

УДК 519.81:621.372

Засядько А. А., канд. техн. наук

## ЗАСТОСУВАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ПРОЦЕСУ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

Черкаський національний університет

У даній роботі неточно задані системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зводиться диференціальна модель задачі відновлення сигналів, пропонується розв'язувати за допомогою багатокритеріальної оптимізації. Частинні критерії по стійкості і точності утворюють багатокритеріальну цільову функцію, що являє собою нелінійну схему компромісів. Отриманий розв'язок є оптимальним.

### Постановка проблеми і аналіз публікацій.

Обчислювальні алгоритми, засновані на диференціальних тейлоровських перетвореннях (ДТ-перетворення) [1, 2], успішно застосовуються для розв'язання багатьох прикладних задач, що описуються диференціальними рівняннями: наприклад, для задачі знаходження оптимальних процесів керування. За допомогою ДТ-перетворень диференціальні рівняння зводяться до систем кінцевих рівнянь. У [3] цей підхід використаний для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, якими описується ряд некоректних задач, наприклад, задача відновлення сигналів. Однак необхідно враховувати, що на практиці ДТ-модель зводиться до неточно заданих систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) через використання обмеженої кількості точок розкладання. Тому при розв'язанні таких СЛАР (навіть і низкою розмірності) можуть виникнути труднощі обчислювального характеру при використанні традиційних методів розв'язання СЛАР.

**Мета** даної роботи полягає в дослідженні шляхів рішення проблеми зменшення обчислювальної складності на основі методу багатокритеріальної оптимізації, запропонованої в роботі [4].

**Постановка задачі і моделювання диференціальними перетвореннями.** Процес вимірювання сигналу описується математичною моделлю у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, що дозволяє побудувати на її основі ефективні алгоритми рішення задачі відновлення [5, 6]:

$$\int_{\alpha}^{\beta} Q(x,s) \cdot y(s) ds = f(x), x \in [\delta, \gamma], s \in [\alpha, \beta]. \quad (1)$$

Вирішити задачу відновлення сигналу для рівняння (1) – знайти вигляд сигналу  $y(s)$ , спотвореного вимірювальною апаратурою з апаратною функцією  $Q(x,s)$  у сигнал  $f(x)$ .

У роботі [3] пропонується різні апроксимації невідомого сигналу  $y(s)$ . Від того, наскільки вдало обрана апроксимуюча функція, залежить точність моделювання. Нехай, наприклад, рішення рівняння (1) можна представити у вигляді степенного багаточлена

$$y(s) = \sum_{m=0}^{m=n} c_m s^m, \quad (2)$$

де ступінь багаточлена  $n$  вибирається з особливості конкретної задачі,  $c_i$  – невідомі коефіцієнти. Рішення (1) у такій постановці зводиться до знаходження коефіцієнтів  $c_i$ .

Диференціальними тейлоровськими перетвореннями називаються функціональні перетворення вигляду [1, 2]

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \equiv \Xi x(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left( \frac{t}{H} \right)^k X(k), \quad (3)$$

де  $x(t)$  – оригінал, що представляє собою безупинну й обмежену разом із усіма своїми похідними функцію речовинного аргументу  $t$ , що нескінченне число разів диференціюється;

$X(k)$  – диференціальне зображення оригіналу, що представляє дискретну

(гратчасту) функцію цілочисельного аргументу  $k=0, 1, 2, \dots$ ;

$H$  – масштабна постійна, що має розмірність аргументу  $t$  і часто обирається рівної відрізка  $0 \leq t \leq H$ , на якому сходиться ряд Тейлору;

$\Xi$  – символ відповідності між оригіналом  $x(t)$  і його диференціальним зображенням  $X(k) = \bar{X}(k)$ .

Переведемо (2) в область ДТ-зображень, тоді шуканий розв'язок [1, 2]:

$$Y(k) = \sum_{i=0}^{i=n} C_i H^i \mathcal{b}(k-i), \quad (4)$$

Позначимо підінтегральну функцію в (1)

$$z(x, s) = Q(x, s) \cdot y(s), \quad (5)$$

Представимо розв'язок  $y(s)$  у вигляді аналітичної функції  $y(s, c)$ , де  $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$  – вектор вільних коефіцієнтів, наприклад, у вигляді степенного полінома (2). Для одержання системи рівнянь, що визначають невідомі коефіцієнти  $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , застосуємо диференціальні перетворення (3). Зображення підінтегральної функції (5) визначимо як

