УДК 519.872

Алиев И.А.

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С МГНОВЕННЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И РАНДОМИЗИРОВАННОЙ ПОЛИТИКОЙ ПОПОЛНЕНИЯ ЗАПАСОВ

Бакинский государственный университет

agassi.melikov@rambler.ru

Введение

Анализ работ, посвященных изучению систем управления запасами (СУЗ), показал, что в них, в основном, рассматриваются модели систем с идентичными заявками, а модели систем с разнотипными заявками недостаточно изучены [1,2]. Вместе с тем, в реальных СУЗ зачастую поступающие заявки существенным образом отличаются друг от друга. Так, например, заявки отличаются по объему покупаемого запаса, по важности, по времени обслуживания и т.д. Поэтому возникает необходимость изучения моделей СУЗ с разнотипными заявками. В работах [3-5] предложены модели СУЗ с положительным временем обслуживания заявок. Однако модели СУЗ с разнотипными заявками и мгновенным обслуживанием мало изучены. Вместе с тем, такие системы часто встречаются в реальной жизни, например, системы с самообслуживанием являются классическими примерами подобных систем, так как в таких СУЗ для обслуживания поступающих заявок не выделяются специальные сервера, и потому с точки зрения администратора СУЗ их время обслуживания можно считать равным нулю.

Подобные модели были изучены в работах [6,7], при этом в них считается, что в системе используются нерандомизированные политики пополнения запасов (ППЗ), т.е. предполагается, что объемы заказов являются либо постоянными, либо переменными, но не случайными, величинами. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в работах [6,7], в которой изучается модель СУЗ с разнотипными заявками, мгновенным обслуживанием и рандомизированной ППЗ.

Описание системы и постановка задачи

На вход системы поступают простейшие потоки заявок двух типов: бесприоритетные (обычные) заявки (поток заявок первого типа) и приоритетные (важные) заявки (поток заявок второго типа). Интенсивность обычных заявок равна λ_1, а интенсивность важных заявок равна λ_2. Заявки обслуживаются мгновенно, иными словами, время их обслуживания равно нулю.

Система содержит склад максимального размера $S, S < \infty$. Заявки являются идентичными в смысле объема потребуемого запаса, т.е. каждая заявка требует запас единичного размера.

Для организации приоритетного обслуживания вводится определенное пороговое значение для уровня запасов. Если в момент поступления приоритетной заявки уровень запасов больше нуля, то она получает запас и покидают систему. Бесприоритетные заявки получают запас лишь тогда, когда в момент их поступления уровень запасов больше определенного порогового уровня $s, 1 \le s \le S-1$, а если уровень запасов системы в этот момент меньше или равен s, то эти заявки согласно схеме Бернулли либо с вероятностью α получают запас либо с вероятностью $1-\alpha$ уходят из системы не получив запас.

В системе принята рандомизированная ППЗ, которая определяется следующим образом. Обслуживания заявок (т.е. отпуск запасов к заявкам) продолжается, пока склад системы не является пустым. А когда склад системы оказывается пустым, с вероятностью $\sigma(m)$ заказываются запасы объема $m, m = 1,2,\dots,S,$ где $\sum_{m=1}^{S}\sigma(m) = 1.$ Необходимо, чтобы $\sigma(S) > 0$, так как, что если $\sigma(S) = 0$, то объем склада используется не полностью. Сделанный заказ выполняется с некоторой случайной задержкой, которая имеет экспоненциальную функцию распределения с параметром $\nu > 0$.

Задача заключается в нахождении характеристик системы: средний уровень запасов (S_{av}); среднюю интенсивность заказов (RR); вероятности потери заявок каждого (PB_1, PB_2).

Метод расчета характеристик системы

Поскольку рассматривается модель СУЗ с мгновенным обслуживанием, то состояния системы можно описывать скалярной случайной величиной m, которая указывает уровень запасов системы. Как было отмечено выше, максимальный размер склада системы равен $S, S < \infty$, т.е. работу изучаемой системы можно описывать одномерной цепью Маркова (ЦМ) с пространством состояний $E = \{0,1,\dots,S\}$.

Рассмотрим задачу нахождения элементов производящей матрицы (ПМ) этой ЦМ. Для этого необходимо определить возможные переходы между ее состояниями. Переходы между состояниями системы возможны лишь в моментах поступления заявок и восстановления запасов системы.

Переход из состояния m_1 в состояние m_2, где $m_1, m_2 \in E$, обозначается через $m_1 \to m_2$, а интенсивность такого перехода обозначается через $q(m_1, m_2)$.

Учитывая принятой схемы доступа разнотипных заявок, а также введенную рандомизированную ППЗ, заключаем, что указанные величины вычисляются так (рис.1):

- если выполняется условие $m > s$, то поступившие заявки любого типа получают запасы, т.е. происходит переход $m \to m - 1$ с интенсивностью λ, где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$;
- если выполняется условие $0 < m \le s$, то поступившие приоритетные заявки получают запасы с вероятностью единица, а обычные заявки в таких состояниях получают запасы с вероятностью α, т.е. в таких случаях происходит переход $m \to m - 1$ с интенсивностью $\tilde{\lambda} = \lambda_2 + \lambda_1\alpha$;
- заказ запасов объема m отправляется тогда, когда их уровень в складе равен нулю, т.е. после выполнения заказа происходит переход $0 \to m$ с интенсивностью $\nu\sigma(m)$.

