Кириченко Н.Ф., д.ф.-м.н., **Кривонос Ю.Г.**, д.ф.-м.н. (ІК НАНУ, Україна),
Крак Ю.В., д.ф.-м.н. (КНУ ім. Т. Шевченка, Україна)

ПРОБЛЕМА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ АНАЛІЗУ Й СИНТЕЗУ В ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

На основі розробленого методу збурення псевдообернених матриць [1], розглядаються задачі знаходження загального розв'язку проблем аналізу й синтезу в лінійних дискретних системах керування. Розглядаються задачі термінального керування та спостереження, ідентифікації, синтезу матриць в системах спостереження, синтезу лінійних перетворювачів в системах з дискретним аргументом.

1. Про загальний розв'язок задачі термінального керування для лінійних дискретних систем.

Для задачі термінального керування лінійною дискретною системою

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)\,,\quad k = \overline{0,N} \tag{1.1}$$

$$x(0) = 0,\quad x(k)\in R^n,\ \ u(k)\in R^m,\ \ A(k)\in R^{n\times n},\ \ B(k)\in R^{n\times m}$$

по переводу її траєкторії у цільовий стан

$$x(N+1) = x_{(1)} \tag{1.2}$$

дослідження множини її розв'язків, тобто, загального розв'язку, зводиться до аналізу системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$W(N+1)u = x_{(1)}\,, \tag{1.3}$$

де

$$W(N+1) = \big(W(N+1,0) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, W(N+1,N)\big) \in R^{n\times((N+1)\cdot m)}\,, \tag{1.4}$$

$$u = \big(u^T(0) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, u^T(N)\big) \in R^{(N+1)\cdot m}\,, \tag{1.5}$$

$$W(N+1,k) = A(N)A(N-1)\dots A(k+1)B(k)\,. \tag{1.6}$$

Використовуючи властивості псевдообернених та проекційних матриць [1], для задачі (1.1), (1.2) можна отримані наступні результати.

Розв'язок задачі термінального управління (1.1) – (1.2) існує і єдиний за наступних необхідних і достатніх умов

$$x_{(1)}^T Z\big(W^T(N+1)\big)x_{(1)} = 0\,,\quad \det W^T(N+1)\cdot W(N+1) > 0\,, \tag{1.7}$$

при цьому термінальне керування має вигляд

$$u = \big(W^T(N+1)\cdot W(N+1)\big)^{-1} W^T(N+1)\cdot x_{(1)} = W^T(N+1)P^+x_{(1)}\,, \tag{1.8}$$

де

$$P = \sum_{j=0}^{N} W(N+1,j)\cdot W^T(N+1,j) = W(N+1)\cdot W^T(N+1)\,,$$

що в покомпонентному представленні можна записати так

$$u(k) = W(N+1,k)P^+x_{(1)}\,,\quad k = \overline{0,N}\,. \tag{1.9}$$

Необхідні й достатні умови існування не єдиного розв'язку задачі термінального керування (1.1) – (1.2) мають вигляд

$$x_{(1)}^T Z\big(W^T(N+1)\big)x_{(1)} = 0\,,\quad \det W^T(N+1)\cdot W(N+1) = 0\,, \tag{1.10}$$

при цьому множина термінальних керувань буде наступною

$$\Omega_u = \Big\{ u : u^T = \big(u^T(1) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, u^T(N)\big)^T,\ u(k) = W^T(N+1,k)P^+x_{(1)} + \tag{1.11}$$

$$+ v(k) - W^T(N+1,k)P^+\sum_{j=0}^{N} W(N+1,j)v(j),\quad \forall\, v(k)\in R^m,\ \ k = \overline{0,N}\ \Big\}\,.$$

У випадку, коли розв'язок задачі термінального керування (1.1) – (1.2) не існує і при цьому мінімум величини $\left\|x(N+1)-x_{(1)}\right\|^2$ досягається за єдиного вибору керувань $\hat{u}(k),\ k=\overline{0,N}$, то необхідні й достатні умови виникнення такої ситуації мають вигляд

$$x_{(1)}^T Z\left(W^T(N+1)\right)x_{(1)}>0,\quad \det W^T(N+1)\cdot W(N+1)>0, \tag{1.12}$$

при цьому

$$\hat{u}(k)=W^T(N+1,k)P^{+}x_{(1)},\ k=\overline{0,N} \tag{1.13}$$

Якщо розв'язок задачі (1.1) – (1.2) не існує і при цьому мінімум величини $\left\|x(N+1)-x_{(1)}\right\|^2$ досягається не при єдиному виборі керувань $\hat{u}(k),\ k=\overline{0,N}$, то необхідні й достатні умови для цього випадку мають вигляд

$$x_{(1)}^T Z\left(W^T(N+1)\right)x_{(1)}>0,\quad \det W^T(N+1)\cdot W(N+1)=0, \tag{1.14}$$