$$Z(k, c) = Q(k) * Y(k, c),$$

або

$$Z(k, c) = \sum_{l=0}^{l=k} Q(k-l) \cdot Y(l, c). \quad (6)$$

Визначений інтеграл у межах від  $\alpha$  до  $\beta$  від функції  $z(s)$  по її дискретам в області зображень  $Z(0), Z(1), Z(2), \dots, Z(\infty)$  знаходиться за формулою [1, 2]:

$$\int_{\alpha_c}^{\beta_c} z(s) ds = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left( \frac{\beta_c^{k+1} - \alpha_c^{k+1}}{k+1} \right) \frac{Z(k)}{H^k} =$$

$$= \frac{\beta - \alpha}{1} Z(0) + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2H} Z(1) + \dots$$

де  $\alpha_c = \alpha - s_0$ ,  $\beta_c = \beta - s_0$ ,  $s_0$  – центр розкладання в ряд Тейлору. В окремому випадку  $s_0=0$ .

Розглянемо випадок, коли  $s_0 \neq 0$ . Нехай по (2)

$$y(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + C_4 s^4. \quad \text{По-}$$

значимо  $s = s_0 + \tau$ . Тоді

$$\bar{C}_0 = C_0 + C_1 s_0 + C_2 s_0^2 + C_3 s_0^3 + C_4 s_0^4,$$

$$\bar{C}_1 = C_1 + 2C_2 s_0 + 3C_3 s_0^2 + 4C_4 s_0^3, \quad (8)$$

$$\bar{C}_2 = C_2 + 3C_3 s_0 + 6C_4 s_0^2,$$

$$\bar{C}_3 = C_3 + 4C_4 s_0, \quad \bar{C}_4 = C_4 \quad [4].$$

Аналогічно можна одержати коефіцієнти (8) для будь-якого порядку багаточлена (2). При  $s_0=0$  у (8)  $\bar{C}_i = C_i$ .

Послідовно привласнюючи цілочисельні значення аргументу  $k=1, 2, 3, \dots, 3$  (6), складемо систему рівнянь, кількість рівнянь якої дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів  $c=(c_1, c_2, \dots, c_n)$ :

$$\int_{\alpha_c}^{\beta_c} Z(k, c_i, x_1) ds = f(x_1);$$

....

$$\int_{\alpha_c}^{\beta_c} Z(k, c_i, x_k) ds = f(x_k); \quad (9)$$

де  $x_i$  – фіксовані значення, що вибираються з діапазону меж вимірювання сигналів.

Розв'язуючи систему кінцевих рівнянь (9), знаходимо вектор вільних коефіцієнтів, компоненти якого визначають шукане рішення (6) рівняння Фредгольму першого роду (1).

Переваги моделювання процесу відновлення сигналу на основі ДТ-перетворень полягають у наступному.

1. Відомо, що інтеграли визначаються грубо, тому що їх розкладання в ряди погано сходяться, а розкладання по власних функціях складне з обчислювальної точки зору. Використовуючи точний табличний інтеграл, усувається цей недолік, зв'язаний з похибками наближеного інтегрування.

2. Відомо, що похибка підінтегральної функції слабо позначається на погрішність обчислення інтегралів. Тому апроксимація підінтегральної функції може бути грубою, оскільки розв'язок буде стійким за рахунок фільтра нульового порядку, яким є інтеграл.

3. Система рівнянь (як правило з погано обумовленою матрицею) розпадається на систему кінцевих рівнянь низької розмірності. Це також підвищує обчислювальну стійкість у порівнянні з рішенням систем рівнянь високої розмірності з погано обумовленою матрицею.

Отже, необхідно вирішити СЛАР (9) з невідомими  $c_i$ , кількість яких залежить від ступеня апроксимуючого полінома і від кількості точок розкладання.

Розглянемо особливості вибору інтервалів розбиття змінної  $s$  для найкращої апроксимації підінтегральної функції  $F(x,s)$  локальними рядами Тейлору. На рисунку 1 приведені апроксимації для прикладу (13) у точці розкладання  $s=0$  чотирма членами ряду Тейлору (видні заходи в негативну область) і шістьма членами. Має значення правильний вибір інтервалів розбивки підінтегральної функції, тому що, наприклад, інтервал  $[a'', b'']$ , на відміну від інтервалу  $[a', b']$ , буде давати значні похибки апроксимації для даного ступеня ряду Тейлору через великі заходи у від'ємну область. При збільшенні ступеня ряду Тейлору, можливе ускладнення ДТ-моделі рівняння (1). З малюнка видно, що для шостого ступеня ряду Тейлору можна використовувати весь інтервал  $[a, b]$ .

