Бідюк П.І., Демківський Є.О. (НТУ «КПІ», КНУТД)

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО ПРОГНОЗУВАННЯ ДИНАМІКИ ЧАСОВИХ РЯДІВ

1. Вступ. Прогнозування на основі часових рядів – один із самих популярних підходів до прогнозування розвитку економічних процесів, об'ємів торгових операцій, об'ємів виробництва та накопичення продукції на складах, оцінювання альтернативних економічних стратегій, формування бюджетів підприємств та держави, прогнозування та менеджмент економічних і фінансових ризиків, прогнозування енергоспоживання та навантаження на енергосистеми і т.ін. На сьогодні в спеціальній літературі описано багато методів прогнозування. Найбільш поширеними серед них є метод групового врахування аргументів [1], авторегресія (АР), АРКС, авторегресія з інтегрованим ковзним середнім (АРІКС), авторегресія з дробово-інтегрованим ковзним середнім (АРДІКС), лінійна та нелінійна множинна регресія [2,3,4,5], квантильна регресія [7], регресійні дерева, нейромережі, байєсівські мережі, нечіткі множини, нечіткі нейромережі та інші. Однак, немає систематизованого підходу до вибору математичних моделей та методів для прогнозування, а також рекомендацій щодо їх застосування.

2. Прогнозування за допомогою рівнянь АР та АРКС

Отримання функції прогнозування без знаходження розв'язку різницевого рівняння типу АР та АРКС. Структура різницевого рівняння (РР) така, що воно дозволяє виконувати прогнозування на один крок (один період дискретизації вимірів) без додаткових перетворень. Але для того щоб знайти оцінку прогнозу на більше число кроків, необхідно застосувати деякі попередні перетворення РР. Розглянемо деякі можливі підходи до обчислення прогнозованих значень.

Як простий приклад, розглянемо рівняння АР(1):

$$y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k), \qquad E[\varepsilon(k)] = 0, \tag{1}$$

де $\varepsilon(k)$– некорельована випадкова величина, яка має скінченну постійну дисперсію. Коефіцієнт a_0 називають *зміщенням* або *перетином*. Збільшимо незалежну змінну, *час* k, на одиницю і запишемо рівняння знову:

$$y(k+1) = a_0 + a_1 y(k) + \varepsilon(k+1). \tag{2}$$

Якщо коефіцієнти a_0, a_1 відомі, то можна знайти умовне математичне сподівання на основі відомої інформації до моменту k включно:

$$E_k[y(k+1)] = E_k[y(k+1) \mid y(k), y(k-1),...,\varepsilon(k),\varepsilon(k-1),...] = a_0 + a_1 E_k[y(k)] = a_0 + a_1 y(k), \tag{3}$$

оскільки $y(k)$ в момент k є відомою константою.

По аналогії запишемо рівняння (1) для моментів $k+2, k+3,...$ і отримаємо функцію прогнозування:

$$E_S[y(k+s)] = a_0\left(\sum_{i=0}^{S-1} a_1^{\,i}\right) + a_1^{\,S} y(k) = a_0 \sum_{i=0}^{S-1} a_1^{\,i} + a_1^{\,S} y(k). \tag{4}$$

Отримане рівняння називають функцією прогнозування на довільне число кроків. Прогноз представляє собою збіжний процес, якщо $|a_1| < 1$, тобто $\lim E_k[y(k+s)] = \dfrac{a_0}{1-a_1}$ при $s \to \infty$. Тобто, для будь-якого стаціонарного процесу АР чи АРКС оцінка умовного прогнозу асимптотично ($s \to \infty$) збігається до безумовного середнього. Похибка прогнозування на довільне число кроків: $f_k(s) = \varepsilon(k+s) + a_1\varepsilon(k+s-1) + a_1^{\,2}\varepsilon(k+s-2) + ... + a_1^{\,S-1}\varepsilon(k+1)$. Ваховуючи те, що $E[f_k(s)] = 0$, то оцінка прогнозу, яка обчислюється за виразом (4), є незміщеною.Функція прогнозування для процесу АРКС(2,1): $E_k[y(k+s)] = a_0 + a_1 E_k[y(k+s-1)] + a_2 E_k[y(k+s-2)]$.

