Азарсков В.Н. д.т.н., **Житецкий Л.С.**, к.т.н., **Стеценко Н.В.** (НАУ, Украина)

АДАПТИВНАЯ ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИИ, ИСКАЖЕННОГО БЕЛЫМ ШУМОМ

В рамках адаптивного подхода, основанного на использовании расширенного МНК, строится цифровой фильтр для выделения случайного полезного сигнала, который описывается моделью авторегрессии первого порядка с неизвестными параметрами, на фоне дискретного белого шума. Для решения поставленной задачи предлагается процедура оценивания дисперсии белого шума, порождающего полезный сигнал.

При решении многих прикладных задач часто возникает необходимость выделения полезного сигнала на фоне помех, которое интерпретируется как фильтрация доступного для наблюдения искаженного входного сигнала. Известно (см., например, [1, гл. 3]), что при наличии стохастических сигналов реализация оптимального фильтра Винера–Колмогорова требует полной априорной информации о статических характеристиках полезного сигнала и помехи. Однако на практике такая информация зачастую может отсутствовать. В подобной ситуации естественным образом используют адаптивный подход [2], в соответствии с которым неизвестные величины заменяются их текущими оценками. Последние уточняются с течением времени путем обработки сигналов, доступных для измерения.

Методы теории адаптивной фильтрации стохастических сигналов изложены во многих публикациях, в частности, в [1, гл. 4; 2, гл. VIII; 3–5] и др. К сожалению, описанные в упомянутых работах методы и алгоритмы представлены в столь общей форме, что их конкретизация требует немалых усилий. К тому же (и это не менее существенно) в литературе по существу отсутствуют числовые данные, позволяющие получить представление от эффективности тех или иных алгоритмов адаптивной фильтрации; исключение, пожалуй, составляют результаты моделирования непрерывных адаптивных фильтров, которые приведены в [2, §9.7].

Целью настоящей работы является построение в явной форме алгоритма адаптивной цифровой фильтрации для выделения полезного сигнала, описываемого уравнением авторегрессии первого порядка с неизвестными параметрами, при наличии помехи типа дискретного белого шума.

Ставится такая задача. На вход цифрового фильтра, функционирующего в дискретном времени $t = 0,1,2,...$, поступает скалярная переменная y_t, которая представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала s_t и помехи υ_t:

$$y_t = s_t + \upsilon_t. \qquad (1)$$

Предпологается, что $\{s_t\}$ и $\{\upsilon_t\}$ – стационарные случайные некореллированные последовательности, т.е.

$$\mathsf{M}\{s_t \upsilon_t\} = 0,$$

где $\mathsf{M}\{\cdot\}$ – знак математического ожидания. Более определенно, считается что $\{\upsilon_t\}$ – дискретный белый шум с дисперсией σ_υ^2:

$$\mathsf{M}\{\upsilon_t\} = 0, \qquad \mathsf{M}\{\upsilon_t^2\} = \sigma_\upsilon^2.$$

В качестве полезного сигнала s_t выступает сигнал, порожденный устойчивым формирующим фильтром

$$A'(E)s_t = w'_t, \qquad (2)$$

где $\{w'_t\}$ – дискретный белый шум с дисперсией $\sigma_{w'}^2$, а

$$A'(z^{-1}) = 1 + az^{-1} \qquad (|a| < 1) \tag{3}$$

– полином от комплексного переменного z^{-1} (E – оператор сдвига на один такт назад, определяемый для любого r_t как $Er_t = r_{t-1}$). Таким образом, $\{s_t\}$ – процесс авторегрессии первого порядка, который для упрощения записи обозначим как АР(1).

Основное предположение состоит в том, что коэффициент a в (3) априори неизвестен; неизвестна также дисперсия $\sigma^2_{w'}$ белого шума $\{w'_t\}$ на входе формирующего фильтра (2). Имеется только априорная информация о дисперсии σ^2_{υ} помехи наблюдений υ_t.

Будем, как и в монографиях [1, 2], определять качество цифровой фильтрации смеси $\{y_t\}$ функционалом типа предельного среднего квадрата

$$J = \overline{\lim_{t\to\infty}} \mathrm{M}\{(\hat{s}_t - s_t)^2\}, \tag{4}$$

где $\hat{s}_t$ – выходная величина фильтра, дающая текущую оценку ненаблюдаемого полезного сигнала s_t.