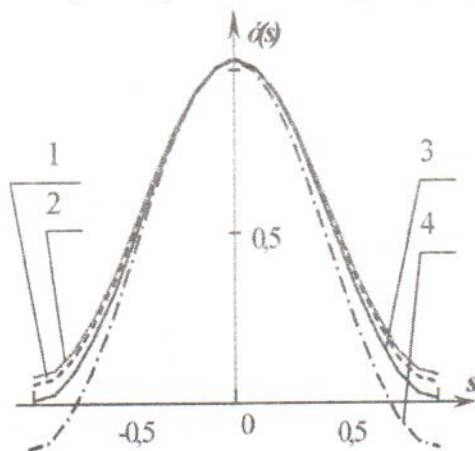


Рис. 1. Вибір інтервалів інтегрування для найкращої апроксимації локальними рядами Тейлору при  $x=0$  підінтегральної функції  $z(x,s)$  для модельного прикладу (13)

Хоча СЛАР (9) низької розмірності, на практиці вона задається неточно, тому що права частина задається як  $f_i(x)+\delta_i$ , де  $\delta_i$  є похибкою представлення ДТ-моделлю інтегрального рівняння (1). Тому для неточно заданих СЛАР необхідно застосовувати спеціальні методи розв'язку [6]. У роботах [7-9] запропоновані оптимізаційні методи, що застосуються у даному випадку для рішення неточно заданої СЛАР (9).

**Застосування багатокритеріальної оптимізації.** Перша модель багатокритеріальної цільової функції реалізує модель інтегральної оптимальності, що для частинних критеріїв  $I_i$  буде мати вигляд [4]:

$$\min_y I^1(y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_i, \quad (10)$$

при умовах  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$

Загальним недоліком цієї схеми є можливість різкої диференціації рівня окремих критеріальних функцій.

У найпростішій постановці багатокритеріальної задачі відновлення сигналів використовуються два частинних критерії. Це – критерій по точності  $I_1 = (Ay - f)^2$  і критерій по стійкості  $I_2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$  [8, 9]. Завдяки тому, що ці критерії для некоректних задач конфліктують між собою, то для утворення багатокритеріальної цільової функції вибрана нелінійна схема компромісів, яка автоматично знаходить оптимальний компроміс між критеріями, що входять в її склад. Нелінійна схема компромісів (чи згортка по Вороніну), введена в [4] відповідає моделі векторної оптимізації, у явному вигляді залежить від характеристик напруженості ситуації.

$$\min_y I^2(y) = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \frac{I_i}{I_{im}}}, \quad (11)$$

при умовах  $0 < I_i < I_{im}, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$

Необхідні умови мінімуму функцій  $I^1$  (10), (11) дають систему кінцевих рівнянь

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = 0, i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

У результаті диференціювання (12) отримується система нелінійних рівнянь низької розмірності, що зводиться, наприклад, з використанням методу Ньютона до СЛАР.

**Чисельний експеримент.** Обрано модельний приклад на основі (1), де

$$K(x, s) = 0,12(x-s)^4 - 0,8(x-s)^2 + 1,4;$$

$$y(s) = \begin{cases} (1-s^2)^2, & |s| \leq 1, \\ 0, & |s| > 1; \end{cases} \quad s \in [-1; 1]. \quad (13)$$

$$f(x) = 1,378 - 0,744x^2 + 1,128x^4.$$

Представимо алгоритм обчислень для прикладу (13) з використанням ДТ-перетворень.

По формулі (4) дискрети шуканого розв'язку будуть визначатися як

$$Y(0) = C_0, \quad Y(1) = C_1 H,$$

$$Y(2) = C_2 H^2, \quad Y(3) = C_3 H^3, \dots$$

Знайдемо дискрети для зображення точного розв'язку  $y(s) = (1-s^2)^2$  для модельного прикладу (13) по формулі (4) для  $s_0 = 0$ :  $Y(0) = 1$ ,  $Y(1) = 0$ ,  $Y(2) = -2H^2$ ,  $Y(3) = 0$ ,  $Y(4) = 1H^4$ . Коефіцієнти  $C_i$  степеневого багаточлена (2) при  $s_0 = 0$ ,  $H = 1$ :  $C_0 = C_4 = 1$ ;  $C_2 = C_3 = 0$ ;  $C_2 = -2$ . Інтегральне рівняння будемо (1) розв'язувати при фіксованих значеннях  $x_c$ . Тоді ядро  $K(x, s)$  можна представити як функцію однієї перемінної  $s$ .

