Игнатов В.А. д. т. н., **Гузий Н.Н.** к.т.н. (НАУ, Украина)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СКАЛЯРИЗАЦИЕЙ ВЕКТОРНЫХ КРИТЕРИЕВ В КОНФЛИКТУЮЩИХ СИСТЕМАХ

Рассмотрены вопросы оптимального управления скаляризацией векторных критериев в конфликтующих системах, определены условия минимакса и оптимального поведения защищающейся стороны.

Постановка проблемы. Для анализа, синтеза и оценки эффективности сложных систем все чаще применяют теорию векторной оптимизации. Оптимизацию синтеза структуры и параметров систем выполняют по нескольким показателям эффективности, которые рассматривают как координаты векторного критерия эффективности [1-4]. К векторной оптимизации приводят многие важные для практики задачи. Например, к ним относятся: управление кадрами, упорядочение и согласование действий, выбор капиталовложений, планирование производства, защита информации в конфликтующих системах и другие.

Постановка проблемы.ранее выполненных исследований показал, что наметилось четыре основных подхода к решению задач векторной оптимизации:

1. Агрегирование многих целевых функций в единую функцию, которая позволяет полностью упорядочить рассматриваемое множество альтернатив по их предпочтительности.

2. Последовательное выявление предпочтений одних показателей эффективности над другими с исследованием допустимого множества альтернатив.

3. Нахождение для имеющихся альтернатив $a_i \in A$ пусть не полного, а лишь частичного упорядочения, но более информативного, чем просто объединение не противоречащих друг другу предпочтений, устанавливаемых в соответствии с каждой из n привлекаемых целевых функций.

4. Максимально возможное уменьшение неопределенности и несравнимости эвристическими методами.

Сравнительный анализ этих подходов выполнен Б. Руа еще в 1972 г. в работе [4]. Определение относительной ценности координат векторного критерия исследовал Й. Миллер в докторской диссертации [5]. Некоторые задачи векторной оптимизации изучены уже настолько хорошо, что вошли в учебники и учебные пособия [6-8].

В качестве основной процедуры наметилась следующая процедура принятия (выбора) наиболее эффективных решений по векторному критерию:

- определение возможных и допустимых по условиям задачи вариантов альтернатив;
- выявление множества разнородных показателей для сравнения эффективности альтернатив;
- определение подмножества Парето – эффективных систем [7];
- приведение систем, несравнимых по критерию Парето, в сопоставимый вид на основе принципов минимума, максимума, максимина, минимакса и других;
- принятие оптимального решения по сформированному на предыдущих этапах скалярному критерию с учетом также и других, отнесенных в разряд ограничений.

Цель данной работы - решение задачи оптимального управления скаляризацией векторных критериев в конфликтующих системах для достаточно распространенного на практике первого подхода, когда выполняют свертывание безразмерных нормированных критериев - координат векторного критерия, которые удовлетворяют условию

$$W_{ik} \in [0, 1], \; i = 1, n1, k = 1, n2, \tag{1}$$

в один скалярный критерий вида

$$W = \sum_{i}^{n1} \sum_{k}^{n2} q_i g_k W_{ik}. \tag{2}$$

где W – средняя цена конфликта,

q_i, g_k- как правило, вероятности выбора, соответственно, S_i, и S_j стратегий оперирующими сторонами,

W_{ik} – цена конфликта (выигрыш одной стороны и проигрыш другой) для случая выбора, соответственно, S_i, и S_j стратегий оперирующими сторонами,

n1, n2 – соответственно, общее число стратегий, которые могут выбирать в конфликте оперирующие стороны.

Предполагается, что конфликтные проблемные ситуации $S_{ik} = (S_i, S_k)$ в общем случае образуют полную группу ситуаций и выполняется условие нормирования вероятностей

$$\sum_{i}^{n1} \sum_{k}^{n2} q_i g_k = 1, \tag{3}$$

нападающая сторона выбирает так вероятности ее стратегий, чтобы максимизировать ее выигрыш, а защищающаяся сторона должна так выбрать вероятности ее стратегий, чтобы обеспечить при этом минимальный проигрыш

$$W = \min_{q_i} \sum_{i}^{n1} q_i (\max_{g_k} \sum_{k}^{n2} g_k W_{ik}) = \min_{q_i} \sum_{i=1}^{n1} q_i W_{i\max}, \tag{4}$$

