УДК 62.50

Антонов В. К., канд. техн. наук

ПРИМЕНЕНИЕ АТТРАКТОРОВ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Институт компьютерных технологий Национального авиационного университета

Предложен подход к построению аттракторов с заданными свойствами движения для приближенного описания поведения нелинейных динамических систем.

Введение. Исследование нелинейных динамических систем является плохо формализуемым. Указать наперед характер поведения нелинейной системы, как это имеет место для линейных систем, обычно невозможно. Поэтому практическая потребность их изучения приводит к необходимости введения своеобразных носителей движений, которые могут оказаться общими для разных систем. Актуальность нахождения таких носителей усиливается обычно имеющей место ограниченностью наблюдений, что не позволяет построить все множество интегральных кривых, т.е. интегральное многообразие данной системы. В качестве носителей характерных движений динамической системы могут быть использованы аттракторы. Их исследованию посвящено много работ, среди которых [1, 2] являются достаточно хорошо отражающими состояние задачи.

Формальное определение аттрактора. Построим определение аттрактора, исходя из его свойства, состоящего в том, что изображающая точка соответствующей аттрактору динамической системы ведет себя в фазовом пространстве так, что она не останавливается, и процессы при этом не затухают и не расходятся. Этот факт приводит к предположению, что притягивающее многообразие аттрактора является некоторой поверхностью в фазовом пространстве, и эта поверхность не содержит стационарных точек этой динамической системы. Таким образом, для построения аттракторов следует задать некоторую поверхность в фазовом пространстве, выполняющую роль притягивающего многообразия. Ее можно задавать, например, в виде эллипсоида, сферы, тора. Притягивающая поверхность может быть нестационарной, зависящей от времени, что существенно расширяет возможности приложений. Параметры, которые определяют ее вид, могут зависеть от фазовых координат, являясь решением дифференциальных уравнений. Одновременное применение нескольких притягивающих поверхностей позволяет воспроизводить периодические, например кристаллические структуры.

Далее, следуя идее второго метода Ляпунова, зададим вспомогательную функцию, обладающую тем свойством, что она равна нулю на притягивающей поверхности, и монотонно изменяется при удалении от нее. Положительная определенность вспомогательной функции не требуется. В случае замкнутой поверхности внутри нее существует область неустойчивого равновесия, соответствующая заданной поверхности и вспомогательной функции. Ее существование для физических объектов не является критическим, поскольку внутри поверхности всегда имеется материальный носитель функции притяжения. Например для атомов это ядро, элементы которого создают положительное и отрицательное притяжение, которые убывают по мере удаления от ядра с разными скоростью и ускорением, вследствие чего образуются дискретные энергетические уровни электронов. Для чисто математических объектов всегда существует особенности внутри притягивающей поверхности. Например для гармонического осциллятора, областью притяжения которого является эллипс, вспомогательная функция определяется как логарифм отношения заданного радиуса эллипса к расстоянию от начала координат до изображающей точки. В этом случае вспомогательная функция в начале не определена. Неопределенность устраняется введением смещенной знакоопределенной квадратичной формы – параболоида вращения, пересекающегося с фазовой плоскостью. Но при этом начало неустойчиво равновесно.

Следующим шагом является введение условия реализующего функцию притяжения к заданной поверхности. Условие сформулируем в виде устойчивого приведенного дифференциального уравнения для вспомогательной функции, например линейного уравнения. Уравнение должно обращаться в тождество при подстановке в него вспомогательной функции и дифференциальных уравнений движения. Такие условия являются достаточно жесткими, поскольку требуют одновременного согласованного поведения вспомогательного уравнения, уравнений движения и вспомогательной функции. Но в приложениях условия несколько ослабляются. Например для осциллятора достаточно уравнение движения задать управляемым, тогда управление выполняет согласующую роль, поскольку оно определяется из условия обращения в тождество вспомогательного уравнения на решениях управляемого осциллятора.

Таким образом, аттрактор можно определить состоящим из следующих трех объектов – притягивающей поверхности (эквивалентной соответствующей вспомогательной функции), вспомогательного уравнения, и уравнения движения изображающей точки. При этом в каждом конкретном случае задание вспомогательной функции и вспомогательного уравнения не может быть формализовано, и зависит от наблюдений поведения исследуемого объекта, или от желаемых его свойств, которые следует обеспечить в результате конструирования аттрактора.