Функцію прогнозування можна записати також за допомогою розв'язку різницевого рівняння. Для рівняння АРКС(1,1) функція прогнозування на довільне число кроків має вигляд: $E_k[y(k+s)] = \left(\dfrac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1{}^s) + \beta_1 a_1{}^{s-1}\varepsilon(k) + y(k)a_1{}^s$.

3. *Прогнозування процесів з трендом*

Поширеним підходом до описання тренду є використання детермінованої функції від часу типу

$$y(k) = a_0 + d_1 k + d_2 k^2, \tag{5}$$

де d_i – коефіцієнти рівняння. Тренд, який описується такою функцією, називають *детермінованим* або *глобальним* трендом [6]. Однак, на сьогодні існує тенденція до вироблення більш загального підходу до описання тренду, а саме, використання *локальних* моделей замість глобальних. При цьому тренд розглядають як стохастичну функцію часу. Одним із підходів до описання локального тренду є введення залежності коефіцієнтів моделі від часу [7]

$$y(k) = a(k) + d_1(k)k, \tag{6}$$

де $a(k)$ – локальна константа; $d_1(k)$ – коефіцієнт, який визначає локальний нахил тренду. Отримано результати моделювання, які показують, що функції типу (6) є більш робастними ніж функції типу (5)

Альтернативним підходом до описання локального тренду є використання рекурсивних рівнянь типу $y(k) = a_0 + y(k-1)$ або в ускладненому варіанті

$$y(k) = a_0(k) + y(k-1) + \varepsilon(k), \tag{7}$$

де $\varepsilon(k)$ – випадкова змінна, яку для простоти можна прийняти послідовністю білого шуму з відомою дисперсією. Це рівняння можна назвати рівнянням випадкового кроку із змінним в часі перетином $a(k)$. Модель (7) необхідно доповнити рівнянням, яке описує зміну в часі перетину, тобто $a(k)$. Наприклад, $a(k) = a(k-1) + v(k)$, де $v(k)$ – випадковий збурюючий процес.

Запишемо функцію прогнозування для рівняння випадкового кроку $y(k) = y(k-1) + \varepsilon(k)$, $E[\varepsilon(k)] = 0$. Для початкової умови $y(0) = y_0$ і повний розв'язок цього рівняння має вигляд: $y(k) = y_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k)$. Математичне сподівання $E[y(k)] = E[y(k-s)] = y_0$. Таким чином, середнім значенням випадкового кроку є константа. Умовне математичне сподівання відносно моменту k: $E_k[y(k+1)] = E_k[y(k) + \varepsilon(k+1)] = y(k)$.

Аналогічно умовне математичне сподівання для $y(k+s)$, $\forall s > 0$ можна отримати із рівняння: $y(k+s) = y(k) + \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+i)$. Таким чином, маємо

$$E_k[y(k+s)] = y(k) + E_k\left[\sum_{i=1}^{s} \varepsilon(k+1)\right] = y(k).$$

Тобто, умовне середнє дорівнює $y(k)$ для всіх значень $y(k+s)$. Однак, випадкова величина $\varepsilon(k)$ впливає на послідовність $\{y(k)\}$ на протязі всього часу спостережень, а тому дисперсія цього процесу є функцією часу:

$\operatorname{var}[y(k)] = \operatorname{var}[\varepsilon(k) + \varepsilon(k-1) + ... + \varepsilon(1)] = k\sigma^2$

або $\operatorname{var}[y(k-s)] = \operatorname{var}[\varepsilon(k-s) + \varepsilon(k-s-1) + ... + \varepsilon(1)] = (k-s)\sigma^2$

Модель випадкового кроку плюс дрейф (зміщення або перетин). В даному випадку до моделі випадкового кроку додається константа a_0: $y(k) = a_0 + y(k-1) + \varepsilon(k)$. При відомій початковій умові розв'язок цього рівняння має вигляд: $y(k) = y_0 + a_0 k + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k)$.