Так как вероятности появления значений W_{imax}, $i = 1, n1$, защищающейся стороне неизвестны, она вынуждена формулировать гипотезы о том, какими могут быть предпочтения противника в выборе W_{imax} и соответствующим образом выбирать q_i, чтобы в таких условиях неопределенности обеспечить минимальный проигрыш (4) для различных гипотез. Аналогичную задачу решает нападающая сторона относительно g_k. Результаты решения такой задачи позволяют защищающейся стороне определять значения минимакса (4) для различных гипотез выбора q_i, а нападающей стороне значения максимина для различных гипотез выбора g_k.

Из вида обобщенного критерия (4) следует, что координаты вектора защищающейся стороной нормируются так, что наилучшему значению соответствует минимальное (нулевое) значение показателя. Чаще всего для приведения координат векторного критерия к безразмерному виду и нормирования используют пары линейных преобразований вида:

$$\begin{cases} W_i = \dfrac{x_{i\max} - x_i}{x_{i\max} - x_{i\min}}, \; i = 1, n1, \\ x_i = x_{i\max} - W_i (x_{i\max} - x_{i\min}), \; x_i \in [x_{i\max}, x_{i\min}], \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} W_i = \dfrac{x_i - x_{i\min}}{x_{i\max} - x_{i\min}}, \; i = 1, n1, \\ x_i = x_{i\min} - W_i (x_{i\max} - x_{i\min}), \; x_i \in [x_{i\max}, x_{i\min}], \end{cases} \tag{6}$$

где интервал $\lfloor x_{i\max}, x_{i\min} \rfloor$ характеризует область (диапазон) возможных изменений i-го размерного показателя эффективности защиты x_i, $i = 1, n1$.

Преобразования (5) применяют для случаев, когда «чем больше значение x_i, тем лучше защита». Преобразование (6) применяют для случаев, когда «чем меньше значение x_i, тем лучше защита». Аналогичную пару линейных преобразований применяют и в тех случаях, когда существует эталонное значение размерного показателя эффективности x_{i0}. В этом случае решение тем лучше, чем ближе фактическое размерное значение показателя к эталонному значению. Полученные результаты без принципиальных трудностей распространяются и на конфликты с нулевой суммой, когда интересы сторон полностью противоположны, и

$$W_{ik} = -W_{ki}, \tag{7}$$

а нормирование координат выполняется на интервале [– 1, + 1].

Использование критерия (4) имеет общий характер. Если $W_{i\,\max}$ интерпретировать как условную вероятность того, что нарушение защиты произойдет при S_i-ой стратегии, сумму в (4) можно рассматривать как формулу полной вероятности того, что какая-либо одна из атак приведет к нарушению безопасности защиты информации и инфраструктуры защищаемого объекта. Если такой отказ СЗИ при S_i-ой стратегии приведет к ущербу (damage; wane) r_i, то формула (4) приводит к критерию минимума «среднего риска». Ниже показано, что критерий (4) соответствует и критерию максимального правдоподобия, поэтому принимаемые решения будут оптимальны и по этому критерию.

Обычно в задачах исследования операций различают управляемые переменные c_k, $k = 1, n_c$, и неуправляемые переменные u_l, $l = 1, n_u$. Так как

$$x_i = x_i(c_k, u_l), \tag{8}$$

то есть является функцией аргументов c_k и u_l, то и обобщенный критерий представляет собой аддитивную (сепарабельную) функцию

$$W_0(c_k \cdot u_l) = \inf_{q_i \in Q} \sum_{i=1}^{n1} q_i W_i(c_k \cdot u_l) \tag{9}$$

что позволяет после решения задачи скаляризации векторного критерия

$$W = (W_1, W_{n1}) \tag{10}$$

на следующем уровне оптимизации принимаемого решения ставить и решать задачи поиска и принятия оптимальных решений как задачи математического программирования [3, 8].

Приступим к формулировке гипотез о предпочтениях противника и виде множеств Q_j, $j = 1, n$, отображающих эти гипотезы.