Зададим уравнения движения

$$\dot{X} = G(\alpha, t, X, v), \qquad (1)$$

где α – вектор настраиваемых параметров, t – время, X – фазовый вектор, v – вектор управления аттрактора.

Для вспомогательной функции

$$W(\beta, t, X), \qquad (2)$$

где β – вектор настраиваемых параметров, назначим вспомогательное устойчивое дифференциальное уравнение

$$\varphi(\gamma, t, X, W, \dot{W}, \ddot{W}, ...) = 0, \qquad (3)$$

где γ – вектор настраиваемых параметров. Управление в системе (1) определяется из уравнения (2) при подстановке в него вспомогательной функции (2) и ее производных, определенных в силу системы (1). Векторы настраиваемых параметров выбираются исходя из заданных свойств аттрактора, например в результате решения задачи идентификации динамического процесса. Данное формальное определение аттрактора является достаточно общим для обеспечения возможности придания идентифицируемому объекту характера движения, соответствующего данным наблюдений его движений. Существенно определение устойчивости аттрактора отличается от определения устойчивости динамической системы тем, что для аттрактора притягивающим многообразием является поверхность, и при этом на поверхности нет стационарных точек исследуемой системы. Тогда движения имеют характер не расходящихся и не сходящихся, что является признаком наличия аттрактора.

Построение уравнений настройки для определения параметров аттрактора. Задача идентификации аттрактора является сложной в том смысле, что по характеру наблюдаемых движений необходимо указать класс вспомогательных функций, т.е. определить интегральное многообразие в виде некоторой замкнутой поверхности. Эту задачу можно классифицировать как обобщенную задачу распознавания образов, что допускает самостоятельное продолжение и развитие. Особенность состоит в том, что образ многообразия распознается по достаточно косвенным данным, поскольку изображающая точка движется не непосредственно по притягивающему многообразию, а в некоторой его окрестности. Задача идентификации является достаточно сложной также и потому, что в отличие от стандартной постановки, когда необходимо найти вектор настраиваемых параметров исследуемой системы, в данном случае следует находить дополнительные параметры. Сложность усиливается еще и тем, что аттрактором могут быть связаны не все фазовые координаты исследуемого объекта.

Идентифицируется модельная система

$$\dot{\mathrm{X}}_{\mathrm{M}} = \mathrm{F}_{\mathrm{M}}(\delta, t, \mathrm{X}_{\mathrm{M}}, \mathrm{u}), \qquad (4)$$

где δ – вектор настраиваемых параметров, X_{M} – фазовый вектор, u – вектор управления.

Для определения настраиваемых параметров аттрактора применим градиентный метод и метод динамического программирования. Построим целевую функцию, используя вспомогательное дифференциальное уравнение (3), и учитывая условие совпадения программных наблюдаемых и модельных (получаемых в результате настройки) фазовых траекторий

$$\mathrm{V} = \varphi^2 + \mathrm{R}^{\mathrm{T}} Q \mathrm{R}, \mathrm{R} = (\dot{\mathrm{X}}_{\text{п}} - \mathrm{F}_{\mathrm{M}}(\delta, t, \mathrm{X}, \mathrm{u})), \qquad (5)$$

где $\mathrm{X}_{\text{п}}$ – программный измеренный фазовый вектор, Q – положительно определенная диагональная матрица.

Обозначим общий для аттрактора и модельной системы вектор настраиваемых параметров

$$\mathrm{N}^{\mathrm{T}} = (\alpha^{\mathrm{T}}, \beta^{\mathrm{T}}, \gamma^{\mathrm{T}}, \delta^{\mathrm{T}}). \qquad (6)$$

Назначим уравнение настройки для вектора поисковых параметров

$$\dot{\mathrm{N}} = -\mathrm{k} \times \underset{N}{grad}\, V = \mathrm{F}, \qquad (7)$$

где k – вектор положительных коэффициентов, определяемый из условия оптимизации процесса идентификации, $\times$ – символ покоординатного произведения векторов.

Оптимизация процесса идентификации. При решении задач идентификации существенно обеспечить быструю сходимость и минимум колебательности идентифицируемых параметров. Для решения этой задачи зададим функционал

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (\dot{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} P \dot{\mathrm{N}} + c_1 \dot{V} + c_2 V) dt^2, \qquad (8)$$

где P – положительно определенная матрица, c_1 и c_2 – коэффициенты, определяющие поведение функции V как функции Беллмана – функции минимального значения функционала (8).

