varphi_2$  або  $\varphi_3$ . Відсутність індексу означає, що властивості, які розглядаються, притаманні всім типам точкових відображень в даній статті.

Розглянемо математичні умови виникнення нестійкості дискретної моделі (2), які в подальшому супроводимо фізичною інтерпретацією. Відображення  $\varphi$  можна представити діаграмою Ламерея [5] (рис. 1а-7а), тобто ламаної, яка послідовно переходить з початкової абсциси  $X_i$  по вертикалі до перетинання з графіком функції  $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ , потім по горизонталі до перетинання з графіком  $x_{i+1} = x_i$  і так далі.

Відоме явище «універсальності Фейгенбаума», яке в [5] розглянуто на прикладі однопараметричного квадратичного відображення

$$x_{i+1} = \mu \cdot x_i \cdot (1 - x_i) = \varphi_3(x_i). \quad (3)$$

$\varphi_3$  зручне для виявлення математичних закономірностей появи детермінованого хаосу та є окремим випадком  $\varphi_1$  за умовою припущень

$$a = 1 - \frac{1}{\mu}, \quad (4)$$

$$d = 0. \quad (5)$$

Точки рівноваги  $x^*$  відображення  $\varphi$  знаходяться на перетинанні графіків  $x_{i+1} = \varphi(x_i)$  та  $x_{i+1} = x_i$  або аналітично з рівняння

$$x^* = \varphi(x^*). \quad (6)$$

Якщо (6) не має рішень, то точки рівноваги відсутні. Для визначення якісних умов рівноваги (стійкості або нестійкості)  $x^*$ , в багатовимірному випадку розраховують мультиплікатори  $\alpha_{j,k} = \left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i^k} \right|_{x^*}$ .

Якщо для всіх мультиплікаторів  $|\alpha_{j,k}| < 1$ , то  $x^*$  – стійка. Якщо знайдуться такі, що  $|\alpha_{j,k}| > 1$ , то  $x^*$  – нестійка [5], що є ознакою можливості хаотичної зміни  $x$ .

Для  $\varphi_3$  умови стійкості  $x_1, x_2$  знаходимо після їх підстановки в вираз для мультиплікатора  $\alpha(x^*) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x^*} = \mu(1 - 2x^*)$  (табл. 1).

При  $\mu > 1$  властивість стійкості переходить від точки  $x_1$  до  $x_2$ . При  $\mu > 3$   $x_2$  втрачає стійкість,  $\varphi_3$  переживає біфуркацію подвоєння періоду, яка створює стійкий двократний цикл на підставі двох двократних точок рівноваги [5]

$$x_{3,4} = 0.5\mu^{-1} \left( \mu + 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3} \right).$$

Точка рівноваги	Мультиплікатор	Умови стійкості точки рівноваги	Діапазон припустимих значень для збереження стійкості точки рівноваги
$x_1 = 0$	$\alpha(x_1) = \mu$	$ \mu  < 1$	$\mu \in [-1, 1]$
$x_2 = 1 - \frac{1}{\mu}$	$\alpha(x_2) = 2 - \mu$	$ 2 - \mu  < 1$	$\mu \in [1, 3]$

Умовами існування  $x_{3,4}$ , як це слідує з підкорінного виразу, є  $\mu \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ . Подальше збільшення  $\mu$  призводить до втрати стійкості поточними стійкими точками в результаті біфуркації подвосення періоду, тобто виникнення нових стійких точок кратності  $2^m$ , які будуть створювати стійкі цикли порядку  $2^m$ , де  $m = 1, 2, \dots, \infty$ . Послідовність значень  $\mu_m$ , при яких відбувається біфуркація, підкоряється співвідношенню, яке визначає універсальну сталу Фейгенбаума  $\delta$  [5].