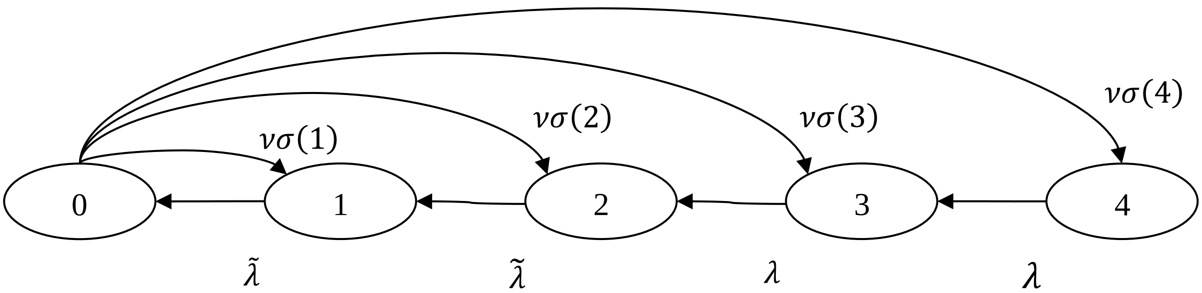


Рис. 1. Граф переходов между состояниями системы при использовании рандомизированной ППЗ, S=4, s=2.

Следовательно, положительные элементы ПМ данной ЦМ определяются из следующих соотношений (рис.1):

$$q(m_1, m_2) = \begin{cases} \nu\sigma(m_2), & \text{если } m_1 = 0,\ 1 \le m_2 \le S, \\ \tilde{\lambda}, & \text{если } 1 \le m_1 \le s, m_2 = m_1 - 1, \\ \lambda, & \text{если } s < m_1 \le S, m_2 = m_1 - 1. \end{cases} \quad (1)$$

Из графа переходов между состояниями системы (рис.1) заключаем, что все состояния построенной ЦМ сообщаются друг с другом, т.е. в ней существует стационарный режим. Через $p(m)$ обозначим стационарную вероятность состояния $m \in E$. Тогда учитывая описанного выше алгоритма построения ПМ данной ЦМ (1), получаем следующую систему уравнений равновесия (СУР) для искомых вероятностей состояний:

Случай $m = 0$:

$$\nu p(0) = \tilde{\lambda} p(1) \; ; \qquad (2)$$

Случаи $0 \le m \le s$:

$$\tilde{\lambda} p(m) = \tilde{\lambda} p(m+1) \; + \nu\sigma(m) p(0); \qquad (3)$$

Случаи $s < m < S$:

$$\lambda p(m) = \lambda p(m+1) \; + \nu\sigma(m) p(0); \qquad (4)$$

Случай $m = S$:

$$\lambda p(S) = \nu\sigma(S) p(0). \qquad (5)$$

К полученным уравнениям (2-5) добавляем условие нормировки:

$$\sum_{m=0}^{S} p(m) = 1. \qquad (6)$$

Из системы уравнений (2-5) удается выразить все вероятности состояний через вероятности $p(0)$следующим образом:

$$p(m) = \begin{cases} \frac{\nu}{\tilde{\lambda}}\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \sigma(i)\right) p(0), & 1 \le m \le s, \\ \frac{\nu}{\lambda}\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \sigma(i)\right) p(0), & s+1 \le m \le S, \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь и далее принимается, что $\sum_{k=a}^{b} x_k = 0$, если $b < a$. Неизвестная вероятность $p(0)$ в формуле (7) находится из условия нормировки (6), т.е.

$$p(0) = \left(1 + \nu\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}}\sum_{m=1}^{s}\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1}\sigma(i)\right) + \frac{1}{\lambda}\sum_{m=s+1}^{S}\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1}\sigma(i)\right)\right)\right)^{-1}. \qquad (8)$$

Искомые характеристики системы вычисляются с помощью вероятностей состояний системы следующим образом:

- Средний уровень запасов системы S_{av} определяется так:

$$S_{av} = \sum_{m=1}^{S} m p(m) = \nu p(0)\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}}\sum_{m=1}^{s}\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1}\sigma(i)\right) + \frac{1}{\lambda}\sum_{m=s+1}^{S}\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1}\sigma(i)\right)\right). \qquad (9)$$