при цьому множина керувань $\hat{u}$ буде такою

$$\Omega_{\hat{u}}=\Big\{\hat{u}:\hat{u}^T=\left(\hat{u}^T(1)\vdots\ldots\vdots\hat{u}^T(N)\right)^T,\ \hat{u}(k)=W^T(N+1,k)P^{+}x_{(1)}+ \tag{1.15}$$

$$+v(k)-W^T(N+1,k)P^{+}\sum_{j=0}^{N}W(N+1,j)v(j),\ \forall\ v(k)\in R^m,\ k=\overline{0,N}\ \Big\}.$$

2. Про загальний розв'язок задачі термінального спостереження для лінійних дискретних систем

Для лінійних систем проблема загального розв'язку задачі термінального спостереження стану системи зводиться до проблеми загального розв'язку задачі термінального керування для деякої спряженої системи. Розглянемо вихідну систему

$$x(k+1)=A(k)x(k), \tag{2.1}$$

$$y(k)=G(k)x(k) \tag{2.2}$$

$$\mathrm{k}=\overline{0,\mathrm{N}}\quad \mathrm{x(k)}\in\mathrm{R}^{\mathrm{n}},\quad \mathrm{y(k)}\in\mathrm{R}^{\mathrm{m}},$$

і спряжену систему керування

$$\xi(k)=A^T(k)\xi(k+1)+G^T(k)v_c(N,k),\quad k=\overline{N,0}, \tag{2.3}$$

$$\xi(N+1)=0,\ \ \xi(0)=c, \tag{2.4}$$

тоді представлення лінійної комбінації $c^T x(0)$ від компонент вектору станів системи (2.1) здійснюється у вигляді

$$c^T x(0)=\sum_{k=0}^{N}v_c^T(N,k)x(k), \tag{2.5}$$

де $v_c^T(N,k)$ – функція керування в системі (2.3), (2.4).

Звідси, для системи алгебраїчних рівнянь

$$W_1(N)v_c(N)=c, \tag{2.6}$$

де

$$W_1(N)=\left(W_1(0,0)\vdots\ldots\vdots W_1(0,N)\right)\in R^{n\times((N+1)\cdot m)},$$

$$v_c(N)=\left(v_c^T(N,0)\vdots v_c^T(N,1)\vdots\ldots\vdots v_c^T(N,N)\right)^T\in R^{m(N+1)},$$

$$W_1(0,k)=A^T(0)A^T(1)\ldots A^T(k-1)G^T(k),$$

можна сформулювати наступні висновки.

1. Якщо розв'язок задачі термінального спостереження стану $c^T x(0)$ для системи (2.1), (4.2) існує і єдиний, то необхідні й достатні умови в цьому випадку мають вигляд

$$c^T Z\left(W_1^T(N)\right)c=0,\ \ \det W_1^T(N)W_1(N)>0. \tag{2.7}$$

Тоді функція $v_C(N,k)$, яка визначає термінальне спостереження, має вигляд

$$v_C(N) = \left(W_1^T(N)W_1(N)\right)^{-1} W_1^T(N)c = W_1^T(N)P_1^+ c, \tag{2.8}$$

де $P_1 = W_1(N)W_1^T(N)$.

Якщо (2.7) має місце при $c = e_j$, $j = \overline{1,n}$, $e_j = (0 \ldots 0\,1\,0 \ldots 0)$ – j-ий орт, то вектор стану $x(0)$ системи (2.1), (2.2) представляється формулою

$$x(0) = \left(\sum_{i=0}^{N} W_1(0,i)W_1^T(0,i)\right)^+ \sum_{k=0}^{N} W_1(0,k)\,y(k) \tag{2.9}$$

або

$$x(0) = W_1(N)\left(W_1^T(N)W_1(N)\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y(0) \\ \cdots \\ y(N) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Аналогічно умовам пунктів 2-4 попереднього розділу, можна навести загальний розв'язок задачі (2.1), (2.2) для цих випадків.

В доповіді розглядаються постановки задач і наводяться, аналогічні описаним вище, результати по отриманню загальних розв'язків для задач ідентифікації та побудови ПІД-регуляторів, синтезу матриць в системах спостереження.

3. Про аналіз й синтез функціональних лінійних перетворювачів.

Нехай є послідовність вхідних даних $x(j) \in R^{m-1}$, $j = \overline{1,n}$ і відповідна їм послідовність вихідних даних $y(j) \in R^{p-1}$. Постановка задачі заключається у знаходженні функціональної залежності між вхідними і вихідними даними, тобто у побудові перетворювача F, який здійснює трансформацію вхідних даних у вихідні

$$F(x(j)) = y(j), \tag{3.1}$$

з мінімальною результуючою нев'язкою

$$\sum_{j=1}^{n} \| \Delta y(j) \|^2 \to \min,$$

Аналогічним чином ставиться задача про побудову функціонального перетворювача вихідних даних у вхідні.