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{\mu_m - \mu_{m-1}}{\mu_{m+1} - \mu_m} \right] = \delta = 4.6692\dots$$

Біфуркаційний режим буде мати місце для значень  $1 < \mu < \mu_\infty \approx 3.5699$ . Для  $\mu_\infty < \mu < 4$  буде мати місце хаотичний режим. Тобто, поза діапазоном  $\mu \in [-1, 1]$   $\varphi_3$  породжує хаотичну поведінку рішень. Але в залежності від початкових точок інтегрування та величини  $\mu$  в околиці стійких циклів можуть з'являтися рішення, якісний характер яких за зовнішнім виглядом буде схожий на детермінований (періодичний коливальний процес біля аналітичної асимптоти). В обох режимах, як в хаотичному, так й в біфуркаційному, поза діапазоном  $\mu \in [-1, 1]$  результатах чисельного розв'язання рівняння (3) довіряти не слід.

З точки зору моделювання реальних об'єктів та ясності розуміння фізичного сенсу параметрів, які входять до виразу відповідного точкового відображення і

уособлюють фізичний зміст задачі, більш наочним і корисним ніж  $\varphi_3$  є відображення  $\varphi_1$ . Припущення (5) може бути прийнято для багатьох практичних задач (прикладі 1, 2), але (4) застосувати на практиці набагато важче. Аналогічно тому, як це було зроблено для  $\varphi_3$ , проаналізуємо властивості  $\varphi_1$  та його окремого випадку  $\varphi_2$  (табл. 2).

З виразу для точок рівноваги  $\varphi_1$ , додаткові умови існування  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  сформулюємо у вигляді  $-0.5a(1 + \sqrt{2}) < d < 0.5a(\sqrt{2} - 1)$ . Наприклад, припущення (5) відображення  $\varphi_2$  цій умові задовольняє завжди.

Більшість залежностей табл. 2 для  $\varphi_3$  простіше ніж для  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , що спрощує математичні викладки, але ускладнює розв'язання практичних задач, оскільки зворотний перехід до реальних об'єктів, в яких не виконуються припущення (4,5), неможливий. Спрощення задачі  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$  або  $\varphi_3$  виконується у відповідності до постановки задачі та для перевірки вірності математичних викладок для  $\varphi_1$  в часткових випадках  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ .

Зміна якісної картини чисельного розв'язання дискретних рівнянь відображення  $\varphi_2$  при різних  $\mu$ , проаналізована в табл. 3 та на рис. 1-7, на яких у лівій частині (а) зображені діаграми Ламерея, у правій (б) порівняння рішень, знайдених чисельно (x4) та аналітично (x5).

Таблиця 2

Відображення	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$
Припущення	-	$d = 0$	$d = 0; a = 1 - \frac{1}{\mu}$
$\varphi(x)$ з урахуванням припущень	$\mu \left( -x^2 + \left( a + \frac{1}{\mu} \right) x - d(a+d) \right)$	$\mu x \left( a + \frac{1}{\mu} - x \right)$	$\mu x(1-x)$
Рівняння для знаходження точок рівноваги $\varphi(x^*) - x^* = 0$	$\mu(-x^{*2} + ax^* - d(a+d)) = 0$	$\mu x^*(a-x^*) = 0$	$\mu x^* \left( 1 - \frac{1}{\mu} - x^* \right) = 0$
Мультиплікатор $\alpha(x^*) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big _{x^*}$	$\mu \cdot \left( a + \frac{1}{\mu} - 2x^* \right)$	$\mu \cdot \left( a + \frac{1}{\mu} - 2x^* \right)$	$\mu \cdot (1 - 2x^*)$
Точки рівноваги			
$x_1^*$ $x_2^*$	$\frac{1}{2} \cdot \left( a \mp \sqrt{a^2 - 4d(a+d)} \right)$	0 a	0 $1 - \mu^{-1}$
Мультиплікатори			
$\alpha(x_1^*)$ $\alpha(x_2^*)$	$1 \pm \mu \cdot \sqrt{a^2 - 4d(a+d)}$	$1 \pm \mu a$	$\mu$ $2 - \mu$
Умови стійкості $x^*$			
$x_1^*$	$-2 < \mu \cdot \sqrt{a^2 - 4d(a+d)} < 0$	$-2 < \mu a < 0$	$-1 < \mu < 1$
$x_2^*$	$0 < \mu \cdot \sqrt{a^2 - 4d(a+d)} < 2$	$0 < \mu a < 2$	$1 < \mu < 3$

Таблиця 3

Систематизація варіантів поведінки відображення  $\varphi_2$  в залежності від зміни параметрів в околиці точки рівноваги  $x_2^* = a$  ( $a=30$ ).

