Туник А.А., д.т.н., **Абрамович Е.А.** (НАУ, Украина)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ МЕТОДОМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ.

В данном докладе предлагается метод размещения полюсов динамической обратной связи с помощью модального управления в устойчивой области. В известной ранее литературе данная задача решалась для непрерывной системы. Новым в работе является решение этой задачи для дискретной системы управления. Приведен пример модального управления для дискретных систем управления продольным движением малого БПЛА.

Метод модального управления получил широкое развитие для задач синтеза автоматических систем. Наиболее полно этот метод развит для случаев определения статической обратной связи при полностью измеряемых переменных состояния по заданному расположению корней характеристического полинома [1]. Здесь следует упомянуть известную формулу Аккермана [2]. В то же время определение динамической обратной связи при неполностью измеряемых переменных состояния вызывает значительные трудности. Данная задача решена для непрерывных систем в [1]. Настоящая работа посвящена решению модального управления для дискретных динамических систем при неполностью измеряемых переменных состояния. Рассмотрим одномерную разомкнутую систему, состоящую из последовательного соединения исполнительного механизма и объекта

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \qquad (1)$$

где $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times 1}, C \in R^{\ell\times n}$.

Желаемые собственные числа замкнутой системы

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p\} \qquad (2)$$

где p – количество полюсов замкнутой системы $p \le \min(n+q, q(\ell+1)+\ell)$, q – порядок регулятора. Передаточная функция объекта имеет вид

$$G(s) = g(s) = C(sI_n - A)^{-1}B = \frac{1}{p(s)}N\begin{bmatrix}1 & s & s^2 \ldots s^q\end{bmatrix}' \qquad (3)$$

где I_n – единичная матрица размерностью $n\times n$, N-матрица размерностью $\ell \times n$, которая формируется коэффициентами числителя матрицы передаточной функции, p(s)-характеристический полином разомкнутой системы, который определяется

$$p(s) = |sI_n - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad (4)$$

Вначале рассмотрим непрерывную систему, и будем синтезировать систему для непрерывного случая, а далее преобразуем непрерывную систему в дискретную с помощью билинейного преобразования. Известно, что определение собственных чисел всегда связано с погрешностями, и решение задачи непосредственно для дискретных задач связано со значительными трудностями, так как собственные числа ограничены малой областью (единичным кругом). Для задач управления полетом полюса дискретных моделей, соответствующие низкочастотным модам продольного и бокового движений, расположены достаточно близко к единичной окружности, поэтому погрешности вычислений могут смещать их в неустойчивую область. Вычислительные процедуры модального управления для непрерывных систем оказываются более устойчивы к погрешностям вычислений. В связи с этим будем решать задачу для непрерывной системы следуя методу, предложенному в [1], а далее перейдем к дискретной системе, преобразуя непрерывную с помощью билинейного преобразования.

Предположим, что регулятор имеет форму

$$f'(s) = \frac{1}{p_f(s)}\begin{bmatrix}1 & s & s^2 \cdots s^q\end{bmatrix}M \tag{5}$$

где $p_f(s)$ – характеристический полином регулятора, $M \in R^{(q+1)\times\ell}$.

Характеристический полином замкнутой системы

$$p_c(s) = s^{n+q} + \alpha_{n+q-1}s^{n+q-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \tag{6}$$

Задан вектор d - вектор разностей, который определяется полиномами замкнутой $p_c(s)$ и разомкнутой систем $p(s)$, т.е

$$d(s) = p_c(s) - p(s)s^q, \tag{7}$$

Коэффициенты полинома d представлены вектором

$$d = \begin{bmatrix}\alpha_0 \ldots \alpha_{q-1} & \alpha_q - a_0 \ldots \alpha_{q+n-1} - a_{n-1}\end{bmatrix}^T \tag{8}$$

где а – коэффициенты полинома разомкнутой системы, а α - коэффициенты полинома замкнутой системы. Запишем уравнение в форме блочных матриц, которое связывает объект и регулятор:

$$d = Zf \tag{9}$$

Матрица Z состоит из коэффициентов характеристического полинома разомкнутой системы a и коэффициентами полинома числителя матрицы передаточной функции n:

$$Z = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & n_{11} & 0 & \cdots & 0 & & n_{\ell 1} & 0 & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & \cdots & 0 & n_{12} & n_{11} & \cdots & 0 & & & n_{\ell 1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & a_0 & \vdots & \vdots & & n_{11} & & \vdots & \vdots & & n_{\ell 1} \\
a_{n-1} & a_{n-2} & & \vdots & n_{1\ell} & \vdots & & \vdots & \cdots & n_{\ell n} & \vdots & & \vdots \\
1 & a_{n-1} & & \vdots & 0 & n_{1\ell} & & \vdots & & 0 & n_{\ell n} & & \vdots \\
0 & 1 & & \vdots & \vdots & 0 & & \vdots & & \vdots & 0 & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & & a_{n-1} & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & n_{1\ell} & & 0 & 0 & & n_{\ell n}
\end{array}\right] \tag{10}$$

