УДК 681.3.019.3

Азарсков В. Н., д-р техн. наук,
Джассим Мухаммед Касми,
Стрельников В. П., д-р техн. наук

МЕТОДИКА РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ РЕЗЕРВИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Институт электроники и систем управления Национального авиационного университета

Предложен метод и разработана методика расчета надежности параллельных систем с нагруженным резервом, который приводит к определению функции распределения (DM-распределения) наработки до отказа рассматриваемых систем, на основании которой можно просто получать оценки всех необходимых показателей надежности.

В практике проектирования как способ повышения надежности технических систем имеет место резервирование путем параллельного соединения элементов, когда все элементы находятся под нагружением (нагруженный резерв). В частности, широкое применение имеют системы типа «k из n». В такой системе параллельно соединяются n элементов. Такая система продолжает работать безотказно, пока в работоспособном состоянии находятся не менее k элементов (рис. 1). Примером такой формы резервирования являются резервированные системы автоматики и управления летательными аппаратами, силовые установки летательных аппаратов, когда отказом считается выход из строя двух и более двигателей, аналогично также, например, вантовая система висячего моста, когда для того, чтобы держать это сооружение, необходимо некоторое минимально допустимое число канатов.

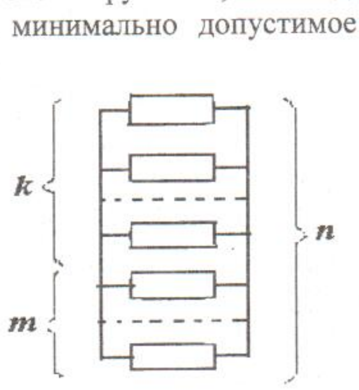

Рис. 1. Структура «k из n»: n – общее число параллельно соединенных элементов; k – минимально необходимое число работоспособных элементов; m – число резервных элементов

Расчет показателей надежности, резервированных систем, т.е. задача аналитической оценки надежности системы на основании известных данных о надежности составляющих элементов (компонентов), является наиболее распространенной и важной задачей надежности, которая решается на всех этапах проектирования и производства изделий. К сожалению, до настоящего времени нет инженерных методик оценки и прогнозирования основных показателей надежности резервированных систем, в частности, методики определения закона распределения наработки до отказа, на основании которого можно определить все необходимые показатели надежности. В настоящей работе предлагается метод расчета надежности, приводящий к определению закона распределения наработки до отказа системы.

Рассматриваются и оцениваются основные показатели надежности резервированных систем, которые либо действительно являются невосстанавливаемыми (например, системы однократного действия), либо таких восстанавливаемых систем, восстановление которых по каким-либо причинам невозможно непосредственно в рассматриваемое время. При этом рассматриваются системы типа «k из n», в которых k принимает значения от 1 до $n-1$.

Для резервированных структур типа «k из n» при равнонадежных элементах, используя, например, метод прямого перебора и теоремы сложения вероятностей или, используя хорошо известную в теории вероятностей схему испытаний Бернулли, получено выражение для вероятности безотказной работы системы в следующем виде:

$$R_c(t)=\sum_{i=0}^{n-k} R_э^{n-i}(t)\cdot\left[1-R_э(t)\right]^i .$$

где $R_э(t)$ – вероятность безотказной работы элемента.

Аналитические выражения для законов распределения наработки до отказа систем в связи с математическими трудностями не получены, однако для некоторых законов распределения получены оценки средней наработки до отказа системы:

1) Экспоненциальный закон:

$$T_c=T_э\sum_{i=0}^{n-k}(i+k)^{-1}.$$

2) Закон Вейбулла:

$$T_c=T_э\sum_{i=1}^{n-k+1}\left[(-1)^{i-1}C_{n-k+1}^{i}\,i^{-1/\alpha}\right],$$

где обозначено: $T_э$ – средняя наработка до отказа элементов; T_c – средняя наработка до отказа системы; α – параметр формы функции распределения Вейбулла.

Для определения закона распределения наработки до отказа параллельных систем будем использовать следующую теоретико-вероятностную интерпретацию расходования ресурса системы [1]. Предлагаемая модель расходования ресурса рассматривает систему как совокупность однотипных элементов, поставленных на испытание, при этом отказом системы является момент, соответствующий появлению r-го отказа (r-ой порядковой статистики, где $r=m+1$, где m – число элементов, находящихся в нагруженном резерве). Таким образом, рассматриваемая задача сводится к определению закона распределения порядковой статистики.