Рис.	$\mu$	$\mu a$	$\alpha = 1 - \mu a$	Стійкість $x_2^*$	Поведінка рішення в околиці $x_2^*$
Рис.1	0.005		$0 < \alpha < 1$	Стійка	Якісна адекватність. Чисельні похибки.
Рис.2	0.033	1	$\alpha = 0$	- // -	Початок порушень якісної адекватності. Похибка припустима.
Рис.3	0.043		$\alpha < 0$	- // -	- // -
Рис.4	0.067	2	$\alpha = -1$	Нестійка	Коливальний процес. Похибка неприпустима.
Рис.5	0.075		$\alpha < -1$	- // -	Хаос. Похибка неприпустима.
Рис.6	1.0	3	$\alpha = -2$	- // -	- // -
Рис.7	1.0001		$\alpha < -2$	- // -	Зрив

При  $0 < \mu a < 1$ , чисельне рішення є якісно подібним аналітичному (точному), має у порівнянні з ним деяку похибку, але впевнено сходиться до стійкої точки рівноваги (рис. 1-2).

При  $\mu a = 1$  для  $\varphi_2$  ( $\mu \cdot \sqrt{a^2 - 4d(a+d)} = 1$

для  $\varphi_1$ ) (рис. 2) якісна поведінка рішення змінюється: збільшується амплітуда коливань, середня, середня квадратична та максимальні значіння помилок. При  $\mu a = 1$  змінює знак мультиплікатор та відображення  $\varphi_2(x_i)$  геометрично «пірнає»

під точкою  $\{x_2^*, \varphi_2(x_2^*)\}$  справа наліво. Подальше збільшення  $\mu a$  та, відповідно,  $|\alpha_{j,k}|$  помітно погіршує якість рішення (рис. 3). При  $|\alpha_{j,k}|=1$  спостерігається коливальний процес (рис. 4). При  $\mu a > 2$ ,  $x_2^*$  стає нестійкою, що веде до хаотичної поведінки  $x$  (рис. 5, 6). Як бачимо, зміна  $\mu$  всього в 1.7 рази (рис. 3, 5) веде до появи хаосу, що підвищує вимоги до вибору періодів дискретизації логістичного рівняння.

Для сходження процедури чисельного розв'язання диференційного рівняння процесу, який за фізичним сенсом оперує лише з невід'ємними величинами, важливо, щоб стійкою була саме ненульова

точка рівноваги, координата якої дорівнює амплітуді, тобто відстані між двома асимптотами логістичної функції. Для багатьох практичних задач достатньо забезпечити умови  $\mu a < 2$  для  $\varphi_2$  ( $\mu \cdot \sqrt{a^2 - 4d(a+d)} < 2$  для  $\varphi_1$ ). Для покращення якісної картини рішення необхідні більш суворі обмеження  $\mu a < 1$  для  $\varphi_2$  ( $\mu \cdot \sqrt{a^2 - 4d(a+d)} < 1$  для  $\varphi_1$ ).

Для реальних задач, в яких змінні мають конкретний фізичний сенс, можливим є «зрив» значень рішення у фізично неможливу від'ємну область (рис. 7). Допоміжні вирази узагальнимо в табл. 4.

Таблиця 4

Додаткові властивості відображень та умови «зриву»

