УДК 621.372.061

Баранов В. Л., д-р техн. наук,
Водоп'ян С. В., канд. техн. наук,
Костюченко Р. М.

МЕТОД БАЛАНСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СПЕКТРІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Житомирський військовий Інститут радіоелектроніки імені С. П. Корольова

Запропоновано метод моделювання фізичних процесів, що оснований на балансі диференціальних спектрів зображень математичної моделі фізичного процесу і його математичного опису. Наведено приклад застосування запропонованого методу.

Постановка проблеми

Математичні моделі фізичних процесів в механічних, теплових і електричних системах в багатьох практичних застосуваннях представлені у вигляді рівнянь в частинних похідних з граничними умовами. Відомі чисельні методи розв'язку крайових задач вимагають виконання значного об'єму обчислень на ЕОМ, який не завжди може бути реалізований в межах заданого обмеження на час моделювання швидкоплинних фізичних процесів у випадках моделювання їх у реальному або прискореному часі.

В зв'язку з цим виникає потреба у розробці аналітичних і чисельно-аналітичних методів розв'язку крайових задач, які суттєво зменшують обчислювальну складність моделювання фізичних процесів на ЕОМ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1-8] показав, що серед аналітичних і чисельно-аналітичних методів широке застосування в практичних цілях отримали методи моделювання, основані на інтегральних і диференціальних перетвореннях крайових задач. Основний недолік інтегральних перетворень пов'язаний з обмеженням області їх застосування класом лінійних рівнянь в частинних похідних з лінійними граничними умовами. Диференціальні перетворення розширюють область їх застосування на нелінійні крайові задачі, але вносять обмеження на область моделювання фізичних процесів.

Мета статті

Метою статті є розробка чисельно-аналітичного методу, який зменшує обчислювальну складність моделювання фізичних процесів на ЕОМ.

Розглянемо фізичні процеси, що описуються функцією $U(x, t)$ двох незалежних змінних в області, що визначається обмеженнями,

$$0 \le x_1 \le H_1, \tag{1}$$

$$0 \le x_2 \le H_2. \tag{2}$$

де H_1, H_2 – задані додатні сталі.

Моделювання процесів виду $u(x_1, x_2)$ виконаємо, використовуючи систему двох одномірних диференціальних перетворень виду:

$$U(k_1, x_2)=\frac{H_1^{k_1}}{k_1!}\left(\frac{\partial^{k_1} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right)_{x_1=0}, \tag{3}$$

$$u(x_1, x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{H_1}\right)^{k_1} U(k_1, x_2), \tag{4}$$

$$U(x_1, k_2)=\frac{H_2^{k_2}}{k_2!}\left(\frac{\partial^{k_2} u(x_1, x_2)}{\partial x_2^{k_2}}\right)_{x_2=0}, \tag{5}$$

$$u(x_1, x_2)=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2}{H_2}\right)^{k_2} U(x_1, k_2). \tag{6}$$

де цілочисельні аргументи k_1 і k_2 приймають значення 0, 1, 2, 3, ... Вираз (3) описує прямі диференціальні перетворення функції $u(x_1, x_2)$ у функцію $U(k_1, x_2)$ цілочисельного аргументу k_1 і незалежної змінної x_2, яка називається зображенням, або диференціальним спектром процесу $u(x_1, x_2)$, що моделюється. Обернені диференціальні перетворення (4) дозволяють за диференціальним спектром $U(k_1, x_2)$ відновити в області оригіналів процес $u(x_1, x_2)$, який моделюється. Аналогічним чином вирази (5) і (6) описують відповідно прямі і обернені диференціальні перетворення по змінній x_2.

Диференціальні спектри $U(k_1, x_2)$, $U(x_1, k_2)$ є аналогами в області зображень фізичного процесу, математична модель якого задається функцією $u(x_1, x_2)$.

З метою моделювання фізичних процесів може використовуватись диференціальний спектр $U(k_1, x_2)$ або $U(x_1, k_2)$. В деяких крайових задачах виникає потреба в дослідженні обох диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ і $U(x_1, k_2)$.