Позначимо  $K(x, s)$  як  $k(s)$ :

$$K(x, s) = 0,12s^4 - 0,48xs^3 - 0,48x^3s + 0,72x^2s^2 +$$

$$+ 0,12x^4 - 0,8x^2 + 1,6xs - 0,8s^2 + 1,4;$$

$$K(x, s) \equiv K(k) = 0,12H^4 \psi(k-4) - 0,48xH^3 \psi(k-3) +$$

$$+ H^2(0,72x^2 - 0,8) \psi(k-2) +$$

$$+ H(1,6 - 0,48x^2) \psi(k-1) + (0,12x^4 - 0,8x^2 + 1,4) \psi(k).$$

Тоді дискрети визначаються як

$$K(0) = 0,12s^4 - 0,8x^2 + 1,4;$$

$$K(1) = Hx(1,6 - 0,48x^2);$$

$$K(2) = H^2(0,72x^2 - 0,8);$$

$$K(3) = 0,48xH^3; \quad V(4) = 0,12H^4; \quad K(k \geq 5) = 0.$$

Окремі дискрети підінтегральної функції (5) обчислюються по формулі (6):

$$Z(0) = K(0)Y(0);$$

$$Z(1) = K(1)Y(0) + K(0)Y(1);$$

$$Z(2) = K(2)Y(0) + K(1)Y(1) + K(0)Y(2); \dots$$

Тепер неважко отримати базову формулу на основі (7). Коефіцієнти  $C_i$  степеневого багаточлена (2) при  $s_0 \neq 0$  будуть перераховуватися по формулі (8).

Оскільки у математичному описі вихідного сигналу  $f(x)$  у (13)  $C_1 = C_3 = 0$ , то будемо припускати, що в шуканому сигналі  $y(s)$  ці коефіцієнти при непарних ступенях полінома (2) також дорівнюють нулю. Тому в критеріях, що відповідають за значення нев'язання при різних перетинах  $x$  залишимо тільки ненульові коефіцієнти.

Тоді СЛАР буде мати розмірність, рівну трьом:

$$0,735C_0 + 0,585C_2 + 1,124C_4 = 0,689 + \delta_1;$$

$$1,529C_0 + 0,215C_2 + 0,278C_4 = 1,370 + \delta_2; \quad (15)$$

$$1,467C_0 + 0,285C_2 + 0,147C_4 = 1,004 + \delta_3.$$

Тому що СЛАР (15) має неточно задану праву частину, те традиційні методи її розв'язку можуть не забезпечувати прийнятний розв'язок. Тим більше це стосується загального випадку з довільною кількістю крапок розкладання і ступенів апроксимуючого полінома. Наприклад, отримаємо розв'язок СЛАР за допомогою перебування оберненої матриці, розв'язок якого буде істотно відрізнятися від точних:

$$C_0 = 1,007; \quad C_2 = -2,24; \quad C_4 = 1,12. \quad (16)$$

Застосуємо оптимізаційні методи для розв'язку СЛАР (15) і з кожного рівняння цієї СЛАР складемо частинні критерії:

$$I_1 = (0,735C_0 + 0,585C_2 + 1,124C_4 - 0,689)^2;$$

$$I_{1m} = \delta_1^2$$

$$I_2 = (1,529C_0 + 0,215C_2 + 0,278C_4 - 1,370)^2; \quad (17)$$

$$I_{2m} = \delta_2^2$$

$$I_3 = (1,467C_0 + 0,285C_2 + 0,147C_4 - 1,004)^2;$$

$$I_{3m} = \delta_3^2.$$

В окремому випадку  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$ . Частинні критерії  $I_k$  утворять багатокритеріальну цільову функцію, наприклад, по формулі моделі інтегральної оптимальності (10). Однак у загальному випадку  $I_k$  можуть конфліктувати між собою, тому при розв'язанні неточно заданої СЛАР (15) варто рекомендувати нелінійну схему компромісів (11).

1. Тестовий приклад знаходження розв'язку (15). При точних  $C_0 = 1$ ;  $C_2 = -2$ ;  $C_4 = 1$  можна знайти точні значення граничних умов на критерії:  $I_{1m} = 5 \times 10^{-8}$ ;  $I_{2m} = 7,2 \times 10^{-5}$ ;  $I_{3m} = 0,001$ .

а) початкове наближення  $C_0 = 0$ ;  $C_2 = 0$ ;  $C_4 = 0$ .

