Коба Е.В., к.т.н., (НАУ, Украина)
Михалевич К.В., (ИК НАНУ, Украина)

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ

Исследуются системы обслуживания с циклическим временем ожидания заявок $GI/G/1$ и $SM/SM/1$, в которых время пребывания заявок на орбите имеет общее нерешетчатое распределение, а также принята дисциплина обслуживания FCFS. Выведены условия эргодичности вложенной цепи Маркова. Представлены результаты статистического моделирования.

Система с повторением заявок – это такая система массового обслуживания (СМО), в которой при занятости каналов обслуживания заявка отправляется на орбиту, на которой пребывает на протяжении постоянного времени T или случайного времени γ, после чего возвращается с орбиты и снова делает попытку попасть на обслуживание. Количество таких попыток в большинстве моделей не ограниченно; также предполагается, что та заявка, которая первой возвращается, когда хотя бы один канал свободный, сразу идет на обслуживание. С проблематикой этого раздела теории можно ознакомиться по обзорам [1], [2]. Так, венгерский математик Ласло Лакатош впервые рассмотрел особый тип СМО с возвращением заявок [3]. Это так называемые СМО с циклическим ожиданием.

Модель Лакатоша представляет собой одноканальную СМО с постоянным временем T пребывания на орбите, без потерь, без мест ожидания, неограниченной орбитой и дисциплиной обслуживания в порядку очереди (*FCFS* – first come, first served). Профессор Лакатош рассматривал такую систему [3] как модель, возникшую при исследовании процесса посадки воздушных суден в связи с тестированием имитационной модели. Эту задачу поставил ему профессор Загребского университета Вацлав Черек. Модель Лакатоша характерна тем, что, во-первых, время на орбите СМО является постоянной величиной, во-вторых, дисциплина обслуживания в системе – *FCFS*. Для систем с циклическим ожиданием это означает, что когда при занятости канала обслуживания заявка отправляется на орбиту, то заявки, которые поступили позднее нее (и даже тогда, когда она находится на орбите), раньше ее обслужиться не могут. Таким образом, если заявка B возвращается с орбиты, но к этому времени некоторая заявка A, которая поступила раньше B, еще не обслужилась, то заявка B опять идет на орбиту. Следовательно, обслуживание ведется в порядке очереди, учитывая и моменты поступления заявок, которые находятся на орбите.

Рассмотрим СМО, в которой входящий поток – поток Пуассона с параметром λ, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону с параметром μ; обслуживание заявки начинается сразу в момент ее появления в системе или (в случае занятости канала обслуживания, наличия заявок на орбите или некорректной позиции заявки) в моменты, которые отличаются от момента появления на время, кратное некоторому T в соответствии с дисциплиной обслуживания $FCFS$. Л. Лакатош в роботе [3] изучил поведение такой СМО методом вложенных цепей Маркова; им была найдена производящая функция величины очереди и условие эргодичности вложенной цепи Маркова, состояния которой соответствуют количеству заявок в системе в моменты $t_k - 0$, где t_k – момент начала обслуживания k-ой заявки.

Условием существования эргодического распределения является неравенство

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}{1-e^{-\lambda T}}.$$

Л. Лакатош исследовал также другие разновидности этой системы; см. [4], [5]. В работе [6] нами была обобщена СМО Лакатоша, а именно, была предложена одноканальная СМО, которая характеризуется рекуррентным входным потоком заявок, общим распределением времени обслуживания и общим распределением времени пребывания заявки на орбите $GI/G/1$. В этой модели сохранена дисциплина Лакатоша, которая обьединяет два принципа: пребывание заявок на орбите и обслуживание в порядке очереди (FCFS). Мы назвали такую модель обобщенной моделью типа Лакатоша.

Введем необходимые обозначения:

t_n $(n \geq 0)$ – момент поступления в систему заявки n;

$\xi_n = t_n - t_{n-1}$ $(n \geq 1)$;

Y_n – время обслуживания заявки n;

γ_{nk} – длительность k-ого времени пребывания n-ой заявки на орбите, если до этого не произошло обслуживание этой заявки;

W_n – время от момента t_n до того момента, когда будет обслужено заявку $n-1$, или 0, если ее было обслужено ранее.