1. Предположим, что элементы множества Q_1 подчиняются одному из двух противоположных условий:

$$Q_1 = \{q_1 \mid \sum_{i=1}^{n1} q_{1i} = 1,\ 0 < a_{n1} \le q_{11} \le q_{12} \le \ldots \le q_{1n1}\} \tag{11}$$

$$Q_2 = \{q_2 \mid \sum_{i=1}^{n1} q_{2i} = 1,\ 0 \le q_{21} \le q_{22} \le \ldots \le q_{2n1} \le a_{n1}\} \tag{12}$$

Условие (11) обозначает, что противник как более важный рассматривает критерий W_{n1}, а как наименее важный – критерий W_1. Условие (12) характеризует противоположное ранжирование противником критериев по важности. Следовательно, в первой гипотезе предполагается знание защищающейся стороной порядка ранжирования нападающей стороной координат критерия.

Теорема 1. Если известны значения координат $W_{i\max}$, $i = 1, n1$, порядок ранжирования нападающей стороной координат векторного критерия в виде условий (11) или (12) и

$$a_{n1} = 1/n1, \tag{13}$$

то обобщенные критерии должны выбираться защищающейся стороной по правилам:

$$W_{01} = \min_{l}\left[\frac{1}{n1}\sum_{i=1}^{l} W_{i\max} + \frac{1-l/n1}{n1-l}\sum_{k=l+1}^{n1} W_{k\max}\right] \tag{14}$$

$$W_{02} = \min_{l}\left[\frac{1-(n1-l)/n1}{l}\sum_{i=1}^{l} W_{i\max} + \frac{1}{n1}\sum_{k=l+1}^{m} W_{k\max}\right] \tag{15}$$

которые приводят к одному и тому же выбору W_0 как среднеарифметического значения

$$W_0 = \sum_{i=1}^{n1} W_{i\max} \;/\; n1 \,. \tag{16}$$

Доказательство. Докажем сначала справедливость утверждения теоремы для условия (11). Элементы множества Q_1 определяются необходимыми условиями (11), которые вытекают из предполагаемых защищающейся стороной представлений нападающей стороны о важности (значимости) частных критериев. Так как при выборе q_{1i}, $i=1,\ n1$, должно выполнятся условие нормирования вероятностей, то для определения оставшихся значений $n1\text{-}1$ коэффициентов должны использоваться $n1\text{-}1$ неравенств (11). Обозначим через l текущий номер системы из $n1\text{-}l$ неравенств, которым должны удовлетворять значения коэффициентов q_{1i}^{l}, $i=1,\ n1\text{-}1$. Тогда ℓ - я система неравенств примет вид:

$$\begin{aligned} &q_{1n1}^{l} \ge q_{1k}, k = n1-1, \ell+1; \\ &q_{1\ell}^{l} \ge q_{1i}, i = \ell-1, \quad 2, \\ &q_{11}^{l} \ge \frac{1}{n1}. \end{aligned} \tag{17}$$

При выбранном ℓ система (17) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} &q_{1i}^{\ell} = \frac{1}{n1}, i = 1,\ell; \\ &q_{1k}^{\ell} = \frac{1-\ell/n1}{n1-\ell}, k = \ell+1, n1; \quad \ell = 1, n1-1. \end{aligned} \tag{18}$$

Следовательно, выбор решения с номером $\ell, \ell = 1, n1-1$ порождает решение $\left\{q_{1i}^{\ell}, q_{1k}^{\ell}\right\}$, $i = 1,\ell;\quad k = \ell+1, n1$, в котором существуют два подмножества решений, с одинаковыми для каждого подмножества решениями (18). Это решение порождает правило (14).

Так как

$$\frac{1-\ell/n1}{n1-\ell} = \frac{n1-\ell}{n1}\,\frac{1}{n1-\ell} = \frac{1}{n1} \tag{19}$$

для любых $\ell = 1, n1-1$, то

$$q_{1i}^{\ell} = q_{1k}^{\ell} = \frac{1}{n1} \tag{20}$$

и правило (14) приводит к $n1\text{-}1$ одинаковым решениям

$$q_{1i,opt}^{\ell} = q_{1k,opt}^{\ell} = \frac{1}{n1},\ \ \ell = 1, n1-1, \tag{21}$$

которые определяют выбор W_0 в виде (16), что и требовалось доказать.