Основні властивості одномірних диференціальних перетворень, встановлені в [1-4], справедливі для обох видів перетворень (3), (5). Математичні операції в області зображень (3), (5) виконуються за правилами відповідності, які визначаються наступними виразами:

$$u(x_1,x_2)\pm v(x_1,x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} U(k_1,x_2)\pm V(k_1,x_2), \\ U(x_1,k_2)\pm V(x_1,k_2), \end{cases} \quad (7)$$

$$C\,u(x_1,x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} C\cdot U(k_1,x_2), \\ C\cdot U(x_1,k_2), \end{cases} \quad (8)$$

$$u(x_1,x_2)\cdot v(x_1,x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} U(k_1,x_2)*V(k_1,x_2), \\ U(x_1,k_2)*V(x_1,k_2), \end{cases} \quad (9)$$

$$U(k_1,x_2)*V(k_1,x_2)=\sum_{l=0}^{l=k_1} U(l,x_2)\cdot V(k_1-l,x_2), \quad (10)$$

$$U(x_1,k_2)*V(x,k_2)=\sum_{l=0}^{l=k_2} U(x_1,l)\cdot V(x_1,k_2-l), \quad (11)$$

$$\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_1^m} \Leftrightarrow D_1^m U(k_1,x_2), \quad (12)$$

$$\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_2^m} \Leftrightarrow D_2^m U(x_1,k_2), \quad (13)$$

$$D_1^m U(k_1,x_2) = \frac{(k_1+m)!}{k_1!H_1^m}\, U(k_1+m, x_2), \quad (14)$$

$$D_2^m U(x_1,k_2) = \frac{(k_2+m)!}{k_2!H_2^m}\, U(x_1, k_2+m). \quad (15)$$

Фігурними дужками в (7)-(9) позначені математичні операції в області зображень. Верхній рядок виразу у фігурних дужках позначає виконання операцій в області зображень (3), а нижній рядок – в області зображень (5).

Вираз (7) показує, що виконанню операцій додавання і віднімання в області оригіналів відповідають ті ж операції додавання й віднімання диференціальних спектрів в області зображень (3), (5). Множенню функції $u(x_1, x_2)$ на константу C (8) відповідає множення на ту ж константу диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ і $U(x_1, k_2)$. Операції p-множення двох функцій в області оригіналів (9) відповідає спеціальна операція множення (позначена символом *) двох диференціальних спектрів в області зображень (3), (5). Операція m-кратного диференціювання функції $u(x_1, x_2)$ по змінній x_1 в області зображень (3) позначена символом D_1^m (12). Аналогічно символом D_2^m в (13) позначено m-кратне диференціювання функції $u(x_1, x_2)$ по змінній x_2 в області зображень (5).

Виконання операції множення * двох диференціальних спектрів в областях зображень (3) і (5) розкривається відповідно до виразів (10), (11). Операції m-кратного диференціювання в областях зображень (3), (5) реалізують відповідно за виразами (14), (15).

Розглянемо математичну модель фізичного процесу у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних із двома незалежними змінними:

$$f(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2})=0. \quad (16)$$

Рівняння (16) може мати нескінченну кількість частинних розв'язків. Моделювання конкретних фізичних процесів вимагає вибору з усіх розв'язків рівняння (16) такого, який задовольняє граничним умовам. Як правило, граничні умови задають на межі Γ середовища, в якому протікає фізичний процес, який моделюють.

Граничні умови задають у вигляді:

умови Діріхле: $u(x)\big|_{x\in\Gamma} = \psi(x)$, (17)

умови Неймана: $\dfrac{du(x)}{dv}\Big|_{x\in\Gamma} = \psi(x)$, (18)

змішані умови: $\left|\dfrac{du(x)}{dv}+\beta u\right|_{x\in\Gamma} = \psi(x)$, (19)

де ψ, β неперервні функції, визначені на граничній поверхні Γ, а $\dfrac{du(x)}{dv}$ означає похідну, взяту в точці поверхні Γ в напрямку нормалі до неї.

Обмежимось класом крайових задач (16)-(19), задачами, які допускають запис рівняння (16) у вигляді однієї з двох форм, тобто:

$$\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_1^m} = \phi_1(x_1,x_2,u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}), \quad (20)$$

$$\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_2^m} = \phi_1(x_1,x_2,u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}). \quad (21)$$

До вигляду (20), (21) можна звести лінійні й квазілінійні рівняння (16).

Переведемо рівняння (20) диференціальними перетвореннями (3) в область зображень, а переведення рівняння (21) в область зображень виконаємо диференціальними перетвореннями (5).