В статье [6] допускается, что все случайные величины ξ_n, Y_n, γ_{nk} независимы в совокупности и имеют функции распределения

$$A(x) = \mathrm{P}\{\xi_n \leq x\}, \quad B(x) = \mathrm{P}\{Y_n \leq x\}, \quad D(x) = \mathrm{P}\{\gamma_{nk} \leq x\}.$$

Это, в частности, означает следующее. Допустим, что $W_n = y > 0$. Тогда фактическое время ожидания заявки n составляет Z_y, где Z_y – первая точка процесса восстановления $(\gamma_{n1}, \gamma_{n1} + \gamma_{n2}, \ldots)$, которая достигла уровня y, т.е.

$$Z_y = \min\{k : \gamma_{n1} + \ldots + \gamma_{nk} \geq y\}.$$

Обозначим также

$$a = \mathrm{E}\{\xi_n\}, \quad b = \mathrm{E}\{\eta_n\}, \quad d_1 = \mathrm{E}\{\gamma_{nk}\}, \quad d_2 = \mathrm{E}\{\gamma_{nk}^2\}.$$

В работе [6] выведены условия эргодичности цепи Маркова (W_n) отдельно для случаев, когда $D(x)$ – решетчатая и нерешетчатая функция распределения. В частности, в случае нерешетчатости $D(x)$ (например, если γ_{nk} имеют плотность вероятности) из неравенства

$$b - a + \frac{d_2}{2d_1} < 0$$

и дополнительного условия

$$A(x) < 1, \; x < \infty$$

вытекает эргодичность цепи Маркова (W_n).

Представляет интерес обобщения сформулированного результата на случай, когда величины ξ_n, Y_n, γ_{nk} могут быть зависимыми (система $SM/SM/1$). Такая постановка задачи отображает некоторые особенности реальных систем. Так, ξ_n зависимы при групповом потоке; Y_n и γ_{nk} зависимы, если обслуживаемые заявки разных типов.

Допустим, что зависимость вышеуказанных величин моделируется с помощью эргодической цепи Маркова $(\omega_n, n \geq 0)$ с состояниями $1, 2, \ldots, r$, матрицей $G = (g_{ij})$ переходов и эргодическим распределением $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_r)$. Примем следующие допущения: 1) если известны значения $\omega_0,\ldots,\omega_n$, то случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_{n+1}$; $Y_0,\ldots,Y_n$; γ_{jk}, $0\le j\le n$, $k>0$, независимы в совокупности; 2) выполняются соотношения

$$P\{\xi_{n+1}\le x \mid \omega_n=i\}=A_i(x),\ \ P\{Y_n\le x \mid \omega_n=i\}=B_i(x),\ \ P\{\gamma_{nk}\le x \mid \omega_n=i\}=D_i(x),$$

независимо от значений ω_s, $s\ne n$. Далее обозначим

$$a_i=\int_0^\infty x\,dA_i(x),\quad b_i=\int_0^\infty x\,dB_i(x),\quad d_{is}=\int_0^\infty x^s\,dD_i(x);$$

$$a=\sum_{i=1}^{r}a_i\pi_i\,,\quad b=\sum_{i=1}^{r}b_i\pi_i\,.$$

(Мы используем только значения $s=1,2$.)

Сформулируем теорему. Если $A_i(x)<1$, $x>0$, для любого $x>0$; $D_i(x)$ – нерешетчатые функции распределения и выполняется неравенство

$$b-a+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\frac{d_{i2}\pi_i}{d_{i1}}<0\,,$$

то цепь Маркова (ω_n,W_n) эргодична.

Только для некоторых систем с возвращением заявок удается вывести аналитические формулы для вычисления их характеристик функционирования. Однако существует универсальный метод вычисления подобных характеристик – метод Монте-Карло (статистического моделирования).

Регенеративный метод моделирования стохастических систем применяется к системам, которые имеют свойство время от времени регенерировать. Таким образом, если результаты моделирования рассматривать как стохастический регенерирующий процесс, то он имеет свойство постоянно возвращаться в некоторую точку регенерации, начиная с которой дальнейшее развитие процесса не зависит от его поведения в прошлом и определяется одним и тем самым вероятностным законом. Если результаты моделирования потом группируются в соответствии с последовательными возвращениями в точку регенерации, то эти группы статистически независимы и одинаково распределены, что очень упрощает их статистический анализ.

Авторами были разработаны алгоритмы статистического моделирования функционирования систем с повторными вызовами, которые основаны на свойствах регенерационных процессов. Результаты моделирования приведены на рис.1, где представлена зависимость $q^{(1)}$ (вероятность того, что заявка будет отправлена на орбиту более одного раза) от ρ ($\rho=\lambda\tau/\alpha$) при $\alpha=0.5$, α – параметр формы Γ-распределения. Моделировалось функционирование трех систем: типа Лакатоша, классической системы с повторением заявок и системы с приоритетом заявок с орбиты.