Если наработка до отказа элементов описывается, например, DM-распределением вида $DM(t;\mu_э,\nu_э)$:

$$DM(t;\mu_э,\nu_э)=\Phi\left(\frac{t-\mu_э}{\nu_э\sqrt{t\,\mu_э}}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция нормированного нормального распределения; $\mu_э,\nu_э$ – соответственно, параметр масштаба и параметр формы DM-распределения наработки до отказа элементов $\left(\mu_э=T_э/(1+\nu_э^2/2)\right)$.

Тогда, как установлено в [1], среднее выборочное наработок таких элементов описывается также DM-распределением вида $DM\left(t;\mu_э,\nu_э/\sqrt{n}\right)$, где n – число однотипных элементов, входящих в рассматриваемую систему:

$$DM\left(t;\mu_э,\nu_э/\sqrt{n}\right)=\Phi\left(\frac{t-\mu_э}{\nu_э\sqrt{t\,\mu_э/n}}\right).$$

Закон распределения наработки, соответствующей появлению r-го отказа (r-ой порядковой статистики), по аналогии с распределением выборочного среднего также может быть описан DM-распределением вида $DM\left(t;\mu_r,\nu_э/\sqrt{r}\right)$:

$$DM\left(t;\mu_r,\nu_э/\sqrt{r}\right)=\Phi\left(\frac{t-\mu_r}{\nu_э\sqrt{t\,\mu_r/r}}\right).$$

При использовании DM-распределения средняя наработка до отказа системы T_c, равная значению T_r (среднему значению наработки до r-го отказа) может быть вычислена по формуле:

$$T_c=T_r=\mu_э\left(1+\frac{\nu_э^2\,U_F^2}{2}+\nu_э U_F\sqrt{1+\frac{\nu_э^2U_F^2}{4}}\right).$$

Аргумент функции нормального распределения U_F в выше приведенном выражении соответствует эмпирической функции отказа F, которая определяется для систем типа «1 из n», как $F=\dfrac{n}{n+0{,}5}$, а для систем, в которых $k>1$, $F=\dfrac{n-k+1}{n}$.

Таким образом, используя информацию о вероятности отказа F и коэффициенте вариации наработки элементов

$\nu_э$, параметр масштаба *DM*-распределения наработки до отказа системы вычисляют по формуле $\mu_c = \mu_r = T_r/(1+\nu_c^2/2)$. Коэффициент вариации наработки системы (параметр формы распределения) вычисляют по формуле $\nu_c = \nu_э/\sqrt{r}$ (для систем типа «k из n») и по формуле $\nu_c = \nu_э/\sqrt{n}$ (для систем типа «1 из n»). При этом выражение функции распределения наработки до отказа параллельных систем имеет следующий вид:

$$F(t) = DM\left(t;\mu_c,\nu_э/\sqrt{d}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu_c}{\nu_э\sqrt{t\,\mu_c/d}}\right),$$

где $d = n$ для систем типа «1 из n», $d = r = n-k+1$ для систем типа «k из n».

Определив значения параметров распределения наработки до отказа системы, известным образом можно вычислить все необходимые показатели надежности этой системы [1].

В частности, среднюю наработку до отказа системы вычисляют по формуле:

$$T_c = \mu_c\left(1+\frac{\nu_c^2}{2}\right).$$

Гамма-процентную наработку до отказа системы (гамма-процентный ресурс) вычисляют по формуле:

$$T_{\gamma c} = \mu_c\left(1+\frac{\nu_э^2\,U_\gamma^2}{2d} - \nu_э U_\gamma\sqrt{\frac{1}{d}+\frac{\nu_э^2 U_\gamma^2}{4d}}\right).$$

Вероятность безотказной работы системы за заданное время (наработку) $t_з$ вычисляют по следующей формуле:

$$R(t_з) = \Phi\left(\frac{\mu_c - t_з}{\nu_э\sqrt{t_з\,\mu_c/d}}\right).$$

В таблице 1 приведены выражения для оценки средней наработки до отказа исследуемых систем, полученные на основе использования экспоненциального распределения и распределения Вейбулла [2], а также предлагаемого метода. При расчете значения средней наработки до отказа систем T_c принято, что элементы равнонадежны и без потери общности принято, что элементы имеют коэффициент вариации наработки $\nu_э = 1$. Отметим, что при коэффициенте вариации наработки элементов, равном единице, оценки по распределению Вейбулла совпадают с оценками на основе экспоненциального распределения.