Отримаємо:

$$U(k_1+m,\ x_2)=\frac{k_1!H_1^m}{(k_1+m)!}\,\Phi_1[k_1,\ x_2,$$

$$U(k_1,\ x_2),\ \frac{k_1+1}{H_1}\ U(k_1+1,\ x_2),\ \frac{dU(k_1,x_2)}{dx_2}, \quad (22)$$

$$\frac{(k_1+1)}{H_1}\ \frac{dU(k_1+1,x_2)}{dx_2},\ \frac{d^2U(k_1,x_2)}{dx_2^2}\ ],$$

$$U(x_1,\ k_2+m)=\frac{k_2!H_2^m}{(k_2+m)!}\,\Phi_2[x_1,\ k_2,$$

$$U(k_1,\ x_2),\ \frac{dU(x_1,k_2)}{dx_1},\ \frac{k_2+1}{H_2}\ U(x_1,\ k_2), \quad (23)$$

$$\frac{(k_2+1)}{H_2}\ \frac{dU(x_1,k_2+1)}{dx_1},\ \frac{d^2U(x_1,k_2)}{dx_1^2}\ ],$$

де Φ_1 – зображення функції φ_1 на основі перетворень (3);

Φ_2 – зображення функції φ_2 на основі перетворень (5).

Рекурентний вигляд виразів (22), (23) дозволяє знаходити дискрети диференціальних спектрів $U(k_1,\ x_2)$ і $U(x_1,\ k_2)$ послідовно, надаючи цілочисельним аргументам k_1 і k_2 значення 0, 1, 2, 3,…. Аналітичні обчислення за формулами (22), (23) можна виконувати з невідомими початковими дискретами диференціальних спектрів, використовуючи їх символьні позначення. Рівняння для визначення невідомих дискрет диференціальних спектрів складають на основі граничних умов (17)-(19), використовуючи обернені перетворення (4), (6). Граничні умови вигляду (17), (18) в області (1), (2) виражаються на основі властивостей одномірних диференціальних перетворень [1-4] наступним чином:

$$u(0,\ x_2)=U(0,\ x_2),\quad u(x_1,\ 0)=U(x_1,\ 0), \quad (24)$$

$$u(H_1,\ x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}U(k_1,x_2)=\psi_1(x_2), \quad (25)$$

$$u(x_1,\ H_2)=\sum_{k_2=0}^{\infty}U(x_1,k_2)=\psi_2(x_1), \quad (26)$$

$$U(m,x_2)=\frac{H_1^m}{m!}\left[\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_1^m}\right]_{x_1=0}$$

$$U(x_1,m)=\frac{H_2^m}{m!}\left[\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_2^m}\right]_{x_2=0}, \quad (27)$$

$$\left[\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_1^m}\right]_{x_1=H_1}=$$

$$=\frac{1}{H_1^m}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(k_1+m)!}{k_1!}U(k_1+m,x_2)=\psi_1(x_2), \quad (28)$$

$$\left[\frac{\partial^m u(x_1,x_2)}{\partial x_2^m}\right]_{x_2=H_2}=$$

$$=\frac{1}{H_2^m}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(k_2+m)!}{k_2!}U(x_1,k_2+m)=\psi_2(x_1). \quad (29)$$

Граничні умови (19) виражаються через дискрети диференціальних спектрів на основі виразів (24)-(29). Граничні умови (24), (27) визначають початкові дискети диференціальних спектрів $U(k_1,\ x_2)$ і $U(x_1,\ k_2)$. Невідомі дискрети диференціальних спектрів визначаються на основі розв'язку рівнянь (25), (26), (28), (29), які є в загальному випадку звичайними диференціальними рівняннями по аргументу x_1 або x_2. У випадку лінійних рівнянь в частинних похідних (16) і лінійних граничних умов (17)-(19) звичайні диференціальні рівняння (25), (26), (28), (29) також є лінійними і розв'язок їх може бути знайдений у загальному вигляді.

Після визначення дискрет диференціальних спектрів $U(k_1,\ x_2)$ або $U(x_1,\ k_2)$ розв'язок крайової задачі (16)-(19), отриманий в області зображень, переводиться в область оригіналів оберненими перетвореннями (4) або (6).

Основним недоліком аналітичного опису фізичних процесів у вигляді рядів вигляду (4) і (6) є обмеження області зміни незалежних змінних (1), (2) радіусом збіжності цих рядів.

