Шевелев А.Г., д.т.н. (НАУ, Украина)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Приведено доказательство некоторых важных теорем для параметрической формы преобразования Лапласа и рассмотрено применение этих теорем для определения изображений и оригиналов решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и в анализе нестационарных динамических систем

Линейными дифференциальными уравнениями описываются возмущенные движения для неустановившихся движений динамических систем. Эти уравнения определяют важные свойства нестационарных, слабо изученных систем автоматического управления: устойчивости при постоянно действующих возмущениях, качество переходных процессов и другие.

Автором систематически использованы в разработке теории нестационарных систем автоматического управления основные теоремы и формулы параметрической формы интегрального преобразования Лапласа, которые сформулированы, доказаны им и опубликованы в цикле работ [2÷7].

Ниже приведены некоторые теоремы, которые не вошли в указанный цикл работ, но которые важны для нестационарной теории систем автоматического управления.

1. Теорема 1 об изображении производных функции $y(t;-\xi)$ по независимому переменному ξ.

Если для функции $y(t;-\xi)$ существует изображение по Лапласу [2,3] параметрической формы,

$$\int_{-\infty}^{t} y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}d\xi = Y(t;s), \tag{1}$$

где t и ξ вещественные независимые переменные, а $s=\sigma+j\omega$ – комплексное переменное $\xi \le t \le \infty$; $-\infty \le \xi \le t$, то изображение производной этой функции по ξ

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{dy(t;-\xi)}{d\xi}\, e^{-s(t-\xi)}d\xi = [sY(t;s)-y(0)]. \tag{2}$$

Доказательство.

Для доказательства применим формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Если $y(t;-\xi)=u(t;-\xi)$, а $dv(t;-\xi)=e^{-s(t-\xi)}d\xi$, то

$$\int_{-\infty}^{t} y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}d\xi = \frac{1}{s}y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}\Bigg|_{\xi=-\infty}^{t} - \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{t}\left[\frac{dy(t;-\xi)}{d\xi}\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi .$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{dy(t;-\xi)}{d\xi}\, e^{-s(t-\xi)}d\xi = -[sY(t;s)-y(0)], \tag{3}$$

где $y(0)=y(t;-\xi)\Big|_{\xi=t}$

Точно таким же образом получается изображение по Лапласу параметрической формы для второй, третьей, ... n-й производных по ξ.

Если для функции $y(t;-\xi)$ и ее производных по ξ существуют изображения по Лапласу параметрической формы и если $Y(t;s)$ является изображением функции $y(t;-\xi)$ (1), то

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{d^2y(t;-\xi)}{d\xi^2}e^{-s(t-\xi)}d\xi = s^2Y(t;s)-sy(0)+\dot{y}(0)]; \tag{4}$$

....

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{d^3y(t;-\xi)}{d\xi^3}e^{-s(t-\xi)}d\xi = -s^3Y(t;s)+s^2y(\circ)-s\dot{y}(0)+\ddot{y}(0)];$$

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{d^ny(t;-\xi)}{d\xi^n}e^{-s(t-\xi)}d\xi = (-1)s^nY(t;s)+\sum_{i=1}^{n}y^{(i-1)}(0)(-s)^{(i-1)},$$

где $y^{(i-1)}(0)=\left.\dfrac{d^{(i-1)}y(t;-\xi)}{d\xi^{(i-1)}}\right|_{\xi=t}$.

Следует отметить, что изображение функции $y(t;-\xi)$ и ее производных по t отличаются от изображений производных по ξ [2,3]:

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{d^ny(t;-\xi)}{dt^n}e^{-s(t-\xi)}d\xi = s^n\circ Y(t;s)-\sum_{i=1}^{n}y^{(i-1)}(0)s^{n-i},$$

где $(\circ)$ символ операторного умножения [2,3].

2. Теорема 2 об изображении производных по t функции $y(t;-\xi)$, умноженных на переменный коэффициент $a(t)$.

1. Изображение первой производной функции $y(t;-\xi)$, умноженной на $a(t)$.