Если бы коэффициент a и величина $\sigma^2_{w'}$, а не только величина σ^2_{ϑ} были априори известны, то согласно [1, п. 3.1.3°] из условия минимума функционала вида (4) можно было бы найти передаточную функцию линейного стационарного оптимального фильтра Винера–Колмогорова

$$H(z^{-1}, a, \sigma^2_{w'}, \sigma^2_{\vartheta}) = \frac{\beta(z^{-1}, a, \sigma^2_{w'}, \sigma^2_{\vartheta})}{\alpha(z^{-1}, a, \sigma^2_{w'}, \sigma^2_{\vartheta})},$$

связывающую $\{\hat{s}_t\}$ с $\{y_t\}$ разностным уравнением

$$\alpha(E, a, \sigma^2_{w'}, \sigma^2_{\upsilon})\hat{s}_t = \beta(E, a, \sigma^2_{w'}, \sigma^2_{\upsilon})y_t. \tag{5}$$

В этом уравнении $\alpha(z^{-1}, a, \sigma^2_{w'}, \sigma^2_{\upsilon})$ и $\beta(z^{-1}, a, \sigma^2_{w'}, \sigma^2_{\upsilon})$ – полиномы по z^{-1}, зависящие определенным образом от $a, \sigma^2_{w'}$ и σ^2_{υ}. А так как a и $\sigma^2_{w'}$ неизвестны, то в соответствии с адаптивным подходом, развитым в [1, п. 4.3.1°], перейдем к уравнению нестационарного фильтра

$$\alpha(z^{-1}, a_t, \hat{\sigma}^2_{w'}(t), \sigma^2_{\upsilon})\hat{s}_t = \beta(z^{-1}, a_t, \hat{\sigma}^2_{w'}(t), \sigma^2_{\upsilon})y_t, \tag{6}$$

заменяя в (5) неизвестные a и $\sigma^2_{w'}$ на соответствующие им оценки a_t и $\hat{\sigma}^2_{w'}(t)$, которые должны уточняться в каждый момент времени t на основе определенных алгоритмов адаптации.

Задача состоит в том, чтобы построить в явной форме конкретные алгоритмы адаптации и определить полиномы α и β в (6) из условия

$$J = \min$$

Для построения алгоритма формирования $\{a_t\}$ запишем уравнение

$$A'(E)y_t = w'_t + A'(E)\upsilon_t, \tag{7}$$

справедливость которого следует из (1) с учетом (2). Согласно [1, п. 4.3.2°] процесс $\{y_t\}$, описываемый уравнением (7), может быть определен как

$$A(E)y_t = B(E)w_t. \tag{8}$$

Здесь $A(E) = A'(E), B(z^{-1}) = 1 + bz^{-1}$, а $\{w_t\}$ – эквивалентный дискретный белый шум. Вводя вектор параметров $\bar{\theta} = [a, b]^{\mathrm{T}}$ и вектор состояния $\varphi_{t-1} = [-y_{t-1}, w_{t-1}]^{\mathrm{T}}$, преобразуем (8) к виду

$$y_t = \bar{\theta}^T \varphi_{t-1} + w_t. \tag{9}$$

Следуя [2, п. 4.3.4°], в качестве алгоритма адаптации, генерирующего последовательность оценок $\{\bar{\theta}_t\}$, возьмем базовую рекуррентную процедуру расширенного МНК, который может быть использован для идентификации уравнения (9), в форме

$$\bar{\theta}_t = \bar{\theta}_{t-1} + \frac{P_{t-2}\hat{\varphi}_{t-1}}{1+\hat{\varphi}_{t-1}^T P_{t-2}\hat{\varphi}_{t-1}} e_t, \tag{10}$$

$$P_{t-1} = P_{t-2} - \frac{P_{t-2}\hat{\varphi}_{t-1}\varphi_{t-1}^{\mathrm{T}} P_{t-2}}{1+\hat{\varphi}_{t-1}^T P_{t-2}\hat{\varphi}_{t-1}}, \qquad P_0 > 0. \tag{11}$$

В этом алгоритме P_t – (2×2)-матрица;

$$e_t = y_t - \theta_{t-1}^{\mathrm{T}}\hat{\varphi}_{t-1} \tag{12}$$

– текущая ошибка идентификации;

$$\hat{\varphi}_{t-1} = [-y_{t-1}, \hat{w}_{t-1}]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

