УДК 681.518.2

Баранов В. Л., д-р техн. наук

АДАПТИВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Институт компьютерных технологий Национального авиационного университета

Предложены дифференциальные преобразования, которые адаптируются к области решения краевых задач математической физики. Приведен пример применения адаптивных дифференциальных преобразований для решения краевой задачи.

Постановка проблемы

Решение задач математической физики и моделирование физических процессов на ЭВМ требует применение численных методов решения уравнений в частных производных с граничными условиями. Известные численные методы решения краевых задач характеризуются значительным объемом вычислений на ЭВМ, который не всегда может быть выполнен в пределах заданного ограничения на время моделирования физического процесса.

В связи с этим возникает потребность в разработке методов моделирования, основанных на аналитических и численно-аналитических методах решения краевых задач.

Анализ последних исследований и публикаций [1-5] показал, что существующие аналитические и численно-аналитические методы решения краевых задач, основанные на интегральных и дифференциальных преобразованиях, имеют существенные ограничения на класс решаемых задач. Основной недостаток интегральных преобразований связан с ограничением области их применения классом линейных уравнений в частных производных с линейными граничными условиями. Дифференциальные преобразования расширяют область применения на нелинейные краевые задачи, но в значительной мере теряют свою эффективность в случае моделирования физических процессов в областях сложной формы.

Цель статьи заключается в разработке адаптивных дифференциальных преобразований, которые позволяют адаптироваться к сложной форме области моделирования физического процесса.

Рассмотрим $U(x, y, z)$ непрерывную вместе со своими частными производными функцию по независимым координатам x, y, z в области, определяемой ограничениями

$$0 \le x \le H_x(y,z);\ 0 \le y \le H_y(x,z);$$
$$0 \le z \le H_z(x,y), \qquad (1)$$

где H_x, H_y, H_z – заданные кусочно-непрерывные функции, описывающие участки границы области Ω, в которой моделируется физический процесс.

Адаптивными дифференциальными преобразованиями будем называть систему одномерных дифференциальных преобразований по каждому аргументу x, y, z следующего вида:

$$U(k,y,z) = \frac{H_x^k(y,z)}{k!}\left[\frac{\partial^k U(x,y,z)}{\partial x^k}\right]_{x=0}, \qquad (2)$$

$$U(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H_x}\right)^k \cdot U(k,y,z); \qquad (3)$$

$$U(x,p,z) = \frac{H_y^p(x,z)}{p!}\left[\frac{\partial^p U(x,y,z)}{\partial y^p}\right]_{y=0}, \qquad (4)$$

$$U(x,y,z) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{y}{H_y}\right)^p \cdot U(x,p,z); \qquad (5)$$

$$U(x,y,q) = \frac{H_z^q(x,y)}{q!}\left[\frac{\partial^q U(x,y,z)}{\partial z^q}\right]_{z=0}, \qquad (6)$$

$$U(x,y,z) = \sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{z}{H_z}\right)^q \cdot U(x,y,q). \qquad (7)$$

Прямые одномерные дифференциальные преобразования (2) формируют изображение $U(k, y, z)$ в виде функции непрерывных переменных y, z и целочисленного аргумента k=0,1,2,3,... ∞. Обратные преобразования (3) позволяют восстановить оригинал $U(x, y, z)$ по изображению $U(k, y, z)$, которое согласно [1, 2] называется дифференциальным спектром по целочисленному аргументу k. Аналогично, одномерные дифференциальные преобразования (4) дают изображение $U(x, p, z)$ как функцию непрерывных переменных x, z и целочисленного аргумента p=0,1,2,3,... ∞. Оригинал $U(x, y, z)$ по дифференциальному спектру $U(x, p, z)$ восстанавливается обратными преобразованиями (5).

Следующая пара прямых (6) и обратных (7) одномерных дифференциальных преобразований позволяет найти дифференциальный спектр $U(x, y, q)$ в виде функции непрерывных переменных x, y и целочисленного аргумента $q = 0,1,2,3,\ldots$, а затем по этому дифференциальному спектру восстановить оригинал $U(x, y, z)$.