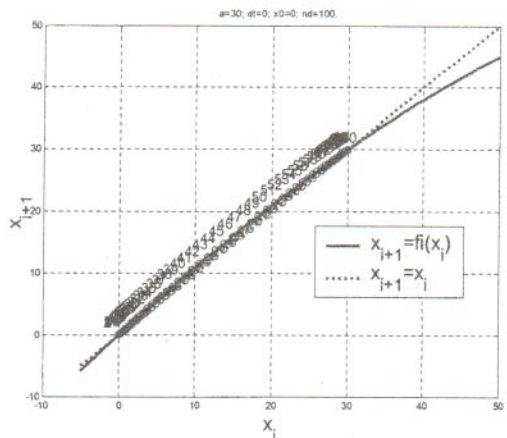
Позначення відображення	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$
Точки пересічення з віссю абсцис $x_1; x_2$	$0.5 \left( a + \frac{1}{\mu} \mp \sqrt{\left( a + \frac{1}{\mu} \right)^2 - 4d(a+d)} \right)$	$x_1 = 0;$ $x_2 = a + \mu^{-1}$	$x_1 = 0;$ $x_2 = 1$
Точка екстремуму $x_{\max}$	$0.5(a + \mu^{-1})$	$0.5(a + \mu^{-1})$	0.5
$\varphi(x_{\max})$	$0.25\mu(a + \mu^{-1})^2 - \mu d(a+d)$	$0.25\mu(a + \mu^{-1})^2$	$0.25\mu$
Умови «зриву»		$\mu a > 3$	$\mu > 4$

Зрив є можливим, якщо найбільша ордината відображення  $\varphi$  більше абсциси найправішої точки перетинання графіку відображення з віссю абсцис  $\varphi(x_{\max}) > x_2^*$ . Наведемо відповідний вираз для  $\varphi_2$ , перетворимо і знайдемо умови «зриву»:

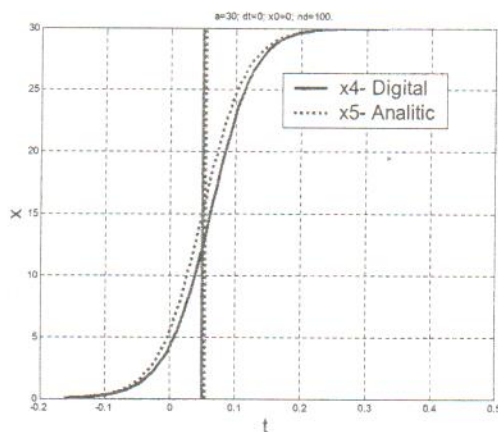
$$\begin{aligned} \varphi(x_{\max}) &> a + \mu^{-1}; \\ 0.25\mu(a + \mu^{-1}) - 1 &> 0; \mu a > 3. \end{aligned} \quad (7)$$

Як слідує з (7), чим більше  $\mu$ , тим швидше може відбутись «зрив». При цьо-

му для точки екстремуму відображення зі «зривом» виконуються співвідношення  $x_{\max} < \frac{1}{2} \left( a + \frac{a}{3} \right) = \frac{2}{3} a$ ;  $\varphi(x_{\max}) > \frac{4}{3} a$ . Підставляючи припущення (4) в (7) отримуємо аналогічний вираз для  $\varphi_3$ . Для відображення  $\varphi_1$  умови «зриву» знаходяться аналогічно, але кінцеві вирази більш складні.

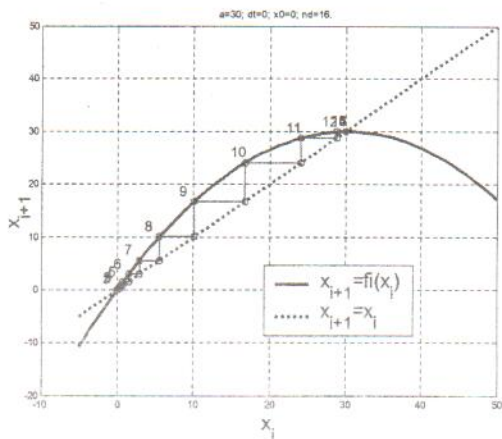


a)

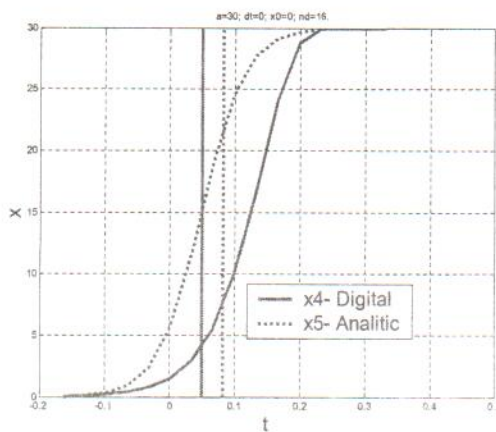


б)