Если функция $y(t;-\xi)$ и ее первая производная по t преобразуемы по Лапласу параметрической формы и $Y(t;s)$ является изображением, то

$$\int_{-\infty}^{t}a(t)\frac{dy(t;-\xi)}{dt}e^{-s(t-\xi)}d\xi = a(t)\circ Y(t;s)-a(\xi)y(0). \tag{5}$$

Доказательство

Очевидно, что изображением функции $y(t;-\xi)$, умноженной на коэффициент $a(t)$ является выражение

$$\int_{-\infty}^{t}a(t)y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}d\xi = a(t)Y(t;s), \tag{6}$$

вследствие того, что интегрирование в (6) ведется по ξ, а t является параметром и $a(t)$ может быть вынесено за знак интеграла.

Продифференцируем по t выражение (6)

$$\frac{da(t)Y(t;s)}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}a(t)\,y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\left[a(t)\frac{dy(t;-\xi)}{dt}+\dot{a}(t)\,y(t;-\xi)-sa(t)\,y(t;-\xi)\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi+$$

$$+a(t)\,y(t;-\xi)e^{-s(t-\xi)}\Big|_{t=\xi}=\dot{a}(t)Y(t;\xi)+a(t)\frac{dY(t;s)}{dt}.$$

Из последнего выражения и на основании формулы (6) следует:

$$\int_{-\infty}^{t}a(t)\frac{dy(t;-\xi)}{dt}e^{-s(t-\xi)}d\xi=\dot{a}(t)Y(t;s)+a(t)\frac{dY(t;s)}{dt}-\int_{-\infty}^{t}[a(t)\,y(t;-\xi)-$$

$$-sa(t)\,y(t;\xi)]e^{-s(t-\xi)}d\xi-a(\xi)\,y(0)=\dot{a}(t)Y(t;s)+\frac{dY(t;s)}{dt}a(t)- \qquad (7)$$

$$-\dot{a}(t)Y(t;s)+a(t)sY(t;s)-a(\xi)\,y(0)=a(t)sY(t;s)+$$

$$+a(t)\frac{dY(t;s)}{dt}-a(\xi)\,y(0)=a(t)s\circ Y(t;s)-a(\xi)\,y(0),$$

где $(\circ)$ – символ операторного произведения [2,3].

2. Изображение второй производной по t функции $y(t;-\xi)$ умноженной на переменный коэффициент $a(t)$.

Если функция $y(t;-\xi)$ и ее первая и вторая производные по t преобразуемы по Лапласу параметрической формы, то

$$\int_{-\infty}^{t}a(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}e^{-s(t-\xi)}d\xi=[a(t)s^2\circ Y(t;s)-(a(\xi)s-\dot{a}(\xi))\,y(0)-a(\xi)\,\dot{y}(0)]. \qquad (8)$$

Доказательство.

Продифференцируем по t формулу (5):

$$\frac{d}{dt}[a(t)s\circ Y(t;s)-a(\xi)\,y(0)]=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t}a(t)\frac{dy(t;-\xi)}{dt}e^{-s(t-\xi)}d\xi=$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\left[a(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}e^{-s(t-\xi)}d\xi\right]+\left[\dot{a}(t)\frac{dy(t;-\xi)}{dt}-sa(t)\frac{dy(t;\xi)}{dt}\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi+$$

$$+a(t)\frac{dy(t;-\xi)}{dt}e^{-s(t-\xi)}\Big|_{t=\xi}.$$

Из последнего равенства после дифференцирования его левой части по t и изображения по Лапласу правой части, получим:

$$\int_{-\infty}^{t}a(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}e^{-s(t-\xi)}d\xi=\left[\dot{a}(t)sY(t;s)+a(t)s\frac{dy(t;-\xi)}{dt}+\dot{a}(t)\frac{dY(t;s)}{dt}+a(t)\frac{d^2Y(t;s)}{dt^2}\right]-$$

$$-[\dot{a}(t)s\circ Y(t;s)-\dot{a}(\xi)\,y(0)]+[sa(t)s\circ Y(t;s)-sa(\xi)\,y(0)]-a(\xi)\,\dot{y}(0).$$

После элементарных преобразований определим, что

$$\int_{-\infty}^{t}a(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}e^{-s(t-\xi)}d\xi=[a(t)s^2\circ Y(t;s)-(sa(\xi)-\dot{a}(\xi))\,y(0)-a(\xi)\,\dot{y}(0)],$$

где $\dot{a}(t)$ и $\dot{y}(t-\xi)$ производные по t.