Вектор f является вектором искомых величин, состоит из параметров регулятора:

$$f = \begin{bmatrix}f_0 & \ldots & f_{q-1} & m_{01} & m_{11} & \ldots & m_{q1} & \ldots & m_{0\ell} & m_{1\ell} & \ldots & m_{q\ell}\end{bmatrix}^T \tag{11}$$

Характеристический полином замкнутой системы определяется двумя полиномами $p_d(s)$ и $p_e(s)$, где $p_d(s)$ -характеристический полином, определяемый желаемыми корнями замкнутой системы как

$$p_d(s) = \prod_{i=1}^{p}(s - \gamma_i) = s^p + \sum_{i=1}^{p} d_{p-i}s^{p-i} \tag{12}$$

и $p_e(s)$ - остаточный полином:

$$p_e(s) = \frac{p_c(s)}{p_d(s)} = s^t + \sum_{i=1}^{t} e_{t-i}s^{t-i}, \quad \text{где} \quad t = n + q - p \tag{13}$$

Далее можем записать

$$p_c(s) = p_d(s)\cdot p_e(s) = p_d(s)\cdot\left(s^t + \sum_{i=1}^{t} e_{t-i}s^{t-i}\right) = p_d(s)\cdot s^t + \sum_{i=1}^{t} p_d(s)\cdot e_{t-i}s^{t-i} \tag{14}$$

Определим разностный полином $d(s)$:

$$d(s)=p_c(s)-p(s)s^q=p_c(s)s^t-p(s)s^q+\sum_{i=1}^{t}p_d(s)\cdot e_{t-i}s^{t-i} \tag{15}$$

Отсюда запишем
$$d=d_0+D_pe \tag{16}$$
где d_0- формируется коэффициентами разности $(p_d(s)s^t-p(s)s^q)$; e - вектор, формируемый неизвестными коэффициентами e_i; а вектор D_p: $D_p=[d_1 \quad d_2 \quad \ldots \quad d_t]$ определяется коэффициентами d_i полинома $p_d(s)s^{t-i}$.

Учитывая (16) и (9) можно записать
$$d_0+D_pe=Zf \tag{17}$$
Разделим вектор f на две составляющие
$$f=[f_1 \quad f_2]' \tag{18}$$
где f_2 состоит из p элементов, и f_1 состоит из $q(\ell+1)+\ell-p$ свободных элементов. В соответствии с (18) разложим Z
$$Z=[Z_1 \quad Z_2] \tag{19}$$
Учитывая (17)-(19) запишем:
$$d_0+D_pe=[Z_1 \quad Z_2]\cdot\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix} \tag{20}$$

Отсюда
$$\underbrace{d_0-Z_1f_1}_{=\hat{d}}=Z_2f_2-D_pe=\underbrace{[Z_2 \quad -D_p]}_{=\hat{X}}\underbrace{\begin{bmatrix}f_2\\ e\end{bmatrix}}_{=\hat{f}} \tag{21}$$
$$\hat{d}=\hat{X}\hat{f} \tag{22}$$
Искомый вектор параметров регулятора определяется из выражения (22):
$$\hat{f}=\hat{X}^{-1}\hat{d} \tag{23}$$

Как показано в [5], размещение полюсов внутри некоторой области на комплексной плоскости, ограничивающей колебательность, запас устойчивости, максимальную полосу пропускания системы гарантирует высокое качество и робастность системы.

Уравнение (23) является решением для непрерывной системы. Вектор f фактически определяет параметры непрерывного регулятора $F(s)$ заданной структуры, а далее путем билинейного преобразования определяем параметры дискретного регулятора $F(z)$.

Пример. Размещение полюсов динамической обратной связи в дискретных системах управления продольным движением малого БПЛА.