Рис. 1. Відображення  $\varphi_2(x_i)$ ,  $x(t)$  при  $\mu=0.005$

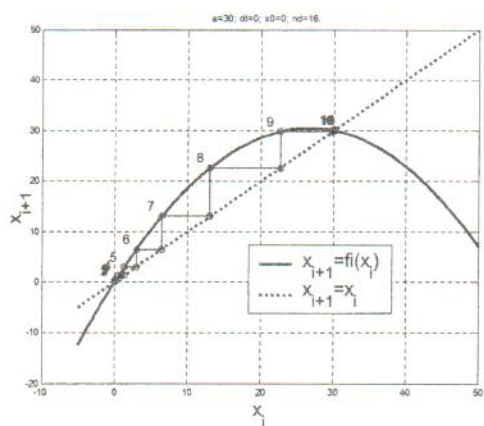


a)

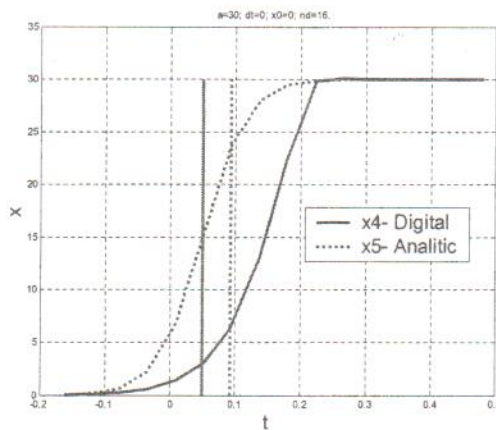


б)

Рис. 2. Відображення  $\varphi_2(x_i)$ ,  $x(t)$  при  $\mu=0.03$



a)



б)