Оптимізація по формулі (10)

$$C_0 = 0,989; \quad C_2 = -1,925; \quad C_4 = 0,968,$$

по формулі (11)

$$C_0 = 1; \quad C_2 = -1,993; \quad C_4 = 0,997.$$

б) початкове наближення дорівнює коефіцієнтам поліному для  $f(x)$

$$C_0 = 1,378; \quad C_2 = -0,744; \quad C_4 = 1,128.$$

Оптимізація по формулі (10)

$$C_0 = 0,982; \quad C_2 = -1,875; \quad C_4 = 0,947,$$

по формулі (11)

$$C_0=0,992; C_2= -1,944; C_4=0,976.$$

2. Рішення (15) при  $I_{im}=10^{-3}$ ; початкове наближення  $C_0=0; C_2=0; C_4=0$ .

Оптимізація по формулі (10)

$$C_0=0,983; C_2= -1,903; C_4=0,989, \quad (18)$$

по формулі (11)

$$C_0=0,987; C_2= -1,943; C_4=0,990. \quad (19)$$

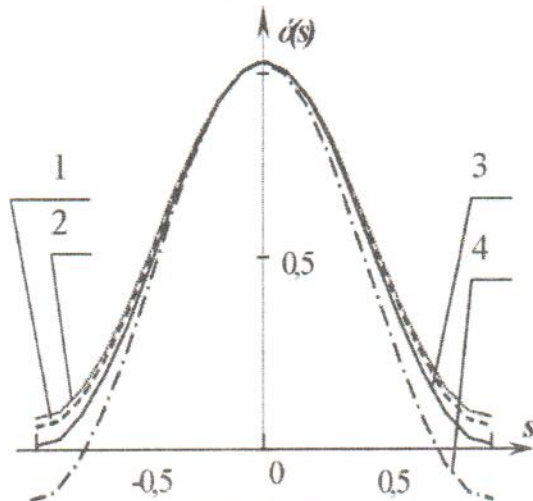


Рис. 2. Рішення СЛАР (15) методом оберненої матриці (крива 4) й оптимізаційними методами: точне  $y(s)$  – крива 3, методом багатокритеріальної (крива 1) і однокритеріальної (крива 2) оптимізації

Для підвищення точності розв'язку СЛАР, у якій неточно задана права частина, необхідно збільшити кількість крапок розкладання, що призведе до незначного збільшення розмірності СЛАР. Наприклад, у розглянутому прикладі розмірність СЛАР дорівнює трьом, використана одна точка розкладання. Якщо розглянути двох точок розкладання, то розмірність даної СЛАР зростає до шести.

**Висновки.** Таким чином, отримана ДТ-модель інтегрального рівняння Фредгольму першого роду, що дозволяє знайти його розв'язок, представлений степеневим багаточленом. Ця модель відрізняється простотою в описі і містить декілька дискрет диференціального спектру. Показано, що використання багатоточкових ДТ-перетворень при розглянутій постановці можливо навіть на одній точці розкладання на всьому проміжку існування розв'язку, без його розбивки на кілька точок розкладання, як це показано в [3]. Це

істотно скорочує розмірність СЛАР, до якої зводиться ДТ-модель. Оскільки отримана СЛАР має неточно задану праву частину, то для знаходження стійких розв'язків використовуються оптимізаційні методи, адаптовані до рішення таких СЛАР. У якості багатокритеріальної цільової функції для багатокритеріальної оптимізації використана нелінійна схема компромісів, що дозволяє одержати рішення, оптимальні по Парето. У даній статті не розглядається випадок, коли в початковій постановці задачі відновлення сигналів присутні похибки. Ці дослідження заслуговують окремого розгляду.

### Список літератури

1. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1980. – 419 с.
2. Пухов Г. Е. Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.
3. Засядько А. А. Метод смещенных дробно-рациональных дифференциальных преобразований для моделирования процесса восстановления сигналов // Вісник ЧДГУ, 2002. – № 3. – С. 61-65.
4. Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем. – К.: Наук. думка, 1992. – 160 с.
5. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
7. Засядько А. А. Розв'язання задачі відновлення сигналів за допомогою однокритеріальної оптимізації // Вісник ЖІТІ. – 2002. – № 4 (23) / Технічні науки. – С. 133-136.
8. Жуков І. А., Засядько А. А. Багатокритеріальний метод розв'язання вироджених СЛАР // Вісник НАУ, 2002. – № 3. – С. 178-182.
9. Засядько А. А. Сравнение методов Тихонова и многокритериальной оптимизации при решении задачи восстановления сигналов // Проблемы управления и информатики, 2003. – № 5. – С. 60-67.