Результати робіт [1-4] дозволяють сформулювати необхідні й достатні умови існування і єдиності функціональних перетворювачів, а також необхідні умови оптимального їхнього синтезу.

Розглянемо випадок лінійної залежності даних. Тоді, враховуючи позначення

$$X = (x(1) \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; x(n)) = \begin{pmatrix} x_{(1)}^T \\ \vdots \\ x_{(m-1)}^T \end{pmatrix} \in R^{(m-1)\times n},$$

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x(1) & \vdots & \ldots & \vdots & x(n) \\ 1 & & \ldots & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \ldots \\ J_n^T \end{pmatrix} \in R^{m\times n}, \quad J_n^T = (\underbrace{1 \;\ldots\; 1}_{n}), \tag{3.2}$$

$$Y = (y(1) \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; y(n)) = \begin{pmatrix} y_{(1)}^T \\ \vdots \\ y_{(p-1)}^T \end{pmatrix} \in R^{(p-1)\times n},$$

результуючу систему відносно невідомої матриці A можна записати у вигляді

$$Y = A\tilde{X}, \tag{3.3}$$

$$A = (a(1) \ \vdots \ \dots \ \vdots \ a(m)) = \begin{pmatrix} a^T_{(1)} \\ \vdots \\ a^T_{(p-1)} \end{pmatrix} \in R^{(p-1)\times m}$$

де

Згідно до результатів, отриманих в роботах [1-4] множина всіх розв'язків системи (3.3) має вигляд

$$\Omega_A = \{A : A = Y\widetilde{X}^+ + VZ(\widetilde{X}^T), \forall V \in R^{(p-1)\times m}\}. \qquad (3.4)$$

Для того, щоб система (1.3) була сумісною, необхідно й досить, щоб виконувалась умова

$$\operatorname{tr} YZ(\widetilde{X})Y^T = 0. \qquad (3.5)$$

Для того, щоб система (1.3) мала єдиний розв'язок, необхідно й досить, щоб виконувалась умова

$$\det \widetilde{X}\widetilde{X}^T > 0. \qquad (3.6)$$

У випадку, коли в задачі (3.1) $y(j)$ виступають як вхідні дані, а $x(j)$ – як вихідні, враховуючи позначення (3.2) і

$$\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} y(1) & \vdots & \dots & \vdots & y(n) \\ 1 & & \dots & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ \dots \\ J_n^T \end{pmatrix} \in R^{p\times n}, \qquad (3.7)$$

результуючу систему відносно невідомої матриці B можна записати у вигляді

$$X = B\widetilde{Y}, \qquad (3.8)$$

де $B = (b(1) \ \vdots \ \dots \ \vdots \ b(p)) = \begin{pmatrix} b^T_{(1)} \\ \vdots \\ b^T_{(m-1)} \end{pmatrix} \in R^{(m-1)\times p}$.

В цьому випадку множина всіх рішень системи (3.8) має вигляд

$$\Omega_B = \{B : B = X\widetilde{Y}^+ + WZ(\widetilde{Y}^T), \forall W \in R^{(m-1)\times p}\}. \qquad (1.9)$$

Для того, щоб система (3.8) була сумісна і мала єдиний розв'язок, можна навести необхідні й достатні умови, аналогічні умовам (3.5), (3.6) відповідно.

Висновки. Таким чином, наведений в роботі математичний апарат, оснований на використанні нових властивостей псевдообернених та проекційних матриць [1], а також теорії їх збурення[2], дозволяє отримати загальні розв'язки задач теорії керування для лінійних систем з дискретних аргументом. Дані результати мають перспективу застосування для аналізу й синтезу систем керування, обробки і кодування інформації, прогнозування та адаптивної побудови регуляторів для керування складними системами [3-5].

Список літератури

1. *Кириченко Н.Ф.* Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. – 1997.–№2.–С. 98-107.

2. *Кириченко Н.Ф., Лепеха Н.П.* Возмущение псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей//Проблемы управления и информатики.–2001.-№1.– С. 6-22.

3. *Кириченко Н.Ф., Крак Ю.В., Полищук А.А.* Псевдообратные и проекционные матрицы в задачах синтеза функциональных преобразователей //Кибернетика и системный анализ. – 2004.–№3.–С.116-129.

4. *Кириченко Н.Ф., Матвиенко В.Т.* Оптимальный синтез структур для линейных систем // Проблемы управления и информатики. –1996.-№1-2. – С.162-171.

5. *Кириченко Н.Ф., Куц Р.*(США), *Лепеха Н.П.* Множества принадлежности в задачах классификации сигналов // Проблемы управления и информатики. –2001.–№5 – С.71 –85.