Рис. 3. Відображення  $\varphi_2(x_i)$ ,  $x(t)$  при  $\mu=0.043$

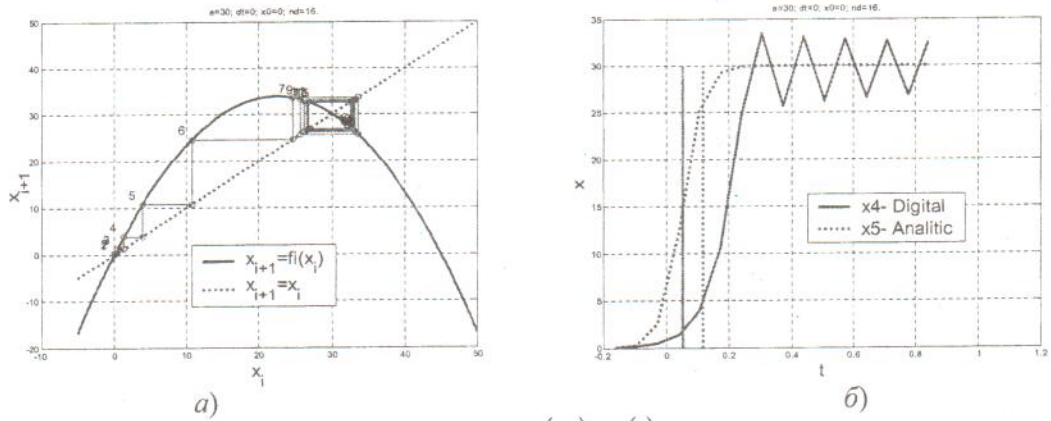


Рис. 4. Відображення  $\varphi_2(x_i)$ ,  $x(t)$  при  $\mu=0.067$

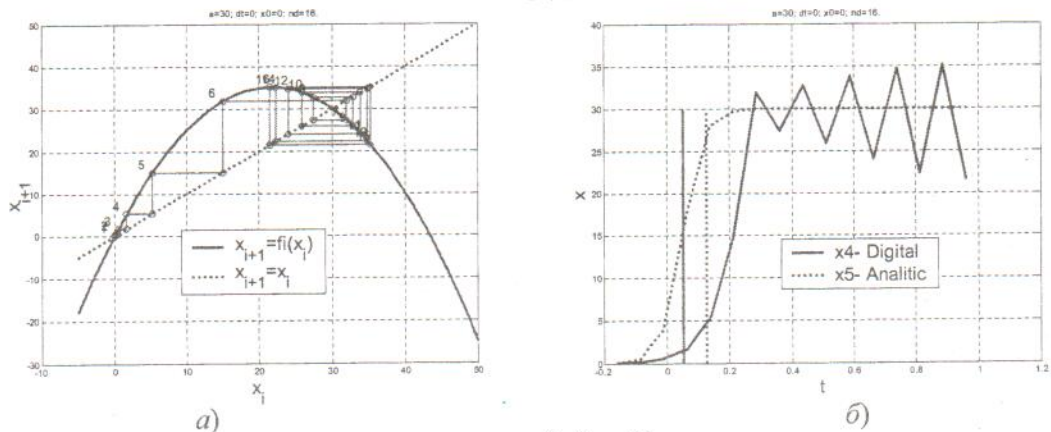


Рис. 5. Відображення  $\varphi_2(x_i)$ ,  $x(t)$  при  $\mu=0.075$

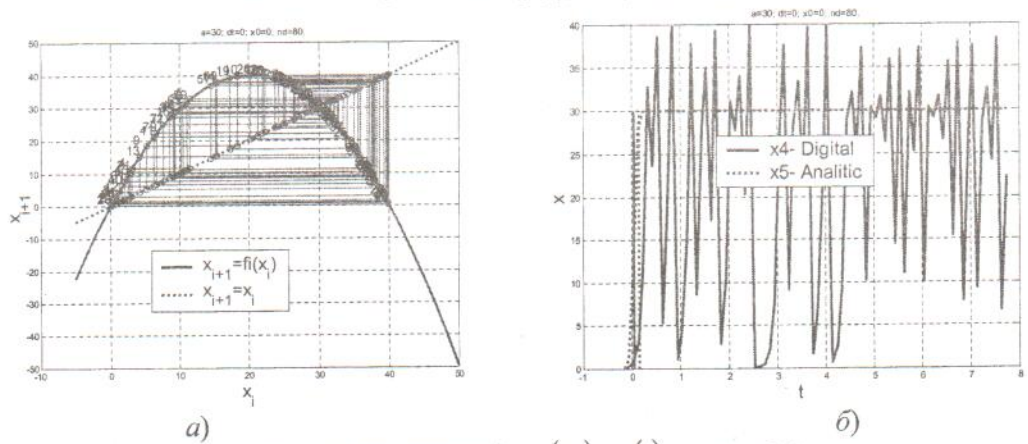


Рис. 6. Відображення  $\varphi_2(x_i)$ ,  $x(t)$  при  $\mu=0.1$

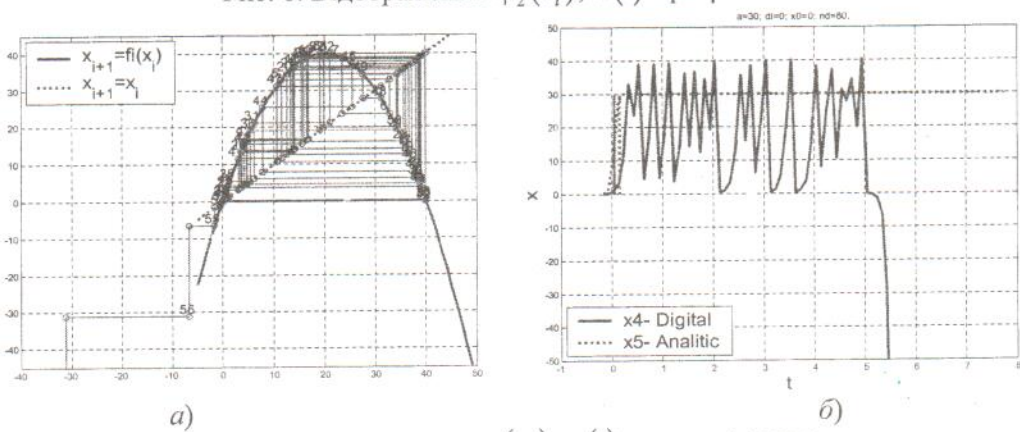


Рис. 7. Відображення  $\varphi_2(x_i)$ ,  $x(t)$  при  $\mu=0.10001$

Оскільки  $\mu = \Delta t \cdot k$ , то єдиним параметром, що управляється, є період дискретизації  $\Delta t$ . Зменшення  $\Delta t$  знижує локальну похибку, але збільшує кількість кроків рішення, сумарну похибку на всьому періоді рішення [7] та вимоги до обчислювальних ресурсів. Хоча з похибкою можна змиритися, якщо вона не пошкоджує якісну картину рішення.