Доказательство справедливости (16) при условии (15) выполняется аналогично с тем лишь отличием, что вместо уравнения (19) из соответствующего решения получается уравнение вида

$$\frac{1-(n1-l)\;/\;n1}{l} = \frac{1}{n1}. \tag{22}$$

Следствие 1. Условия (11) и (12) отражают противоположные порядки ранжирования координат векторного критерия и на самом деле обозначают то, что истинный порядок ранжирования координат нападающей стороной защищающейся стороне неизвестен. Защищающаяся сторона может лишь предположить, что наиболее важная координата векторного критерия не будет иметь меньшую вероятность, чем среднее значение (13) по числу критериев. Следовательно, первая гипотеза соответствует наибольшей неопределенности в поведении нападающей стороны, поэтому характеризуется максимальной энтропией стратегий защищающейся стороны

$$H_{\max}\left(q_{iopt},\quad i=1,n1\right) = -\sum_{i=1}^{n1} q_{iopt}\log_2 q_{iopt} = \tag{23}$$

$\log_2 n1,\ bit/str.$

Следствие 2. Выбор обобщенного критерия W_0 в виде (16) является оптимальным по критерию максимального правдоподобия при условии, что справедливо гауссовское распределение координат векторного критерия. Значение W_0 выбирается как оптимальное из условия (24) минимизации суммы $S(W_0)$ квадратов его отклонений от всех $W_{i\max}$, $i=1,n1$:

$$\frac{d}{dW_0}S(W_0) = 2\sum_{i=1}^{n1}(W_{i\max}-W_0) = 0. \tag{24}$$

2. Предположим, что противник использует арифметическую прогрессию и элементы множества Q_2 подчиняются условиям:

$$Q_2 = \begin{Bmatrix} q_2/\sum_{i=1}^{n1} q_{2i} = 1, q_1 \le a_{n1}, q_{i+1} \le q_1 + id = \\ q_i + d, i=1,n1-1 \end{Bmatrix} \tag{25}$$

Теорема 2. Если известны значения координат $W_{i\max}$ $i=1,\ n1$, элементы Q_2 образуют арифметическую прогрессию (25), то обобщенный критерий выбирается по правилу

$$W_0 = \min_{\ell}\sum_{i=1}^{\ell}\left[a_{n1}^{\ell} + (i-1)d_{n1}^{\ell}\right]\cdot W_{i\max} + \frac{1-\dfrac{(\ell+1)\ell}{2}}{(n1-\ell)(a_{n1}^{\ell}+\dfrac{\ell+1}{2}d_{n1}^{\ell})} * \tag{26}$$

$$* \sum_{k=\ell+1}^{m}\left[a_{n1}^{\ell} + (k-1)d_{n1}^{\ell}\right]\cdot W_{k\max},$$

которое приводит к следующему виду обобщенного критерия

$$W_0 = \frac{1}{n1}\sum_{i=1}^{n1}\left[1 - \frac{2n1(i-1) - n1(n1-1)}{2}\quad d_{n1}^{l}\right] W_{i\max} \tag{27}$$

где

$$a_{n1}^{\ell} = \frac{1}{n1}\left(1 - \frac{n1(n1-1)}{2}d_{n1}^{\ell}\right),\ d_{n1}^{\ell} > 0, \tag{28}$$

$$a_{n1}^{\ell} = \frac{1}{n1}\left(1 + \frac{n1(n1-1)}{2}d_{n1}^{\ell}\right),\ d_{n1}^{\ell} < 0, \tag{29}$$

$$0 < \left|d_{n1}^{\ell}\right| < \frac{2}{n1(n1-1)}. \tag{30}$$

Доказательство. Так как при любых ℓ для вероятностей должны выполнятся одно условие нормирования и $n1$-1 неравенств вида

$$\begin{cases} q_{i+1}^{\ell} - q_i^{\ell} \le d_{n1}^{\ell}, i = 1, n1-1, \\ q_1 \le a_{n1}^{\ell}, \end{cases} \tag{31}$$

они задают единственную систему из $n1-1$ неравенства и одного равенства, решение которой при любых $\ell = 1, n1-1$, имеет вид:

$$\begin{cases} q_{i+1} = q_1 + (i+1)d,\ i = 1, n1-1, \\ q_1 = a_{n1}, \end{cases} \tag{32}$$

что приводит к правилу (18) при $\ell = 1, n1-1$.