3. Изображение третьей производной по t функции $y(t;-\xi)$, умноженной на переменный коэффициент $a(t)$

Если функция $y(t;-\xi)$ и ее первая, вторая и третьи производные преобразуемы по Лапласу параметрической формы, то

$$\int_{-\infty}^{t} a(t)\frac{d^3y(t;-\xi)}{dt^3}e^{-s(t-\xi)}d\xi=[a(t)s^3\circ Y(t;s)-(s^2a(\xi)-s\dot{a}(\xi)-\ddot{a}(\xi))y(0)-$$
$$-(sa(\xi)-\dot{a}(\xi))\dot{y}(0)-a(\xi)\ddot{y}(0)]. \tag{9}$$

Доказательство.

Продифференцируем формулу (8) по t, имея ввиду, что $a(\xi)$, $\dot{a}(\xi)$, $\ddot{a}(\xi)$, $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$ – это постоянные:

$$\frac{d}{dt}[a(t)s^2\circ Y(t;s)]=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} a(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}e^{-s(t-\xi)}d\xi=\int_{-\infty}^{t}\left[a(t)\frac{d^3y(t;-\xi)}{dt^3}+\dot{a}(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}-\right.$$
$$\left.-sa(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}\right]e^{-s(t-\xi)}d\xi+\left(a(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}e^{-s(t-\xi)}\right)\Bigg|_{t=\xi}. \tag{10}$$

Определим производную по t левой части последнего равенства. На основании формулы операторного произведения

$$\frac{d}{dt}[a(t)s^2\circ Y(t;s)]=\frac{d}{dt}\left[a(t)s^2Y(t;s)+2a(t)s\frac{dY(t;s)}{dt}+a(t)\frac{d^2Y(t;s)}{dt^2}\right]=$$
$$=\left[\dot{a}(t)s^2Y(t;s)+a(t)s^2\frac{dY(t;s)}{dt}+2s\dot{a}(t)\frac{dY(t;s)}{dt}+2sa(t)\frac{d^2Y(t;s)}{dt^2}+\right.$$
$$\left.+\dot{a}(t)\frac{d^2Y(t;s)}{dt^2}+a(t)\frac{d^3Y(t;s)}{dt^3}\right].$$

В свою очередь преобразуем по Лапласу правую часть равенства (10)

В равенстве (10) на основании (8)

$$\int_{-\infty}^{t}\dot{a}(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}e^{-s(t-\xi)}d\xi=[\dot{a}(t)s^2\circ Y(t;s)-(s\dot{a}(\xi)-\ddot{a}(\xi)y(0)-\dot{a}(\xi)\dot{y}(0)];$$

$$-\int_{-\infty}^{t}sa(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}e^{-s(t-\xi)}d\xi=-s[a(t)s^2\circ Y(t;s)-(sa(\xi)-\dot{a}(\xi)y(0)-a(\xi)\dot{y}(0)].$$

Подставим три последних выражения в равенство (10).

В результате элементарных преобразований получим:

$$\int_{-\infty}^{t}a(t)\frac{d^3y(t;-\xi)}{dt^3}e^{-s(t-\xi)}d\xi=\left[a(t)s^3Y(t;s)+3a(t)s^2\frac{dY(t;s)}{dt}+3a(t)s\frac{d^2Y(t;s)}{dt^2}+\right.$$
$$\left.+a(t)\frac{d^3Y(t;s)}{dt^3}-(a(\xi)s^2-\dot{a}(\xi)s-\ddot{a}(\xi)y(0)-(a(\xi)s-\dot{a}(\xi))\dot{y}(0)-a(\xi)\ddot{y}(0)\right]=$$
$$=[a(t)s^3\circ Y(t;s)-(a(\xi)s^2-\dot{a}(\xi)s-\ddot{a}(\xi)y(0)-(a(\xi)s-\dot{a}(\xi)\dot{y}(0)-a(\xi))\ddot{y}(\circ)],$$

что и требовалось доказать.