Помилки рішення дискретних логістичних рівнянь (рис. 1б-7б) поділимо на ті, що ведуть до горизонтального зсуву рішення вздовж вісі абсцис  $t_{Shift}$  та ті, що залишаються після усунення горизонтального зсуву. Якщо усунути горизонтальну похибку, яка залежить від  $\mu = \Delta t \cdot k$  та початкових умов  $x_0$  (рис. 11), то чисельні та аналітичні рішення можуть майже співпадати. При оцінці похибок будемо використовувати саме незсунуті залежності, оскільки вони більш інформативні при оцінці зв'язку параметрів рівнянь, похибок чисельного рішення та умов виникнення хаосу.

Горизонтальні похибки зменшуються при збільшенні  $x_0$  (рис.11), оскільки розв'язання при цьому починається з ділянки, в якій швидкість зміни величини похідної менше, тобто дотична до графіку точного рішення у вузлі рішення більше співпадає з точним рішенням на протязі періоду дискретизації. Для всіх  $x_0$  горизонтальна похибка майже лінійно залежить від  $\Delta t$  та  $\mu$ . Основна частка системної похибки формується на початкової ділянці біля нижньої асимптоти. Похибка біля верхньої асимптоти не так сильно порушує якісну картину рішення, оскільки у переважній більшості практичних задач важливіше знати як процес розвитку розпочинається, ніж як він входить в зону насичення.

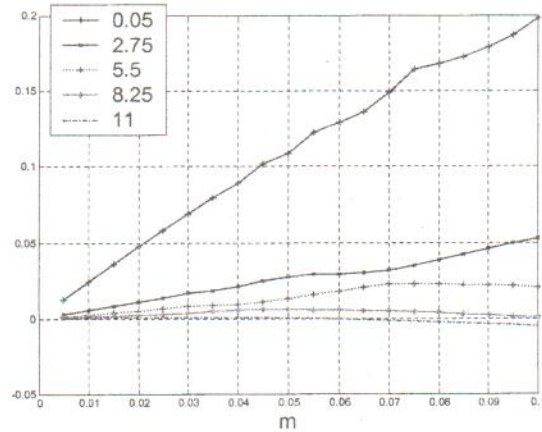


Рис. 11. Залежність  $t_{Shift}(m = \mu = \Delta t \cdot k, x_0)$  величини горизонтального зсуву в точці симетрії чисельно знайденого рішення ( $x_4$ ) у порівнянні з аналітичним для  $\mu = \Delta t \cdot k \in [0.005, 0.1]$ ,  $x_0 \in \{0.05; 2.75; 5.5; 8.25; 11\}$

Залежності середніх, середньоквадратичних та максимальних похибок від  $\mu$  для незсунутих чисельних рішень (рис. 12), мають різкі зміни кутів нахилу в точках  $\mu a = 1$ ,  $\mu a = 2$  та повний зрив прогнозування при  $\mu a = 3$ , що підтверджує теоретичні результати щодо положення точок зміни якісної картини чисельного рішення (табл. 2-4). Середня та середньоквадратична похибки несуттєво залежать від  $x_0$  (рис. 13).