Основное отличие адаптивных дифференциальных преобразований (1)-(7) от дифференциальных преобразований, предложенных академиком Пуховым Г. Е. в [1, 2], заключается в переменных масштабных функциях $H_X(y,z)$, $H_Y(x,z)$, $H_Z(x,y)$, которые в работах Пухова Г. Е. принимались в виде заданных положительных констант. Наличие переменных масштабных функций в дифференциальных преобразованиях (2)-(7) позволяют адаптировать их к сложной форме области (1), в которой решается краевая задача. В этом заключается основное преимущество адаптивных дифференциальных преобразований (1)-(7) по сравнению с дифференциальными преобразованиями академика Пухова Г. Е. [1, 2].

Если принять масштабные функции $H_X(y,z)$, $H_Y(x,z)$, $H_Z(x,y)$ постоянными, то дифференциальные преобразования (1)-(7) совпадают с дифференциальными преобразованиями академика Пухова Г. Е. [1, 2].

В работах [1, 2] показана инвариантность свойств дифференциальных преобразований к выбору масштабов H_x, H_y, H_z.

Следовательно, адаптивные дифференциальные преобразования (1)-(7) обладают всеми свойствами дифференциальных преобразований, предложенных в [1, 2]. Математические операции в области изображений, например для преобразований вида (2), выполняются согласно выражениям (8)-(11):

$$U(x,y,z) \pm V(x,y,z) \Leftrightarrow U(k,y,z) \pm V(k,y,z), \tag{8}$$

$$C \cdot U(x,y,z) \Leftrightarrow C \cdot U(k,y,z), \tag{9}$$

$$U(x,y,z) \cdot V(x,y,z) \Leftrightarrow U(k,y,z) * V(k,y,z), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^m U(x,y,z)}{\partial x^m} \Leftrightarrow D_x^m \cdot U(k,y,z), \tag{11}$$

где $\Leftrightarrow$ – символ соответствия между оригиналом и изображением,

$*$ – символ операции умножения в области изображений,

D_x^m – символ операции m-кратного дифференцирования функции $U(x, y, z)$ по переменной x в области изображений (2),

C – произвольная константа.

Операции умножения и дифференцирования реализуются в области изображений с помощью обычных операций алгебраического суммирования и умножения над дифференциальными спектрами следующим образом:

$$U(k,y,z) * V(k,y,z) = \sum_{l=0}^{l=k} U(l,y,z) \cdot V(k-l,y,z), \tag{12}$$

$$D_x^m U(k,y,z) = \frac{(k+m)!}{k!\,H_x^m} U(k+m,y,z). \tag{13}$$

Выражение (8) показывает, что операциям сложения-вычитания оригиналов соответствуют те же операции с изображениями. Умножение на константу C функции $U(x, y, z)$ выполняется в области изображений (2) умножением дифференциального спектра $U(к, y, z)$ на ту же константу (9). Операции умножения двух функций $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ соответствует в области изображений (2) умножение двух дифференциальных спектров

(10) согласно выражению (12). Операция m-кратного дифференцирования функции $U(x, y, z)$ по переменной x в области изображений (2) обозначена символом D_x^m в (11) и выполняется согласно выражению (13) сдвигом на m дифференциального спектра $U(\kappa, y, z)$ по целочисленному аргументу κ и умножению его на коэффициенты $\frac{(k+m)!}{k!H_x^m}$.

Аналогичным образом, выполняются математические операции с дифференциальными спектрами $U(x, p, z)$ *и* $U(x, y, q)$.

Решение краевых задач или моделирование физических процессов в областях сложной формы во многих практических приложениях не требует применения полной системы адаптивных дифференциальных преобразований (1)-(7).

Искомая функция $U(x, y, z)$ может быть получена одним из трех способов (3), (5), (7) на основе одного из трех дифференциальных спектров $U(k, y, z)$, $U(x, p, z)$ и $U(x, y, q)$. Поэтому, для решения краевых задач во многих случаях достаточно воспользоваться одной парой прямых и обратных преобразований (2), (3) или (4), (5), или (6), (7). Выбор вида пары дифференциальных преобразований из системы (1)-(7) определяется в основном формой области, в которой решается краевая задача или моделируется физический процесс.