Таким чином, на $y(k)$ впливають дві нестаціонарні компоненти – лінійний детермінований тренд $a_0 k$ і стохастичний тренд $\sum \varepsilon(k)$. Математичне сподівання і умовне математичне сподівання мають вигляд: $E[y(k)] = y_0 + a_0 k$, $E_k[y(k+s)] = y_0 + a_0(k+s)$.

Модель випадкового кроку з додатковою шумовою складовою. В цій моделі залежна змінна $y(k)$ визначається сумою стохастичного тренду та випадкової компоненти, тобто

$$y(k) = \mu(k) + \eta(k),\ \mu(k) = \mu(k-1) + \varepsilon(k), \tag{8}$$

де $\{\eta(k)\}, \{\varepsilon(k)\}$ - незалежні процеси білого шуму з дисперсіями σ_η^2 та σ_ε^2, відповідно; $E[\varepsilon(k)\eta(k-s)] = 0, \forall k, s$. Для початкової умови $\mu(0) = \mu_0$ розв'язок рівняння (8) має вигляд: $\mu(k) = \mu_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k)$, що представляє собою випадковий тренд для $y(k)$. Тепер $y(k) = \mu_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k) + \eta(k)$. Використовуючи початкову умову $y(0) = y_0 = \mu_0 + \eta_0$, запишемо розв'язок: $y(k) = y_0 - \eta_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(k) + \eta(k)$.

Модель локального лінійного тренду. Модель локального лінійного тренду (ЛЛТ) поєднує в собі кілька процесів випадкового кроку з шумом: $y(k) = \mu(k) + \eta(k)$, $\mu(k) = \mu(k-1) + \lambda(k) + \varepsilon(k)$, $\lambda(k) = \lambda(k-1) + \nu(k)$, де $\{\eta(k)\}, \{\varepsilon(k)\}, \{\nu(k)\}$ – незалежні процеси білого шуму. В даному випадку зміни тренду спричиняються процесом випадкового кроку та шумовою складовою, тобто, $\Delta\mu(k)$ складається з процесу випадкового кроку $\lambda(k)$ та білого шуму $\varepsilon(k)$. Можна легко показати, що розглянуті вище процеси (випадковий крок плюс шум та випадковий крок плюс дрейф і шум) представляють собою окремі випадки ЛЛТ.

Знайдемо розв'язок для $y(k)$. Спочатку запишемо його для $\lambda(k)$: $\lambda(k) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{k} \nu(k)$, а також для $\mu(k)$:

$$\mu(k) = \mu_0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(i) + k(\lambda_0 + \nu(1)) + (k-1)\nu(2) + (k-2)\nu(3) + \ldots + \nu(k).$$

Оскільки $y_0 = \mu_0 + \eta_0$, то розв'язок для $y(k)$ має вигляд:

$$y(k) = y_0 + [\eta(k) - \eta_0] + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon(i) + k(\lambda_0 + \nu(1)) + (k-1)\nu(2) + \ldots + \nu(k).$$

В даному рівнянні можна спостерігати об'єднані властивості всіх інших моделей. Кожний елемент послідовності $\{y(k)\}$ містить детермінований тренд $\left(k(\lambda_0 + \nu(1)) + (k-1)\nu(2) + \ldots 2\nu(k-1)\right)$, стохастичний тренд $\left(\sum \varepsilon(i)\right)$ та нерегулярну компоненту $(\eta(k))$. Звичайно, що в узагальненій формі моделі ЛЛТ нерегулярна компонента визначатиметься членом $A(L)\eta(k)$. Детермінований тренд залежить в даному випадку від поточних та минулих значень послідовності $\{\nu(k)\}$. Якщо в момент k сума $(\lambda_0 + \nu(1) + \ldots + \nu(k))$ буде додатною, то коефіцієнт при k буде додатнім. Очевидно, що в загальному випадку ця сума може бути додатною для деяких k, а для інших від'ємною, а тому тренд може мати ділянки з додатнім та від'ємним нахилом.