Численные данные для приведенного ниже примера использовались из заграничного источника. Модель продольного движения малого БПЛА имеет вид [3]:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0.0345 & 6 & -9.78 & 0 & 0\\ -0.0041 & -1.76 & 0 & 0.99 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0.0033 & -25.7 & 0 & -2.19 & 0\\ 0 & -69.4 & 69.4 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad \mathbf{B}=[0.36 \quad -0.16 \quad 0 \quad -31.1 \quad 0]^T \quad C=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad D=[0 \quad 0 \quad 0]' \tag{24}$$

Желаемые собственные числа замкнутой системы для дискретного случая :
$$\Gamma=\{0{,}85;\quad 0{,}87\pm0{,}5j;\quad 0.28\pm0.05j;\quad 0.93;\quad 0.96;\quad 0.965\} \tag{25}$$

В связи с тем, что некоторые желаемые собственные числа в (25) достаточно близки к окружности единичного радиуса, то расчеты дискретной динамической связи непосредственно по вышеуказанному алгоритму приводит к смещению одного-двух полюсов за пределы единичного круга. Поэтому будем решать задачу для непрерывной системы, а далее перейдем к дискретной.

Желаемые собственные числа непрерывной замкнутой системы были получены путем билинейного преобразования (25) :

$$\Gamma=\{-20;\quad -2{,}7\pm 4{,}5j;\quad -0.28\pm 2.5j;\quad -0.03;\quad -0.0023;\quad -0.0015\} \tag{26}$$

В соответствии с (10) формируем матрицу Z размерностью 9×8. Выражение является достаточно громоздким, поэтому в статье не приводится.

Из (16) имеем:

$$d_0=[0\quad 20\quad 119\quad 731\quad 1184\quad 3500\quad 117\quad 0.4\quad 0.0003]', \tag{27}$$

$$D_p=[1\quad 26\quad 157\quad 791\quad 1188\quad 3503\quad 118\quad 0.45\quad 0.00035]' \tag{28}$$

В соответствии с (21) получаем матрицу $\hat{X}$ размерностью 9×9. Выражение также является достаточно громоздким, поэтому в статье не приводится.

Искомый вектор параметров регулятора в соответствии с (23):

$$\hat{f}=[-1.2\quad -0.9\quad 279\quad -2.5\quad -4.2\quad -0.6\quad -0.0023\quad -0.0000021\quad -1]' \tag{29}$$

Если сделать замену переменных с помощью билинейного преобразования [4], то можно преобразовать непрерывную систему в дискретную. Известно, что дискретная замкнутая система устойчива, если корни характеристического уравнения находятся в окружности единичного радиуса.

После выполнения всех расчетов, указанных выше, получили регулятор:

$$F(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{140s^2-0.48s-1.3}{300s^2+600.5s+1} & \dfrac{-0.3s^2-2.1s-2.6}{300s^2+600.5s+1} & \dfrac{-s^2-0.45}{300s^2+600.5s+1}\end{bmatrix} \tag{30}$$

Преобразуя (30) с помощью билинейного преобразования получим:

$$F(z)=\begin{bmatrix}\dfrac{0.46z^2-0.9z+0.45}{z^2-1.961z+0.9608} & \dfrac{-0.001z^2+0.0019z-0.001}{z^2-1.961z+0.9608} & \dfrac{-0.003z^2+0.007z-0.003}{z^2-1.961z+0.9608}\end{bmatrix} \tag{31}$$

Замкнутая система устойчива, поскольку все корни характеристического уравнения находятся в окружности единичного радиуса.

Для полученной дискретной системы были определены H_2-норма (среднеквадратичный интегральный показатель качества) и H_∞ – норма (функция комплиментарной чувствительности, что является мерой робастности [2]): $H_2=0{,}899$; $H_\infty=1{,}52$.

Малое значение H_2-нормы свидетельствует о достаточно хорошей точности системы, а небольшое значение H_∞ – нормы свидетельствует о достаточно хорошей робастности системы.

Такой результат является вполне самостоятельным решением, но, кроме того, в дальнейшем может быть улучшен с помощью робастной параметрической оптимизации [3].

Список литературы

1. *M.T. Soylemez., N. Munro.* A Parametric Solution to the Pole Assignment Problem Using Dynamic Output-Feedback. IEEE Trans. on Automatic Control. 2001, May. Vol. 46, N.5, p.p. 711-723.

2. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable Feedback Control. Analysis and Design. John Wiley & Sons.-1997.-559p.

3. *A.A. Tunik, E.A. Abramovich.* Parametric robust optimization of the digital flight control systems, Вісник НАУ, №2, 2003, с.31-37.

4. *В.А.Бесекерский, Е.П.Попов.* Теория систем автоматического регулирования. М., Наука.1966, 596с.

5. *Ackermann J.* . Parameter Space Design of Robust Control Systems//IEEE Trans. on Automatic Control.1980.-Dec.-Vol. AC-25, N.6.-p. 1058 – 1072.