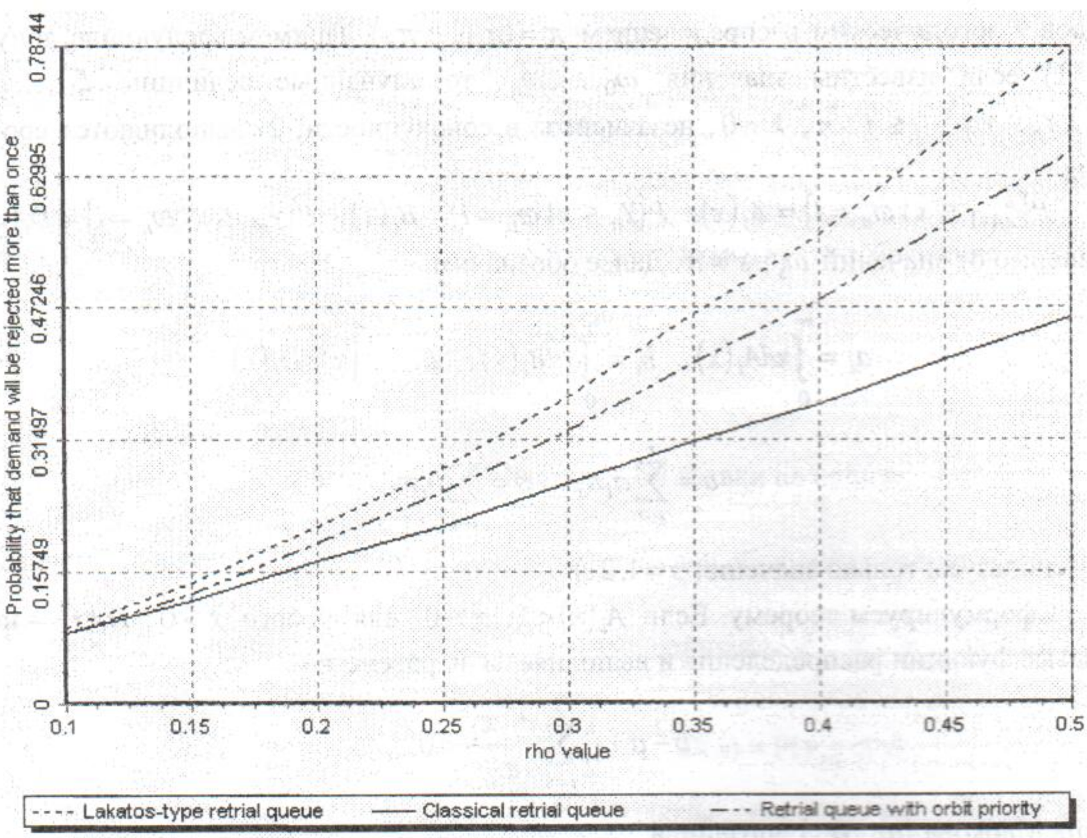

Рис. 1. Зависимость $q^{(1)}$ от ρ для трех систем ($\alpha = 0.5, 01 \le \rho \le 0.5$)

Таким образом, используя метод вложенных цепей Маркова, выведены условия эргодичности для систем с повторением заявок типа Лакатоша $GI/G/1$ и $SM/SM/1$. Основываясь на свойствах регенерационных процессов было проведено моделирование для систем с повторением заявок трех типов и получен показатель функционирования – вероятность возвращения заявки с орбиты более одного раза.

Список литературы

1. *Falin G.I.* A survey of retrial queues // Queueing Syst. – 1990. – 7. – P.127-168.

2. *Yang T., Templeton J.G.C.* A survey on retrial queues // Queueing Syst. – 1987.–2. – P. 203-233.

3. *Lakatos L.* On a simple continuous cycle-waiting problem // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp. – 1994. –14. –P.105-113.

4. *Lakatos L.* On a cycle-waiting queueing problem // Theory of Stoch. Proc. – 1996. – 2(18). – P. 176-180.

5. *Lakatos L.* On a discrete cycle-waiting queueing problem // J. Math. Sci. (New York). – 1998. – 4(92). – P.4031-4034.

6. *Koba E.V.* On a GI/G/1 retrial queueing system with a FIFO queueing discipline // Theory of Stoch. Proc. – 2002. – 8(24). – P.168-175.

7. *Kalashnikov V.V.* Mathematical methods in queueing theory. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. – 1994. – 377 p.