Процесс решения краевых задач или моделирования физических процессов в области сложной формы на основе адаптивных дифференциальных преобразований (1)-(7) покажем на примере тестовой краевой задачи, приведенной в [6]. Пусть область Ω есть круг радиуса $R = \pi$ с врезом вдоль в виде части синусоиды AOB (рис. 1). Требуется решить краевую задачу в области Ω для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 4, \quad (x,y) \in \Omega, \quad (14)$$

с граничными условиями на границе Γ области Ω

$$U\Big|_{\Gamma} = \begin{cases} \pi^2, & (x,y) \in \Gamma_1, \quad (15) \\ x^2 + \sin^2 x, & (x,y) \in \Gamma_2, \quad (16) \end{cases}$$

где Γ_1 – окружность $\pi^2 - x^2 - y^2 = 0$,

Γ_2 – синусоидальный врез AOB: $y = \sin x$.

Разобьем область Ω на три области Ω_1, Ω_2, Ω_3 так, что $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$. В качестве области Ω_1 примем область в форме сегмента (рис.1), отсекаемого от круга прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Область Ω_2 заключена в верхней части круга между синусоидальным врезом AOB, отрезком AC прямой $x = \frac{\pi}{2}$ и верхней частью окружности BC. Область Ω_3 расположена в нижней части круга между синусоидальным врезом AOB, отрезком AD прямой $x = \frac{\pi}{2}$ и нижней частью окружности BD.

В данной задаче граничные условия (15), (16) описываются в явном виде относительно координат Y. Поэтому масштабная функция $H_y(x)$ непосредственно выражается через отрезки границ области Ω в виде $H_y(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}$ для окружности и в форме $H_y(x) = \sin x$ в случае синусоидального вреза.

Следовательно, одномерные дифференциальные преобразования необходимо выбрать по переменной Y согласно выражениям (4) и (5). Дифференциальные преобразования (4) адаптированы к области Ω, так как позволяют выразить граничные условия (15), 16) через дифференциальный спектр (4) на основе обратного преобразования (5) в виде:

$$U[x, y = H_y(x)] = \begin{cases} \sum_{p=0}^{\infty} U(x,p) = \pi^2, & (17) \\ \text{при } H_y(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}; & \\ \sum_{p=0}^{\infty} U(x,p) = x^2 + \sin^2 x, & (18) \\ \text{при } H_y(x) = \sin x. & \end{cases}$$

Переведем уравнение Пуассона (14) дифференциальными преобразованиями (4) в область изображений. С этой целью предварительно преобразуем уравнение (14) к виду:

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = 4 - \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}. \qquad (19)$$

Для дифференциальных преобразований (4) операция двукратного дифференцирования функции $U(X,Y)$ по переменной Y в области изображений описывается выражением аналогичным (13):

$$D_y^2 U(x,p) = \frac{(p+2)!}{p!H_y^2} U(x,p+2) = \\ = \frac{(p+1)(p+2)}{H_y^2} U(x,p+2). \qquad (20)$$

Дифференциальное уравнение (19) в области изображений (4) с учетом выражения (20) принимает вид:

$$U(x,p+2) = \frac{H_y^2}{(p+1)(p+2)} \cdot \\ \cdot \left[4\sigma(p) - \frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} \right], \qquad (21)$$

где $\sigma(p) = \begin{cases} 1, p = 0, \\ 0, p \neq 0. \end{cases}$

Дифференциальный спектр $U(x, p)$ строится последовательным присвоением целочисленному аргументу значений p=0,1,2,3,… и вычислением дискрет дифференциального спектра по рекуррентному выражению (21). Для начала рекуррентного вычисления дискрет дифференциального спектра по выражению (21) необходимо иметь начальные дискреты $U(x, 0)$ и $U(x, 1)$.

Ввиду отсутствия информации о начальных дискретах $U(x, 0)$ и $U(x, 1)$ воспользуемся выражением (4) при p=0 и p=1. В результате дискреты $U(x, 0)$ и $U(x, 1)$ можно задать в виде:

$$U(x,0) = \varphi(x);\ U(x,1) = H_y(x)\psi(x), \qquad (22)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – неизвестные функции, подлежащие определению.

Следующую дискрету дифференциального спектра $U(x, 2)$ найдем по выражению (21) при p=0:

$$U(x,2) = \frac{H_y^2(x)}{2}\left[4 - \ddot{\varphi}(x)\right], \qquad (23)$$

где $\ddot{\varphi}(x) = \frac{\partial U(x,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}$.