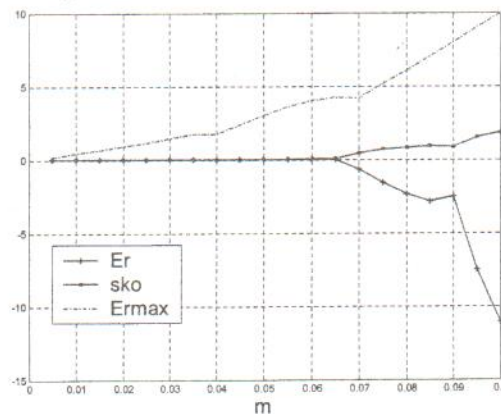


Рис. 12. Залежності середньої, середньоквадратичної та максимальної похибок від різних  $m = \mu$  для «незсунутих» чисельних рішень

Таким чином, в роботі досліджені умови виникнення хаосу при розв'язанні дискретних логістичних рівнянь. Відомий абстрактно-математичний результат «уні-



версальності Фейгенбаума» у даній статті поширений на клас рівнянь, які використовуються при моделюванні воєнно-економічних процесів. Введено поняття та знайдені умови «зриву» прогнозування. Проведено відповідне моделювання. Досліджені залежності характеристик похибок від параметрів логістичних рівнянь. Знання умов виникнення характерних якісних картин поведінки чисельних рішень логістичних рівнянь дозволяє сформулювати такі управляючі впливи на процедуру інтегрування, які дозволяють забезпечити задовільну адекватність моделювання. Результати відносяться до синергетичної теорії управління та є корисними з точки зору практичного застосування в моделюванні воєнно-економічних процесів.

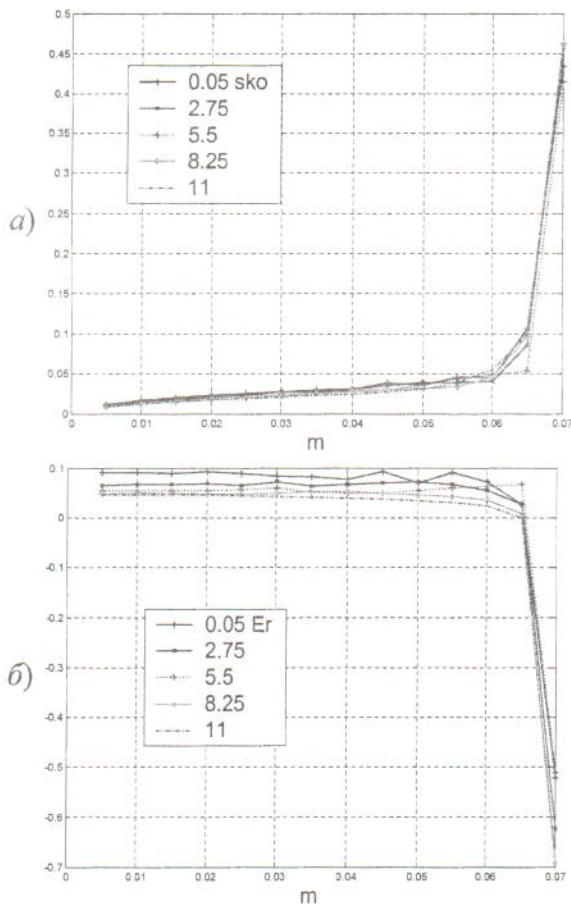


Рис. 13. Похибки чисельного рішення для різних початкових умов  $x_0 \in \{0.05; 2.75; 5.5; 8.25; 11\}$ . а) середньоквадратична похибка; б) середня похибка

Напрямом подальшого дослідження має бути поширення досліджень умов виникнення хаосу на інші класи детермінованих рівнянь в моделях воєнно-економічних процесів. Особливу увагу слід приділити багатовимірним випадкам та їх впровадженню в практику моделювання.

### Список літератури

1. Verhulst P. F. Notis surla quella population suit dans son acoroissement // Corresp. Math. Phys. 10, 1838. – P. 113-121.
2. Pearl R., Reed L. I. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. – Proc. Nat. Acad. Sci., (Wash) 6, 1930. – P. 275-288.
3. Шевченко В. Л. Застосування залежностей з обмеженням зросту для спрощення побудови прогнозуючих моделей воєнно-економічних процесів// Зб. наук. праць. Вип. 4 (24) / Редкол.: Шпура М.І. (голова) та ін. – Київ: ННДЦ ОТ і ВБ України, 2004. – С. 102-110
4. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение: Пер. с англ.- М.: Мир, 1988. – 240 с.
5. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику: Учеб. руководство. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 272 с.
6. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с.
7. Турчак Л. И. Основы численных методов: Учеб. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.