– оценка вектора состояния φ_{t-1}, в котором недоступная для наблюдения компонента w_{t-1} заменяется на ее оценку $\hat{w}_{t-1}$, определяемую для любого t как

$$\hat{w}_t = e_t. \tag{14}$$

Для построения алгоритма формирования последовательности оценок $\{\hat{\sigma}_{w'}^2(t)\}$ поступим следующим образом. Учитывая тот факт, что в силу (1) и некореллированности $\{s_t\}$ и $\{\upsilon_t\}$

$$\mathrm{M}\{y_t^2\} = \mathrm{M}\{s_t^2\} + \sigma_\upsilon^2,$$

запишем соотношение

$$\hat{\sigma}_y^2(t) = \hat{\sigma}_s(t) + \sigma_\upsilon^2, \tag{15}$$

связывающие текущую оценку $\hat{\sigma}_y(t)$ дисперсии смеси y_t с текущей оценкой $\hat{\sigma}_s(t)$ дисперсии полезного сигнала s_t при данной дисперсии помехи σ_υ^2. Поскольку согласно [1, п. 3.1.5°]

$$\sigma_s^2 = \frac{\sigma_{w'}^2}{1-a^2},$$

то в качестве оценки $\hat{\sigma}_s(t)$ предлагается брать величину

$$\hat{\sigma}_s^2(t) = \frac{\hat{\sigma}_{w'}^2(t)}{1-a_t^{\ 2}}, \tag{16}$$

где a_t – компонента вектора $\bar{\theta}_t = [a_t, b_t]^{\mathrm{T}}$, генерируемого процедурой (10), (11) совместно с (12)–(14). Если далее положить

$$\hat{\sigma}_y^2(t) = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t} y_i^2 \ (t \ge 1),$$

то на основании (15) с учетом (16) получаем алгоритм построения $\{\hat{\sigma}_{w'}^2(t)\}$ в форме соотношения

$$\hat{\sigma}_{w'}^2(t) = ((t-1)^{-1}\sum_{i=1}^{t} y_i^2 - \sigma_\upsilon^2)(1-a_t^2). \tag{17}$$

Имея теперь в своем распоряжении величину $\hat{\sigma}_{w'}^2(t), \sigma_\upsilon^2$ и a_t, согласно результатам, приведенным в [1, п. 3.1.6°] применительно к выбору параметров оптимального фильтра для выделения полезного сигнала типа АР(1) с известными статистическими характеристиками, можно найти такие выражения для полиномов α и β в (6):

$$\alpha(z^{-1}, a_t, \hat{\sigma}^2_{w'}(t), \sigma^2_{\upsilon}) = c_1(t) + c_2(t) z^{-1}, \tag{18}$$

$$\beta(z^{-1}, a_t, \sigma^2_{w'}(t), \sigma^2_{\upsilon}) = \frac{\hat{\sigma}^2_{w'}(t)}{c_1(t) - c_2(t) a_t}. \tag{19}$$

В этих выражениях

$$c_1(t) = \frac{1}{2}(\rho_1(t) + \rho_2(t)), \qquad c_2(t) = \frac{1}{2}(\rho_1(t) - \rho_2(t)), \tag{20}$$

где

$$\rho_1(t) = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{w'}(t) + \sigma^2_{\upsilon}(1 + a_t)^2}, \qquad \rho_2(t) = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{w'}(t) + \sigma^2_{\upsilon}(1 - a_t)^2}. \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий, сформулированных в [1, теорема 4.3.1], последовательность $\{a_t\}$ сходится к a с вероятностью 1. В этом случае в силу (16) и того, что $\hat{\sigma}^2_y(t) \to \sigma^2_y$ при $t \to \infty$ почти наверное (п. н.), согласно (17) следует предел

$$\lim_{t\to\infty} \hat{\sigma}^2_{w'}(t) = \sigma^2_{w'}$$

с вероятностью 1. Тем самым гарантируется предельно-оптимальная фильтрация последовательности в смысле выполнения соотношения

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \mathrm{M}\{(\hat{s}_t - s_t)^2\} = \min \ \text{(п.н.)}.$$

Для оценки работоспособности алгоритма (6), (18), (19), (10)–(14) совместно с (17), (20), (21) проводилась его моделирование при следующих исходных данных: $a = -0{,}66$, $\sigma^2_{w'} = 2{,}1$, $\sigma^2_{\upsilon} = 0{,}85$. Модельный эксперимент показал, что последовательность оценок $\{a_t\}$ сходится к истинному значению a, равному -0,66, за 1500 шагов. При этом обеспечивается оптимальная фильтрация $\{y_t\}$ для всех $t \geq 1500$.

Выводы. Предложенный алгоритм адаптивной цифровой фильтрации может быть использован для решения задачи предельно-оптимального выделения полезного сигнала, описываемого моделью АР(1) с неизвестными статистическими характеристиками на фоне дискретного белого шума.

Список литературы

1. *Фомин В. Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация.– М.: Наука 1984. – 288 с.

2. *Цыпкин Я. З.* Основы теории обучающихся систем. – М.: Наука, 1970. – 252 с.

3. *Адаптивные* фильтры / Пер. с англ. под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.

4. *Уидроу Б., Стирнз С.* Адаптивная обработка сигналов /Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.