Из условия нормирования вероятностей следует, что должно быть выполнено необходимое условие

$$\sum_{i=1}^{n1} \left[a_{n1}^{\ell} + (i-1) d_{n1}^{\ell} \right] = 1,\ \ell = 1, n1-1 \tag{33}$$

Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии в виде

$$\sum_{i=1}^{n1} (i-1) = \frac{n1(n1-1)}{2} \tag{34}$$

из (34) получим необходимые условия (28), (29) для a_{n1}^{l}. Учтем (34) при суммировании в (33), получим (27), что и требовалось доказать.

Следствие 1. При

$$d_{n1}^{l} = 0 \tag{35}$$

выражение (27) переходит в формулу (16), следовательно, правило (26) носит общий характер и отражает возрастающую или убывающую значимость координат векторного критерия. Для правильного выбора обобщенного критерия защищающейся стороне необходимо знать и выполнять мониторинг значений n_1 и d_{n1}.

Следствие 2. При

$$d_{n1}^{l} = 1 / S_{n1} = 2/(n1-1)n1 \tag{36}$$

начальный член арифметической прогрессии равняется нулю, число критериев сокращается до n_1-1, происходит сокращение (цензурирование) критериев и наименее значимый критерий не учитывается. Таким образом, значение d_{n1} может служить также индикатором общего числа критериев.

Следствие 3. При

$$d_{n1}^{l} > 1 / S_{n1} = 2/(n1-1)n1 \tag{37}$$

вероятностная интерпретация коэффициентов в (2) теряет смысл. В то же время появляется возможность в формуле (9) учесть знак координаты критерия и рассматривать достоинства и недостатки стратегий, более гибко учитывать условия и режимы конфликтного противодействия. Эти случаи будут рассмотрены в следующей более общей гипотезе.

Пример 1. Предположим, что $n_1=4$, $W_1=0.2$, $W_2=0.3$, $W_3=0.4$, $W_4=0.5$. Покажем особенности определения оптимальных значений вероятностей выбора стратегий и значения обобщенного критерия.

Используя формулу общего члена для вероятностей стратегий защиты, получим

$$q_i = \frac{1}{n1}\left[1 - \frac{n1(n1-1) - 2n1(i-1)}{2} d_{n1}\right] = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{4*3 - 2*4(i-1)}{2} d_4\right] = \frac{1}{4}\left[1-(10-4i)\, d_4\right].$$

Давая в (38) последовательно значение $i = 1,4$, получим вероятности для всех стратегий

$$q_1 = (1-6\,d_4)/4,\ q_2 = (1-2\,d_4)/4,\ q_3 = (1+2\,d_4)/4,\ q_4 = (1+6\,d_4)/4. \tag{38}$$

Используя неравенство (30), найдем диапазон допустимых изменений показателя арифметической прогрессии

$0 < d_4 < 2/(4*3) = 1/6.$

Выберем $d_{41} = 1/7 < 1/6$ и покажем порядок значений вероятностей: $q_1 = a_{41} = 1/28$, $q_2 = 5/28$, $q_3 = 9/28$, $q_4 = 13/28$. Значение обобщенного критерия рассчитаем по формуле (27)

$W_{04} = \frac{1}{28}\cdot 0{,}2 + \frac{5}{28}\cdot 0{,}3 + \frac{9}{28}\cdot 0{,}4 + \frac{13}{28}\cdot 0{,}5 = 0{,}42143$ Нетрудно убедится в том, что при равновероятных стратегиях $W_0 = 0{,}35$ и приблизительно на 20,4% меньше W_{04}. При $d_4 = -1/7 < 0$, будет наблюдаться рост значимости критериев с малыми номерами и смещение среднего значения в сторону малых значений примерно на 17,1%. Можно заметить, что первая стратегия максимальной неопределенности относительно приоритетов частных критериев является частным случаем второй стратегии при $d_4 = 0$. Она является граничной между стратегиями равного прироста значимости критериев при $d_4 < 0$ и $d_4 > 0$.