На основі експериментальних досліджень фізичних процесів, або в результаті попереднього аналізу їх математичних моделей в багатьох практичних застосуваннях вдається вибрати аналітичний опис фізичного процесу, який найбільше підходить, наприклад, у вигляді ряду наступного вигляду:

$$u(x_1,x_2)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x_1)\cdot x_2^i ,$$

$$u(x_1,x_2)=\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x_1)\cdot x_2^i}{1+\sum_{j=1}^{\infty} b_j(x_1)\cdot x_2^j} , \qquad (30)$$

$$u(x_1,x_2)=\sum_{i=1}^{\infty} A_i(x_1)\cdot e^{\alpha_i\cdot x_2} ,$$

$$u(x_1,x_2)= =\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty} a_i(x_1)\cdot\sin\omega_i x_2 + b_i(x_1)\cdot\cos\omega_i x_2 .$$

Якщо у виразі (30) поміняти місцями індекси незалежних змінних і, то отримаємо ще чотири аналітичні форми опису фізичних процесів.

В загальному випадку аналітичний опис фізичного процесу можна вибрати в одній із двох форм:

$$u(x_1,x_2)=\begin{cases} f_1\left[A(x_1),x_2,\alpha\right] \\ f_2\left[x_1,B(x_2),\beta\right] \end{cases}, \qquad (31)$$

де f_1 і f_2 – задані диференційовані функції;

$$A(x_1)=\{a_1(x_1),a_2(x_1),...,a_n(x_1)\},$$

$$B(x_2)=\{b_1(x_2),b_2(x_2),...,b_n(x_2)\},$$

сукупність функцій однієї змінної x_1 або x_2, які потрібно визначити;

$$\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\},$$

$$\beta=\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\},$$

сукупність незалежних параметрів.

Метод балансу диференціальних спектрів складається з наступних етапів.

На *першому етапі* вибирається аналітичний опис (31) фізичного процесу, що задовольняє граничним умовам виду (17)-(19).

На *другому етапі* диференціальними перетвореннями (3) або (5) переводять аналітичний опис (31) фізичного процесу в область зображень:

$$U(k_1,x_2)=F_2\left[k_1,B(x_2),\beta\right], \qquad (32)$$

$$U(x_1,k_2)=F_1\left[A(x_1),k_2,\alpha\right], \qquad (33)$$

де F_1 – зображення функції f_1, отримане перетвореннями (5):

F_2 – зображення функції f_2, отримане на основі перетворень (3).

На *третьому етапі* математичну модель фізичного процесу (20) або (21) переводять диференціальними перетвореннями (3) або (5) в область зображень (22) або (23).

Четвертий етап полягає в розрахунку диференціальних спектрів $U(k_1, x_2)$ або $U(x_1, k_2)$ за рекурентними виразами (22) або (23), використовуючи в якості початкових дискрет дискрети диференціального спектра (32), або (33).

Заключний етап реалізується складанням балансу однойменних дискрет диференціальних спектрів зображень математичної моделі (22) або (23) фізичного процесу і його аналітичного опису (32) або (33):

$$U(k_1+m,x_2)=\frac{k_1!\cdot H_1^m}{(k_1+m)!}\times$$

$$\times\Phi_1\left[k_1,x_2,U(k_1,x_2),\frac{k_1+1}{H_1}U(k_1+1,x_2),\right. \qquad (34)$$

$$\left.\frac{du(k_1,x_2)}{dx_2},\frac{k_1+1}{H_1}\frac{du(k_1+1,x_2)}{dx_2}\frac{d^2u(k_1,x_2)}{dx_2^2}\right]= =F_2\left[k_1+m,B(x_2),\beta\right],$$

$$U(x_1,k_2+m)=\frac{k_2!\cdot H_2^m}{(k_2+m)!}\times$$

$$\times\Phi_2\left[x_1,k_2,U(x_1,k_2),\frac{dU(x_1,k_2)}{dx_1},\right. \qquad (35)$$

$$\left.\frac{k_2+1}{H_2}U(x_1,k_2),\frac{k_2+1}{H_2}\frac{dU(x_1,k_2+1)}{dx_1},\frac{d^2U(x_1,k_2)}{dx_1^2}\right]= =F_1\left[A(x_1),k_2+m,\alpha\right].$$

де k_1, k_2=0, 1, 2, ...

Система звичайних диференціальних рівнянь (34) або (35) з врахуванням (32) або (33) визначити сукупність невідомих функцій $B(x_2)$ або $A(x_2)$, а також невідомі параметри β або α. Початкові умови для системи звичайних диференціальних рівнянь (34) або (35) визначають з граничних умов (17)-(19), (24)-(28). Розмірність системи (34) або (35) задається вибором максимального значення цілочисельного аргументу k_1 або k_2, таким чином, щоб кількість рівнянь відповідала кількості невідомих функцій і параметрів.