4. На основе точно такой же формы доказательства можно показать, что изображение любой n-й производной по t функции $y(t;-\xi)$, умноженной на переменной коэффициент $a(t)$ равно:

$$\int_{-\infty}^{t} a(t)\frac{d^n y(t;-\xi)}{dt^n}e^{-s(t-\xi)}d\xi \left[a(t)s^n \circ Y(t;s) - a(\xi)\sum_{k=1}^{n} y^{(k-1)}(0)s^{n-k} + \sum_{i=1}^{n-1} a^i(\xi)\sum_{j=1}^{n} y^{(j-1)}(0)s^{n-j-i} \right], \tag{11}$$

где $\dfrac{d^i a(t)}{dt^i} = a^{(i)}(t)\Big|_{t=\xi} = a^{(i)}(\xi)$; $\dfrac{d^k y(t;-\xi)}{dt^k} = y^{(k)}(t;-\xi)\Big|_{t=\xi} = y^{(k)}(0)$.

3. Некоторые свойства параметрической формы преобразования Лапласа и решения линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Приведенные выше две теоремы позволяют находить решения линейных дифференциальных уравнений с переменны коэффициентами и поэтому важны в анализе нестационарных линейных систем автоматического управления.

Процедуру решения на основе указанных теорем 1 и 2 рассмотрим на конкретном примере однородного дифференциального уравнения третьего порядка,

$$\frac{d^3y(t;-\xi)}{dt^3} + (9t^2+3)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2} + (27t^4+18t^2+18t+2)\frac{dy(t;-\xi)}{dt} + (27t^6+27t^4+54t^3 + 6t^2+18t+6)\,y(t;-\xi) = 0, \tag{12}$$

при следующих начальных условиях:

$$y(t;-\xi)\Big|_{t=\xi=1} = y(0) = 2; \quad \dot{y}(t;-\xi)\Big|_{t=\xi=1} = 1; \quad \ddot{y}(t;-\xi)\Big|_{t=\xi=1} = \ddot{y}(0) = 1.$$

Решение.

1. Изобразим по Лапласу (1) используя теорему 2, однородное дифференциальное уравнение (12) с указанными начальными условиями при $t=\xi=1$, предварительно обозначив коэффициенты уравнения буквами $a_i(t)$, $i=0,1,2,3$, $a_0(t)=1$; $a_1(t)=(9t^2+3)$; $a_2(t)=(27t^4+18t^2+18t+2)$; $a_3=(27t^6+27t^4+54t^3+6t^2+18t+6)$.

Так

$$L\left[\frac{d^3y(t;-\xi)}{dt^3}\right] = s^3\circ Y(t;s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0) = s^3\circ Y(t;s) - 2s^2 - s - 1;$$

$$L\left[a_1(t)\frac{d^2y(t;-\xi)}{dt^2}\right] = a_1(t)s^2\circ Y(t;s) - [sa_1(\xi)+\dot{a}_1(\xi))\,y(0) - a_1(\xi)\,\dot{y}(0)] =$$

$$= a_1(t)s^2\circ Y(t;s) - 24s + 36 - 12 = a_1(t)s^2\circ Y(t;s) - 24s + 24;$$

$$L\left[a_2(t)\frac{dy(t;-\xi)}{dt}\right] = a_2(t)s\circ Y(t;s) - a_2(\xi)\,y(0) = a_2(t)s\circ Y(t;s) - 130, \tag{13}$$

где $a_1(\xi) = (9t^2+3)\Big|_{t=\xi=1} = 12$; $\dot{a}_1(t) = (9t^2+3)^1 = 18t\Big|_{t=\xi=1} = 18$;

$a_2(\xi) = (27t^4+18t^2+18t+2)\Big|_{t=\xi=1} = 65$; $y(0)=2$; $\dot{y}(0)=1$; $\ddot{y}(0)=1$.