Функція прогнозування ЛЛТ на s кроків:

$$y(k+s) = y_0 + [\eta(k+s) - \eta_0] + \sum_{i=1}^{k+s} \varepsilon(i) + (k+s)(\lambda_0 + v(1)) +$$
$$(k+s-1)v(2) + (k+s-2)v(3) + \ldots + v(k+s)$$

4. Прогнозування гетероскедастичних процесів

Гетероскедастичними називають процеси із змінною в часі дисперсією. Простим підходом до описання змінної дисперсії є застосування моделі типу АР(q) до квадратів оцінок залишків, отриманих на попередньому етапі моделювання процесу. Наприклад,

$$\varepsilon^2(k) = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2(k-1) + \alpha_2\varepsilon^2(k-2) + \ldots + \alpha_q\varepsilon^2(k-q) + v(k), \qquad (9)$$

де $v(k)$ – процес білого шуму. Це рівняння можна використовувати для *прогнозування умовної дисперсії* на один крок наступним чином:

$$E_k[\varepsilon^2(k+1)] = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2(k-1) + \alpha_2\varepsilon^2(k-2) + \ldots + \alpha_q\varepsilon^2(k+1-q).$$

З цієї причини (9) називають *авторегресійним умовно гетероскедастичним (АРУГ)* рівнянням. Збурення можна ввести у мультиплікативній формі:

$$\varepsilon^2(k) = v^2(k)[\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon^2(k-1)], \qquad (10)$$

де $v(k)$ – мультиплікативне збурення у формі білого шуму, причому для спрощення описання покладають $\{v(k)\} \sim (0,1)$, тобто воно має нульове середнє і одиничну дисперсію; змінні $\varepsilon(k-1)$ і $v(k)$ - статистично незалежні величини.

Модель (22) може бути розширена до довільного порядку: $\varepsilon(k) = v(k)\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_1\,\varepsilon^2(k-i)\right)^{1/2}.$

Узагальнена модель АРУГ, яку називають УАРУГ(p,q), складається із двох компонент - авторегресії та ковзного середнього відносно дисперсії процесу. Основним характерним моментом УАРУГ моделі є те, що збурення, яке діє на процес $\{y(k)\}$, є процесом АРКС.

5. Висновки. В роботі розглянуто математичні моделі та побудову функцій прогнозування на основі цих моделей для наступних характерних класів економічних процесів: стаціонарні процеси авторегресії та авторегресії з ковзним середнім, нестаціонарні процеси з детермінованими та стохастичними трендами, гетероскедастичні. Наведено структури математичних моделей та приклади їх застосування для короткострокового та середньострокового прогнозування. При цьому довгостроковий прогноз визначається як безумовне математичне сподівання розв'язку різницевого рівняння, а короткостроковий і довгостроковий прогнози визначаються через умовне математичне сподівання. Показано, що для описання випадкового тренду можна застосовувати модель випадкового кроку з дрейфом та шумом, а у складніших випадках необхідно скористатись моделлю лінійного локального тренду. Для моделювання гетероскедастичних процесів існує досить широкий вибір структур рівнянь, які дають можливість прогнозувати дисперсію процесу з досить високою точністю. Однією із основних проблем при моделюванні часових рядів залишається створення процедури правильного вибору класу та структури рівнянь для їх описання. Для прискорення цієї процедури необхідно розроблювати системи підтримки прийняття рішень при моделюванні та прогнозуванні динаміки часових рядів.

Список літератури

1. *Ивахненко А.Г.* Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. – Киев: Наукова думка, 1982. – 296 с.

2. *Лук'яненко І., Краснікова Л.* Економетрика. – К.: Знання, 1998. – 494 с.

3. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ (т.2). – М.: Финансы и статистика, 1986. – 366 с.

4. *Бідюк П.І., Половцев О.В.* Аналіз та моделювання економічних процесів перехідного періоду. – К.: НТУ КПІ, 1999. – 230 с.