Отже, метод балансу диференціальних спектрів зводить крайову задачу для рівнянь в частинних похідних до більш простої задачі інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (34) або (35), яка в свою чергу, може бути розв'язана одномірними диференціальними перетвореннями [1-4], або чисельними методами інтегрування на ЕОМ.

Наведемо приклад моделювання фізичного процесу методом балансу диференціальних спектрів.

Розглянемо в області $0<x<l$, $t>0$ моделювання коливальних процесів, які описуються хвильовим рівнянням виду:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A \cdot e^{-t} \cdot \sin\frac{\pi}{l}x, \quad (36)$$

з початковими і граничними умовами:

$$u(x, 0)=0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad u(0, t)=u(l, t)=0, \quad (37)$$

де A, a, l – задані додатні сталі.

Введемо позначення: $x=x_1$, $t=x_2$ і перетворимо крайову задачу (36), (37) до рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + A \cdot e^{-x_2} \cdot \sin\frac{\pi}{l}x_1, \quad (38)$$

з граничними умовами

$$u(x_1, 0)=0, \quad \frac{\partial u(x_1,0)}{\partial x_2} = 0, \quad (39)$$

$$u(0, x_2)=u(l, x_2)=0. \quad (40)$$

Перший етап вибору аналітичного опису фізичного процесу реалізуємо на основі наближеного розв'язку крайової задачі (38)-(40) диференціальними перетвореннями (5)-(6). Переведемо рівняння (38) диференціальними перетвореннями (5) в область зображень і представимо його у вигляді (23).

$$U(x_1, k_2+2) = \frac{H_2^2}{(k_2+1)(k_2+2)} \left[a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + A \cdot \frac{(-H_2)^{k_2}}{k_2!} \cdot \sin\frac{\pi}{l}x_1 \right]. \quad (41)$$

На основі граничних умов (39) знаходимо початкові дискрети диференціального спектру $U(x_1, k_2)$:

$$U(x_1, 0)=0, \quad U(x_1, 1)=H_2 \left[\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} \right]_{x_2=0} = 0. \quad (42)$$

Надаючи цілочисельному аргументу, k_2 значень, 0, 1, 2, ... за рекурентним виразом (41) і початковими дискретами (42) визначаємо інші дискети диференціального спектру $U(x_1, k_2)$:

$$U(x_1, 2)=\frac{H_2^2}{2} A \cdot \sin\frac{\pi}{l}x_1, \quad (43)$$

$$U(x_1, 3)=-\frac{H_2^3}{6} A \cdot \sin\frac{\pi}{l}x_1, \ \dots .$$

Оберненими перетвореннями (6) диференціального спектру (42), (43) відновлюємо аналітичний опис фізичного процесу у вигляді:

$$u(x_1, x_2)=\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{x_2}{H_2}\right)^{k_2} \cdot U(x_1,k_2) = A \cdot \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{6} + \dots\right) \cdot \sin\frac{\pi}{l}x_1. \quad (44)$$

Розв'язок (44) задовольняє рівнянню (38) і граничним умовам (39), (40). На основі (44) аналітичний опис фізичного процесу будемо шукати у вигляді:

$$u(x_1, x_2)= A \cdot f(x_2) \cdot \sin\frac{\pi}{l}x_1. \quad (45)$$

На другому етапі диференціальними перетвореннями (3) переведемо аналітичний опис (45) фізичного процесу в область зображень:

$$U(k_1, x_2)=\frac{A \cdot f(x_2)}{k_1!} \cdot \left(\frac{\pi}{l} \cdot H_1\right)^{k_1} \cdot \sin\frac{\pi}{2}k_1. \quad (46)$$

Третій етап методу реалізуємо на основі диференціального перетворення (3) фізичного процесу і представлення його в області зображень у вигляді (22):

$$U(k_1+2, x_2)=\frac{H_1^2}{a^2(k_1+1)(k_1+2)} \left(\frac{\partial^2 u(k_1,x_2)}{\partial x_2^2} - \frac{A \cdot e^{-x_2}}{k_1!} \cdot \left(\frac{\pi}{l}H_1\right)^{k_1} \cdot \sin\frac{\pi}{2}k_1 \right). \quad (47)$$

На четвертому етапі методу за виразами (46) і (47) визначаються дві форми дискрет диференціального спектру $U(x_1, k_2)$.