Подставим выражения для производных (13) в изображение по Лапласу уравнение (12), после элементарных преобразований получим равенство:

$$(s^3 + a_1(t)s^2 + a_2(t)s + a_3(t))\circ Y(t;s) = (2s^2+25s+107). \tag{14}$$

Умножив операторно слева и справа в равенстве (14) на обратный оператор $A^{-1}(t;s)$ для оператора $A(t;s)=(s^3+a_1(t)s^2+a_2(t)+a_3(t))$, определим изображение решения однородного уравнения (12)

$$Y(t;s)=Y_0(t;s)=A^{-1}(t;s)(2s^2+25s+107)=(2s^2+25s+107)A^{-1}(t;s)= \\ =(2s^2+25s+107)Y_g(t;s) \quad (15)$$

так как в последнем выражении операция умножения коммутативна, и $A^{-1}(t;s)$ есть изображение по Лапласу функции Грина $Y_g(t;s)$ [6].

2. Для определения оригинала решения однородного уравнения по выражению (15) и на основании теоремы 1 необходимо определить оригинал функции Грина $y_g(t;s)$.

Функция Грина $y_g(t;s)$ может быть определена как некоммутативная свертка фундаментальной системы функций-решений уравнения (12) $y_{1g}(t;-\xi)=e^{-(t^3-\xi^3)}$, $y_{2g}(t;-\xi)= \ =e^{-(t^3-\xi^3)-(t-\xi)}$, $y_{3g}(t;-\xi)=e^{-(t^3-\xi^3)-2(t-\xi)}$, каждая из которых является решением однородного дифференциального уравнения первого порядка системы из трех дифференциальных уравнений в нормально форме Коши, к которой может быть преобразовано дифференциальное уравнение (12):

$$\frac{dy_{1g}(t;-\xi)}{dt}+3t^2y_{1g}(t;-\xi)=0, \quad y_{1g}(t;-\xi)\Big|_{t=\xi}=y_{1g}(0)=1;$$
$$\frac{dy_{2g}(t;-\xi)}{dt}+(3t^2+1)y_{2g}(t;-\xi)=0, \quad y_{2g}(0)=1; \quad (16)$$
$$\frac{dy_{3g}(t;-\xi)}{dt}+(3t^2+2)y_{3g}(t;-\xi)=0, \quad y_{3g}(0)=1,$$

коэффициенты которых $s_1(t)=3t^2$, $s_2(t)=(3t^2+1)$, $s_3(t)=(3t^2+2)$ являются корнями истинного характеристического уравнения [6]

$$[s^3+(9t^2+3)s^2+(27t^4+18t^2+2)s+(27t^6+27t^4+6t^2)]=0,$$

которое есть частью формального характеристического уравнения, которое определяется формально из левой части преобразованного по Лапласу (1) дифференциального уравнения (12)

$$(s^3+(9t^2+3)s^2+27t^4+18t^2+2)s+(27t^6+27t^4+54t^3+6t^2+18t+6)=0.$$

Функция Грина $y_g(t;s)$

$$y_g(t;s)=\int_{\xi}^{t}y_{1g}(t;-\tau_1)d\tau_1\int_{\xi}^{\tau_1}y_{2g}(\tau_1;-\tau_2)y_3(\tau_2;-\xi)d\tau_2=$$
$$=\int_{\xi}^{t}e^{-(t^3-\tau_1^3)}d\tau_1\int_{\xi}^{\tau_1}e^{-(\tau_1^3-\tau_2^3)-(\tau_1-\tau_2)}e^{-(\tau_2^3-\xi^3)-2(\tau_2-\xi)}d\tau_2= \quad (17)$$
$$=0{,}5e^{-(t^3-\xi^3)}-1e^{-(t^3-\xi^3)-(t-\xi)}+0{,}5e^{-(t^3-\xi^3)-2(t-\xi)}.$$

Определим решение однородного уравнения (12) согласно теореме 1 как оригинал для решения в изображении по Лапласу (15)

$$y(t;-\xi)=y_0(t;-\xi)=2\frac{d^2y_g(t;-\xi)}{d\xi^2}-25\frac{dy_g(t;-\xi)}{d\xi}+107y_g(t;-\xi). \qquad (18)$$