Обозначая в (8) $\omega = \dot{\mathrm{N}}^T P \mathrm{N}$, и дважды дифференцируя (8) по времени, получим дифференциальное уравнение для функции Беллмана

$$\ddot{V} - c_1 \dot{V} - c_2 V = \omega. \qquad (9)$$

Уравнение (9) выполняется на оптимальных траекториях идентификации настроечных параметров. Ему соответствует уравнение Беллмана

$$-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \min_k \left\{ \omega + c_2 V + \right.$$

$$+ c_1 \mathrm{F}^{\mathrm{T}} \frac{\partial V}{D\mathrm{N}} + c_1 \frac{\partial V}{D\mathrm{N}^{\mathrm{T}}} \mathrm{F} + \mathrm{F}^{\mathrm{T}} \frac{D\mathrm{F}^{\mathrm{T}}}{D\mathrm{N}} \frac{\partial V}{D\mathrm{N}} + \qquad (10)$$

$$\left. + \frac{\partial V}{D\mathrm{N}^{\mathrm{T}}} \frac{D\mathrm{F}}{D\mathrm{N}^{\mathrm{T}}} \mathrm{F} + \mathrm{F}^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 V}{D\mathrm{N} D\mathrm{N}^{\mathrm{T}}} \mathrm{F} \right\}.$$

Уравнение Беллмана (10) решается относительно матрицы Q, содержащейся в функции (5). По найденному решению затем определяется векторный коэффициент k, он подставляется в уравнение настройки (7), и далее производится его численное интегрирование.

Применение для оптимизации процесса идентификации двойного, или интеграла более высокой кратности, ослабляет условие поведения функции Беллмана на оптимальных траекториях, т.е. ей предоставляется большая, в сравнении со случаем одинарного интеграла, свобода поведения. В этом смысле применение кратного интеграла оправдано. Недостатком предлагаемого подхода является усложнение процедуры решения уравнения Беллмана.

Построим каноническую систему, соответствующую двойному интегралу, и покажем, что ее вид отличается от классического. Для этого рассмотрим функционал

$$I = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (-\dot{V} - V + \omega)dt^2 , \qquad (11)$$

соответствующий оптимизированной замкнутой системе

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{F}(t, \mathrm{X}) , \qquad (12)$$

в которой оптимальное управление уже найдено и выражено через фазовые координаты. Согласно функционалу (11) уравнение для функции Беллмана на оптимальных траекториях имеет вид

$$\ddot{V} + \dot{V} + V + \omega = 0 . \qquad (13)$$

Введем вектор сопряженных переменных

$$\Psi = \frac{\partial V}{D\mathrm{X}} . \qquad (14)$$

Продифференцируем уравнение (14)

$$\frac{\partial}{D\mathrm{X}}(\ddot{V} + \dot{V} + V + \omega) = \frac{\partial}{D\mathrm{X}}\left(\frac{\partial \dot{V}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{V}}{D\mathrm{X}^{\mathrm{T}}}\mathrm{F}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{D\mathrm{X}}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{D\mathrm{X}^{\mathrm{T}}}\mathrm{F}\right) + \frac{\partial}{D\mathrm{X}}V + \frac{\partial}{D\mathrm{X}}\omega =$$

$$= \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial t D\mathrm{X}} + \frac{\partial^2 \dot{V}}{D\mathrm{X} D\mathrm{X}^{\mathrm{T}}}\mathrm{F} + \frac{D\mathrm{F}^{\mathrm{T}}}{D\mathrm{X}}\frac{\partial \dot{V}}{D\mathrm{X}} + \frac{\partial^2 V}{\partial t D\mathrm{X}} +$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{D\mathrm{X} D\mathrm{X}^{\mathrm{T}}}\mathrm{F} + \frac{D\mathrm{F}^{\mathrm{T}}}{D\mathrm{X}}\frac{\partial V}{D\mathrm{X}} + \frac{\partial V}{D\mathrm{X}} + \frac{\partial \omega}{D\mathrm{X}} =$$

$$= \frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{\Psi}}{D\mathrm{X}^{\mathrm{T}}}\mathrm{F} + \frac{D\mathrm{F}^{\mathrm{T}}}{D\mathrm{X}}\dot{\Psi} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{D\mathrm{X}^{\mathrm{T}}}\mathrm{F} +$$

$$+ \frac{D\mathrm{F}^{\mathrm{T}}}{D\mathrm{X}}\Psi + \Psi + \frac{\partial \omega}{D\mathrm{X}} = \ddot{\Psi} + \dot{\Psi} + \Psi + \frac{\partial \omega}{D\mathrm{X}} = 0. \qquad (15)$$