Таким образом, по этой стратегии противника можно сделать следующий вывод: управляемым параметром стратегии является разность прогрессии (30), именно она определяет степень преобладания ведущего критерия W_{n1} или W_1, в зависимости от знака разности. Отношение

$$I\,(S_{n1}, d_{n1}) = \frac{q_{n1}}{q_1} = \frac{1 + d_{n1} S_{n1}}{1 - d_{n1} S_{n1}} \tag{39}$$

характеризует максимальное значение величины предпочтения наиболее значимого критерия над наименее значимым критерием, его можно рассматривать как индикаторную функцию, которая может служить удобной количественной характеристикой меры преобладания (приоритета) наиболее значимого критерия над наименее значимым. Это утверждение основывается на следующих предельных свойствах этой функции:

$$\lim_{d_{n1} \to 0} I\,(S_{n1}, d_{n1}) \to 1 \qquad \lim_{d_{n1} \to 1/S_{n1}} I\,(S_{n1}, d_{n1}) \to \infty \tag{40}$$

Нетрудно заметить, что первый сингулярный случай в (40) соответствует выбору противниками стратегий равенства приоритетов частных критериев, а второй сингулярный случай - выбору стратегий полного преобладания ведущего критерия над всеми остальными. В этом случае $q_1 \to 1$, $q_{n1} \to 0$ и $W_0 \to W_{n1}$. Знак управляемой переменной d_{n1} указывает на то, какой из частных критериев (первый или последний) в ранжированном ряду критериев является ведущим. Можно образно сказать, что индикаторная функция (40) характеризует степень главенствования одного из критериев над всеми остальными.

3. Предположим, что известны значения координат W_{im}, $i=1, n1$, элементы множества Q_3 подчиняются условиям:

$$Q_3 = \left\{ q_3 / \sum_{i=1}^{n1} q_{3i} = 1,\ 0 \le q_{3i} \le a_i < 1,\ i = 1, n1 \right\} \tag{41}$$

где известные вероятности a_i удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{n1} a_i > 1, \tag{42}$$

а число

$$a_l = 1 - \sum_{i \ne l}^{n1} a_i < 0, \quad l = 1, n1. \tag{43}$$

Эта гипотеза предполагает экспертную оценку вероятностей применения отдельных стратегий, но допускает выбор одного коэффициента из $n1$ как отрицательного коэффициента a_l, $l=1, n1$. Выбор этого коэффициента, во-первых, обеспечивает нормирование суммы до 1, а, во-вторых, может обеспечить минимальное значение W_0, которое удовлетворяет условию

$$0 \leq W_0 \leq W_{min}, \tag{44}$$

где W_{min} – наименьшее значение координат.

Теорема 2. Если известны значения координат W_{imax}, $i=1, n1$, элементы множества Q_3 подчиняются условиям (41), (43), то обобщенный критерий необходимо выбирать по правилу

$$W_0 = \min_{1 \leq l \leq n1} \left[\sum_{i \neq l}^{n1} a_i W_i + \left(1 - \sum_{i \neq l}^{n1} a_i\right) W_l \right], \tag{45}$$

которое приводит к следующему алгоритму принятия оптимального решения: если

$$\max_i = a_l W_l, \quad \text{то}$$

$$W_0 = W_l + \sum_{i \neq l}^{n1} a_i \left(W_i - W_l \right) \tag{46}$$

Доказательство. Доказательство выполняется методом математической индукции при $n1=1, 2, 3, \ldots$. По максимальному произведению a_l на W_l определяется W_l, которому приписывается максимальный коэффициент $a_l = 1$, поэтому все разности в сумме (46) имеют отрицательное максимальное значение. Это приводит к отрицательному максимальному значению суммы и, соответственно, к минимальному значению W_0.

Пример 2. Предположим, что $n_1=4$, $W_1=0.2$, $W_2=0.3$, $W_3=0.4$, $W_4=0.5$, $a_1 = 0{,}8$, $a_2 = 0{,}9$, $a_3 = 0{,}7$, $a_4 = 0{,}6$. Покажем особенности использования алгоритма (46).

Определим

$$\max_i a_i W_i = \max(0{,}8 * 0{,}2; 0{,}9 * 0{,}3; 0{,}7 * 0{,}4 * 0{,}6 * 0{,}5) = = a_4 W_4 = 0{,}3.$$

Следовательно, $l = 4$ и в соответствии с (46)

$$W_O = 0{,}5 + 0{,}8(0{,}2 - 0{,}5) + 0{,}9(0{,}3 - 0{,}5) + 0{,}7(0{,}4 - 0{,}5) =$$

$$0{,}5 - 0{,}24 - 0{,}18 - 0{,}07 = 0{,}01.$$

Таким образом, выбирая коэффициент

$$a_i = 1 - \sum_{i \neq l}^{n1} a_i = 1 - 0{,}8 - 0{,}9 - 0{,}7 = -1{,}4$$

вместо a_4 при наибольшем значении W_l, можно обеспечивать минимальное значение средней цены конфликта.