В равенстве (18) на основании (17) при $t=\xi=1$

$$\begin{aligned}
&2\frac{d^2y_g(t;-\xi)}{d\xi^2}=2\cdot 0{,}5(6\xi+9\xi^4)e^{-(t^3-\xi^2)}-2[6\xi+(3\xi^2+1)^2]e^{-(t^3-\xi^3)-(t-\xi)}+\\
&+2\cdot 0{,}5[6\xi+(3\xi^2+2)^2]e^{-(t^3-\xi^3)-2(t-\xi)}=15e^{-(t^3-\xi^3)}-44e^{-(t^3-\xi^3)-(t-\xi)}+31e^{-(t^3-\xi^3)-2(t-\xi)};\\
&-25\frac{dy_g(t;-\xi)}{d\xi}=-25\cdot 0{,}5\cdot 3\xi^2e^{-(t^3-\xi^3)}+25(3\xi^2+1)e^{-(t^3-\xi^3)-(t-\xi)}-\\
&-25\cdot 0{,}5(3\xi^2+2)e^{-(t^3-\xi^3)-2(t-\xi)}=-37{,}5e^{-(t^3-\xi^3)}+100e^{-(t^3-\xi^3)-(t-\xi)}-62{,}5e^{-(t^3-\xi^3)-2(t-\xi)};\\
&107y_g(t;-\xi)=0{,}5\cdot 107e^{-(t^3-\xi^3)}-107e^{-(t^3-\xi^3)-(t-\xi)}+0{,}5\cdot 107e^{-(t^3-\xi^3)-2(t-\xi)}=\\
&=53{,}5e^{-(t^3-\xi^3)}-107e^{-(t^3-\xi^3)-(t-\xi)}+53{,}5e^{-(t^3-\xi^3)-2(t-\xi)}.
\end{aligned} \qquad (19)$$

Подставив почленно выражения (19) в равенство (18), определим оригинал решения однородного дифференциального уравнения (12)

$$y_0(t;-\xi)=31e^{-(t^3-\xi^3)}-51e^{-(t^3-\xi^3)-(t-\xi)}+22e^{-(t^3-\xi^3)-2(t-\xi)}. \qquad (20)$$

В заключение следует отметить важность и полезность вышеизложенного для изучения неустановившихся движений динамических систем и теории нестационарных систем автоматического управления.

Литература

1. *Zsdeh L.* Frequency analysis of variable networks // Proc. JRE Vol. 38, March 1950, pp. 291-299.

2. *Шевелев А.Г.* Применение преобразования Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. // Украинский математический журнал. – К.: том 21, № 5, 1969, сс. 640 – 652.

3. *Шевелев А.Г.* Параметрическая форма преобразования Лапласа для анализа нестационарных динамических систем. //Вісник націон. авіац. ун-ту – К,: Вид. НАУ, № 1, 2001, сс. 70 – 78.

4. *Шевелев А.Г.* Применение преобразования Лапласа для анализа автоматических систем с переменными параметрами. // Сложные системы управления. – К.: Наукова думка, вып. 3, 1967, сс. 26 – 31.

5. *Шевелев А.Г.* Некоторые свойства преобразования Лапласа для анализа автоматических систем с переменными параметрами. // Сложные системы управления. – К.: Наукова думка, вып. 4, 1968, сс. 100 – 106.

6. *Шевелев А.Г.* Оценка экспоненциальной устойчивости линейных нестационарных динамических систем; критерии устойчивости. // Кибернетика и вычислительная техника. – К.: изд. ин-т Кибернетики НАН Украины. – вып. 125, 1999, сс. 3 – 15.

7. *Шевелев А.Г.* Качество переходных процессов в нестационарных системах автоматического управления; косвенные методы оценки качества и устойчивость. // Кибернетика и вычислительная техника. – К.: изд. ин-т Кибернетики НАН Украины. – вып. 133, 2001, сс. 19 –32.