Ограничим дифференциальный спектр $U(x, p)$ тремя дискретами (22), (23):

$$U(x,0) = \varphi(x);\ U(x,1) = H_y \psi(x);$$

$$U(x,2) = \frac{H_y^2}{2}\left[4 - \ddot{\varphi}(x)\right]. \qquad (24)$$

Подставим дифференциальный спектр (24) в граничное условие (17) для положительных и отрицательных значений $H_y(x) = \pm\sqrt{\pi^2 - x^2}$ в области Ω_1. В результате имеем два уравнения:

$$\varphi(x) + H_y\psi(x) + \frac{H_y^2}{2}\left[4 - \ddot{\varphi}(x)\right] = \pi^2, \qquad (25)$$

$$\varphi(x) - H_y\psi(x) + \frac{H_y^2}{2}\left[4 - \ddot{\varphi}(x)\right] = \pi^2. \qquad (26)$$

Вычитая уравнение (25) из уравнения (26), находим неизвестную функцию $\psi(x) = 0$. В результате дифференциальный спектр (24) преобразуется к виду:

$$U(x,0) = \varphi(x);\ U(x,1) = 0;$$

$$U(x,2) = \frac{H_y^2}{2}\left[4 - \ddot{\varphi}(x)\right]. \qquad (27)$$

Граничное условие (17) с учетом дифференциального спектра (27) дает обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $\varphi(x)$ в области Ω_1:

$$\varphi(x) + \frac{1}{2}\left(\pi^2 - x^2\right)\left[4 - \ddot{\varphi}(x)\right] = \pi^2. \qquad (28)$$

Уравнению (28) удовлетворяет функция $\varphi(x) = x^2$. В результате дифференциальный спектр (27) определяется следующим образом:

$$U(x,0) = x^2;\ U(x,1) = 0;\ U(x,2) = H_y^2. \qquad (29)$$

Подставляя дифференциальный спектр (29) в выражение обратных преобразований (5), получаем решение краевой задачи в области Ω_1

$$U(x,y)=\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{y}{H_y}\right)^p\cdot U(x,p)=x^2+y^2.\ (30)$$

В областях Ω_2 и Ω_3 решение краевой задачи должно удовлетворять граничным условиям (17) и (18). Решение краевой задачи в области изображений (29) удовлетворяет граничному условию (17). Это решение необходимо проверить на выполнение граничного условия (18) при $H_y(x)=\sin x$.

Подстановка дифференциального спектра (29) при $H_y(x)=\sin x$ в уравнение (18) обращает его в тождество. Следовательно, дифференциальный спектр (29) удовлетворяет граничным условиям (17) и (18), а решение краевой задачи в области оригиналов (30), полученные для области Ω_1, распространяется на всю область $\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.

Следует заметить, что решение (30) краевой задачи (14)-(16), полученное с помощью адаптивных дифференциальных преобразований (4), (5), точно удовлетворяет уравнению Пуассона (14) и граничным условиям (15), (16).

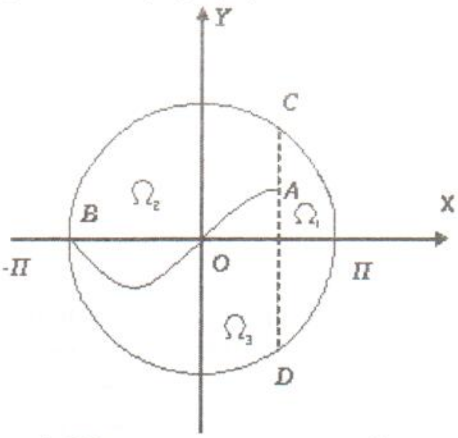

Рис. 1. Область решения краевой задачи

Выводы

Предложенные адаптивные дифференциальные преобразования позволяют адаптироваться к сложной форме области решения краевой задачи. Адаптивные дифференциальные преобразования расширяют область применения аналитических и численно-аналитических методов на нелинейные краевые задачи в областях сложной формы.

Список литературы

1. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 420 с.

2. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.

3. *Поршнев С. В.* Вычислительная математика. – С.Пб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.

4. *Равчев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1976. – 288 с.

5. *Баранов В. Л., Водоп'ян С. В., Костюченко Р. М.* Моделювання фізичних процесів методом одномірних диференціальних перетворень крайових задач // Проблеми інформатизації та управління: зб. наук. пр. – Вип. 3. – К.: НАУ, 2005. – с. 25-30.

6. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.