Спочатку, надаючи цілочисельному аргументу k_1 значення 0, 1, 2, 3, … , за виразом (46) знаходимо диференціальний спектр аналітичного опису (45) фізичного процесу:

$$U(0, x_2)=0, \quad U(1, x_2)=\frac{\pi}{l}H_1 A \cdot f(x_2),$$

$$U(2, x_2)=0 \quad (48)$$

$$U(3, x_2)=-\frac{A}{6}\left(\frac{\pi}{l}H_1\right)^3 \cdot f(x_2).$$

Потім, використовуючи початкові дискрети диференціального спектру (48)

$$U(0, x_2)=0, \quad U(1, x_2)=\frac{\pi}{l}H_1 A \cdot f(x_2),$$

за рекурентним виразом (47), при k_1=0, 1, 2, ... знаходимо диференціальний спектр математичної моделі (38) фізичного процесу:

$$U(0,x_2)=0,\ U(1,x_2)=\frac{\pi}{l}H_1 A\cdot f(x_2),$$
$$U(2,x_2)=0, \qquad (49)$$
$$U(3,x_2)=\frac{\pi}{l}\cdot\frac{A\cdot H_1^3}{6a^2}\cdot\left[\frac{d^2 f(x_2)}{dx_2^2}-e^{-x_2}\right].$$

На заключному етапі прирівнюємо дискрети при однакових значеннях цілочисельного аргументу диференціального спектра (48) аналітичного опису (45) фізичного процесу і диференціального спектра (49) математичної моделі (38) фізичного процесу. Баланс диференціальних спектрів (48) і (49) для розглядуваного прикладу дає вираз (34) у вигляді звичайного диференціального рівняння:

$$U(3,x_2)=\frac{1}{a^2}\cdot\left[\frac{d^2 f(x_2)}{dx_2^2}-e^{-x_2}\right]=-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot f(x_2). \qquad (50)$$

Рівняння (50) зведемо до вигляду:

$$\frac{d^2 f(x_2)}{dx_2^2}+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2\cdot f(x_2)=e^{-x_2}. \qquad (51)$$

Початкові умови для звичайного диференціального рівняння (51) визначаються на основі граничних умов (39) і аналітичного опису (45) фізичного процесу:

$$f(0)=0, \quad \frac{df(0)}{dx_2}=0. \qquad (52)$$

Розв'язок звичайного лінійного диференціального рівняння (51) з початковими умовами (52) має вигляд:

$$f(x_2)=\frac{1}{1+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\times \qquad (53)$$
$$\times\left[e^{-x_2}-\cos\frac{a\pi}{l}x_2+\frac{l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{l}x_2\right].$$

Підстановка (53) у вираз (45) дає аналітичний опис фізичного процесу, який точно задовольняє хвильовому рівнянню (38) і граничним умовам (39), (40):

$$u(x_1,x_2)=\frac{A}{1+\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2}\cdot\left[e^{-x_2}-\cos\frac{a\pi}{l}x_2+\right. \qquad (54)$$
$$\left.+\frac{l}{a\pi}\sin\frac{a\pi}{l}x_2\right]\cdot\sin\frac{\pi}{l}x_1.$$

В даному прикладі метод балансу диференціальних спектрів дозволяє з наближеного опису (44) фізичного процесу відновити його точний аналітичний опис (54) в області $0<x_1<l$, $x_2>0$.

Висновки

Метод балансу диференціальних спектрів зводить крайову задачу для рівнянь в частинних похідних до більш простої задачі інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь і цим знижує об'єм чисельних обчислень на ЕОМ. Метод балансу диференціальних спектрів ґрунтується на точному операційному перетворенні математичної моделі фізичного процесу. Це дає можливість відновити з наближеного опису фізичного процесу його точний аналітичний опис або розширити область моделювання фізичного процесу.

Предметом подальших досліджень є розвиток методу балансу диференціальних спектрів на моделювання фізичних процесів в область, яка має складну геометричну форму.

Список літератури

1. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 420 с.

2. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наук. думка, 1986. – 158 с.

3. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.

4. *Пухов Г. Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т – преобразований. – К.: Наук. думка, 1988. – 216 с.

5. *Береговенко Г. Я., Пухов Г. Е., Саух С. Е.* Численные операторные методы решения дифференциальных уравнений и анализа динамических систем. – К.: Наук. думка, 1993. – 262 с.

6. *Мэтьюз Д. Г., Финк К. Д.* Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Вильямс, 2001. – 720 с.

7. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.

8. *Поршнев С. В.* Вычислительная математика. – С.Пб.: БХВ – Петербург, 2004. – 320 с.

9. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1976. – 288 с.