Следствие 1. Если для коэффициентов соблюдается условие нормирования и все они меньше 1, то алгоритм (46) в этом частном случае приводит к определению обобщенного критерия как среднеарифметического (27) – к суммированию координат с соответствующими весами. В этом случае

$$W_0 = W_l + \sum_{i \neq l}^{n1} q_i \left(W_i - W_l \right) =$$

$$= W_l + \sum_{i \neq l}^{n1} q_i W_i - W_l \sum_{i \neq l}^{n1} q_i = \sum_{i=1}^{n1} q_i W_i \tag{47}$$

Алгоритм (46) можно интерпретировать как оценивание среднеарифметического значения по координате, которая вносит максимальный относительный вклад. Сумма в (47) играет роль корректирующей поправки.

Следствие 1. Сумма в (47) позволяет определить вероятность применения стратегии q_l из условия обеспечения заданного значения W_0

$$W_l + \sum_{i \neq l}^{n1} q_i \left(W_i - W_l \right) = W_0 \tag{48}$$

Из уравнения (48) следует, что

$$q_l = (W_0 - \sum_{i \neq l}^{n1} q_i W_i) / W_l \qquad (49)$$

Как и следовало ожидать, нулевые средние потери можно обеспечить лишь при отрицательном q_l, что приводит к навязыванию противнику таких проигрышных стратегий, при которых $W_l < 0$.

Практическая ценность алгоритма (46) и уравнения (49) заключается в создании условий для цензурирования пространства применяемых стратегий. Для этого достаточно положить $q_l = 0$.

По результатам решения поставленной задачи можно сделать следующие выводы.

1. Использование линейной аппроксимации средней цены конфликта в виде (2) позволяет в первом приближении содержательно ставить задачи по обеспечению минимаксных значений потерь при защите информации и информационных инфраструктур.

2. Формулировка гипотез о предполагаемых стратегиях действия нападающей стороны дает возможность определить необходимые и достаточные условия существования и единственности оптимальных решений, методы, правила и алгоритмы их отыскания.

3. Рассмотрены три кардинальных гипотезы об условиях обеспечения минимакса защищающейся стороной, доказаны соответствующие им теоремы, которые определяют оптимальные правила (14) – (16), (26), (27), (45), (46) ее поведения в информационном противоборстве. Первая гипотеза характеризует условия полной неопределенности исходных данных о поведении нападающей стороны. Вторая гипотеза описывает определенную информацию о порядке ранжирования вероятностей стратегий как составляющих арифметическую прогрессию. Третья стратегия отражает условия, в которых можно ставить «задачу о достижении нулевого минимакса» и так выбирать стратегии защиты, чтобы свести к нулю потери защищающейся стороны.

4. Рассмотрены численные примеры, которые характеризуют особенности полученных оптимальных решений, порядок величин и область применения результатов решения задачи.

Список литературы

1. *Акоф Р., Сасчени М.* Основы исследования операций. – М.: Мир.– 1971.–340 с.

2. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. Т 1-3. М.: Мир. – 1973.

3. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир. - 1964. – 402с.

4. *Вопросы* анализа и процедуры *принятия решений.* Сб. переводов. Под ред. И.Ф. Шахнова. М.: Мир. - 1976. – 232 с.

5. *Miller J.R.*, The assessment of worth: a systematic procedure and its experimental validation, Doct. diss., M.I.T., June, 1966.

6. *Гермейер Ю.Б., Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Задачи по исследованию операций. Учебное пособие. М.: Издательство Московского университета, - 1979 – 167с.

7 *Юрлов Ф.Ф.*, Технико-экономическая эффективность сложных радиоэлектронных систем. – М.: Сов. Радио, - 1980. – 280 с.

8. *Медведєв М.Г., Барановська Л.В.* Ігрові методи моделювання економічних систем: Навч. посібник. – К.: Видавництво ЄУ, 2001. – 116 с.