Решение 1. Вычислим значение средней наработки до отказа T_c дублированной системы («1 из 2») на основе экспоненциального распределения:

$$T_c = T_э\sum_{i=0}^{n-k}(i+k)^{-1} = T_э\sum_{i=0}^{1}(i+1)^{-1} = $$
$$= T_э(1+2^{-1}) = 1{,}5T_э.$$

Решение 2. Вычислим значение средней наработки до отказа T_c дублированной системы («1 из 2») на основе предлагаемого метода:

1) Вычисляем значение эмпирической функции отказа системы F:

$$F = \frac{n}{n+0{,}5} = \frac{2}{2+0{,}5} = 0{,}8.$$

2) По таблице нормированного нормального распределения, например, используя таблицы [3], определяем значение квантили $U_F = U_{0,8} = 0{,}842$.

3) Вычисляем значение средней наработки до отказа T_c дублированной системы предлагаемым методом:

$$T_c = \frac{T_э}{(1+\nu_э^2/2)}\left(1+\frac{\nu_э^2\,U_F^2}{2}+\nu_э U_F\sqrt{1+\frac{\nu_э^2 U_F^2}{4}}\right) =$$
$$= 0{,}67\cdot T_э\left(1+\frac{0{,}842^2}{2}+0{,}842\sqrt{1+\frac{0{,}842^2}{4}}\right) = 1{,}52\cdot T_э.$$

Решение 3. Вычислим значение средней наработки до отказа T_c системы типа «k из n» («3 из 5») на основе экспоненциального распределения:

$$T_c = T_э\sum_{i=0}^{n-k}(i+k)^{-1} = T_э\sum_{i=0}^{2}(i+3)^{-1} =$$
$$= T_э(3^{-1}+4^{-1}+5^{-1}) = 0{,}78\cdot T_э.$$

Таблица 1.

Расчетные оценки средней наработки до отказа параллельных систем.

Метод	Структуры				
	«1 из 2»	«1 из 3»	«1 из 4»	«2 из 3»	«3 из 5»
Расчет на основе экспоненциального и Вейбулла распределений	$1{,}5T_э$	$1{,}83T_э$	$2{,}08T_э$	$0{,}83T_э$	$0{,}78T_э$
Предлагаемый метод	$1{,}52T_э$	$1{,}92T_э$	$2{,}15T_э$	$1{,}01T_э$	$0{,}86T_э$

Решение 4. Вычислим значение средней наработки до отказа T_c системы типа «k из n» («3 из 5») на основе предлагаемого метода:

4) Вычисляем значение эмпирической функции отказа системы F :

$$F = \frac{n-k+1}{n} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

5) По таблице нормированного нормального распределения определяем значение квантили $U_F = U_{0,6} = 0{,}253$.

6) Вычисляем значение средней наработки до отказа T_c системы типа «k из n» («3 из 5») предлагаемым методом:

$$T_c = \frac{T_э}{(1+\nu_э^2/2)}\left(1+\frac{\nu_э^2 U_F^2}{2}+\nu_э U_F\sqrt{1+\frac{\nu_э^2 U_F^2}{4}}\right) =$$

$$=0{,}67\cdot T_э\left(1+\frac{0{,}253^2}{2}+0{,}253\sqrt{1+\frac{0{,}253^2}{4}}\right)=0{,}86\cdot T_э.$$

Аналогично вычисляем значения T_c для других структур. Как видно, все расчетные оценки средней наработки до отказа систем дают хорошее совпадение.

Таким образом, разработан и предлагается инженерный метод расчета надежности механических параллельных систем с нагруженным резервом, который приводит к определению функции распределения (DM-распределения) наработки до отказа рассматриваемых систем, на основании которой можно просто получать оценки всех необходимых показателей надежности этих систем (средней наработки до отказа, гамма-процентной наработки до отказа, вероятности безотказной работы за заданное время, остаточного ресурса и др.).

Список литературы

1. *Стрельников В. П., Федухин А. В.* Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос, 2002. – 486 с.

2. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 423 с.

3. *Азарсков В. Н., Стрельников В. П.* Надежность систем управления и автоматики: Учеб. пособие. – К.: НАУ, 2004. – 164 с.