Из (15) видно, что функция Гамильтона для двойного интеграла имеет следующий вид

$$H = (\ddot{\Psi} + \dot{\Psi} + \Psi)^T \mathrm{F} + \ddot{V} + \dot{V} + V + \omega =$$

$$= \mathrm{F}^{\mathrm{T}}(\ddot{\Psi} + \dot{\Psi} + \Psi) + \ddot{V} + \dot{V} + V + \omega. \qquad (16)$$

Запишем гамильтонову каноническую систему уравнений для фазовых и сопряженных переменных

$$\dot{\mathrm{X}} = \frac{\partial H}{D\Psi} \quad , \ddot{\Psi} + \dot{\Psi} + \Psi = -\frac{\partial H}{D\mathrm{X}} . \qquad (17)$$

Ее второе уравнение можно переписать в виде системы уравнений первого порядка. В итоге с ростом кратности интеграла в функционале увеличивается порядок системы для сопряженных переменных.

Перспективы применения аттракторов и кратных функционалов.

Построенный управляемый осциллятор обладает свойством сохранять неограниченно долго амплитуду колебаний. На его основе строятся анализаторы спектра и численные методы интегрирования. При использовании вспомогательного уравнения (3), содержащего бифуркации, это качество передается системе. Аттракторы применимы в динамике полета.

Наиболее продуктивным является их применение для исследования физических процессов. Пример – модель пространства, времени и материи, в которой протяженность физического пространства полагается пропорциональной знакоопределенным метрическим функциям и их дифференциальным операторам от пространственных градиентов (включительно высокого порядка) плотности материи, а длительность времени пропорциональна мере нестационарности этих функций и операторов, определенных в силу нестационарности градиентов плотности. Естественность модели следует из потенциального в смысле его возможности, мысленного эксперимента, носящего характер принципа, согласно которому протяженность физического пространства (т.е. само оно) исчезает вместе со временем и материей при неограниченном увеличении объема локальных материальных объектов. Тогда в пределе при неограниченном расширении, по мере увеличения однородности, исчезают точки, между которыми можно измерять расстояние, и одновременно исчезают процессы, выполняющие роль часов. Рациональность модели состоит в возможности трактовки развития материи как процесса, обратного мысленному эксперименту, по отношению к которому вопрос о не материальном начале развития теряет смысл, поскольку начало становится достижимым лишь асимптотически. Ответ на вопросы о начале развития материи и о происхождении времени дается одновременно. В потенциальном пределе закон сохранения энергии выполняется. В мысленном эксперименте она полностью расходуется при расширении локальных объектов.

Гравитационное притяжение объясняется взаимным изменением метрики пространства между притягивающимися телами как источниками градиентов своей плотности, что приводит к их встречной деформации и возникновению сил упругости. Эти силы обусловливают гравитационное притяжение. Поэтому можно предположить, что если бы материальные тела не обладали упругостью, то гравитация не существовала бы.

Инерция объясняется подобно гравитации, ее сущность состоит во взаимодействии тела с полем градиента его плотности при ускоренном движении, создающем запаздывание градиента плотности в направлении против ускорения. Процессы возникновения гравитационных и инерционных сил оказываются различными, что позволяет предположить неэквивалентность гравитационной и инерционной масс. Если гипотеза верна, то управление гравитационным притяжением может осуществляться воздействием на градиенты пространственной плотности.

Аттракторы также применимы для описания биологических процессов, например эффекта биофотосинтеза, предположительно имеющего место в крыльях насекомых.

Список литературы

1. *Арнольд В. К.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.

2. *B. D. Coller*, *P. Holmes*. Suppression of Bursting. Automatica, 1997. – Vol. 33, No. 1, PP.1-11.