- Средняя интенсивность заказов определяется следующим образом:

$$RR = \tilde{\lambda} p(1) = \nu p(0) \; . \qquad (10)$$

- Согласно принятой схемы доступа заявки низкого приоритета (обычные заявки) покидают систему без получения запасов с вероятностью $1 - \alpha$, если в момент их поступления уровень запасов системы меньше, чем $s + 1$. Следовательно, искомая вероятность потери заявок низкого приоритета (PB_1) вычисляется так:

$$PB_1 = (1-\alpha)\sum_{m=0}^{s} p(m) = (1-\alpha)\left(1 + \frac{\nu}{\tilde{\lambda}}\sum_{m=1}^{s}\left(1 - \sum_{i=1}^{m-1}\sigma(i)\right)\right) p(0) \; . \qquad (11)$$

- Приоритетные заявки покидают систему без получения запасов лишь тогда, когда уровень запасов системы равен нулю. Иными словами, вероятность потери заявок высокого приоритета (PB_2) вычисляется так:

$$PB_2 = p(0) \; . \qquad (12)$$

Таким образом, с помощью формул (8-12) находятся характеристики системы.

Численные результаты

Предложенные формулы позволяют произвести вычислительные эксперименты для изучения поведение характеристик системы относительно изменения исходных параметров. Кроме того, можно решить задачи оптимизации характеристик системы относительно выбранной критерии качества функционирования системы.

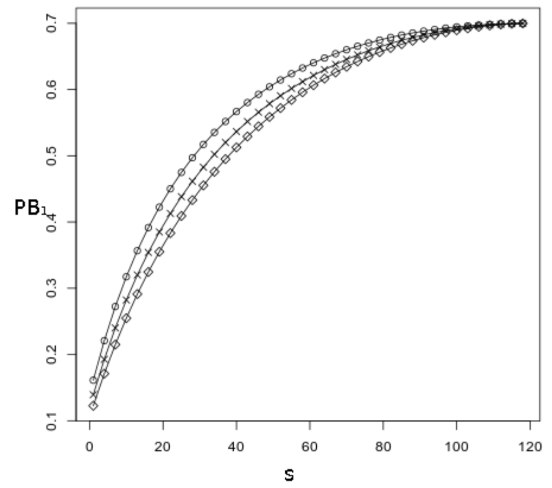
Исходя из практической реализуемости, предположим, что единственным управляемым параметром системы является пороговый параметр s, а остальные параметры являются постоянными величинами.

Ниже приводятся графики, которые показывают зависимость характеристик системы от этого параметра.

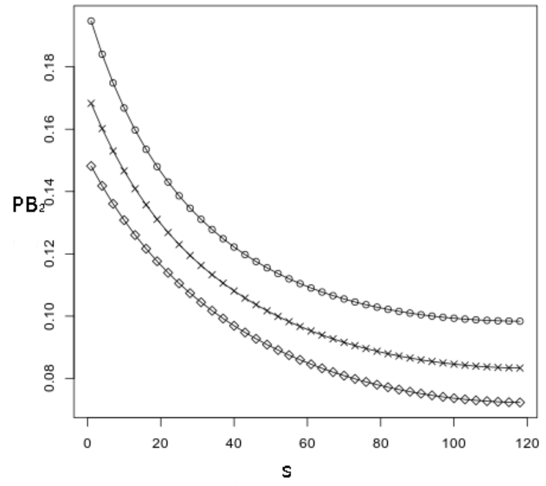
Как и в работах [6,7], исходные данные системы выбираются следующим образом: $S = 120, \lambda_1 = 50, \lambda_2 = 200, \nu = 20, \alpha = 0.3$.

Рассмотрим три схемы распределения объемов восстановления запасов: 1) равномерная схема; 2) возрастающая схема; 3) убывающая схема. В первой схеме считается, что $\sigma(m) = 1/S$ для каждого $m = 1,2,\dots,S$; во второй схеме функция $\sigma(m)$ является возрастающей относительно параметра $m = 1,2,\dots,S$, т.е. $\sigma(m) > \sigma(m-1)$, а в третьей схеме она является убывающей относительно указанного параметра, т.е. $\sigma(m) < \sigma(m-1)$.

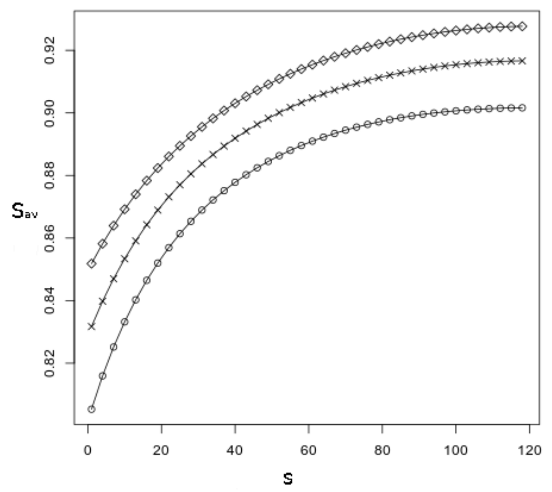
Некоторые результаты численных экспериментов, которые показывают поведение характеристик системы относительно изменения критического уровня запасов, показаны на рис.2. Здесь и далее в графиках приняты следующие обозначения для предложенных схем: × – для схемы 1; ◊ – для схемы 2; ° – для схемы 3.



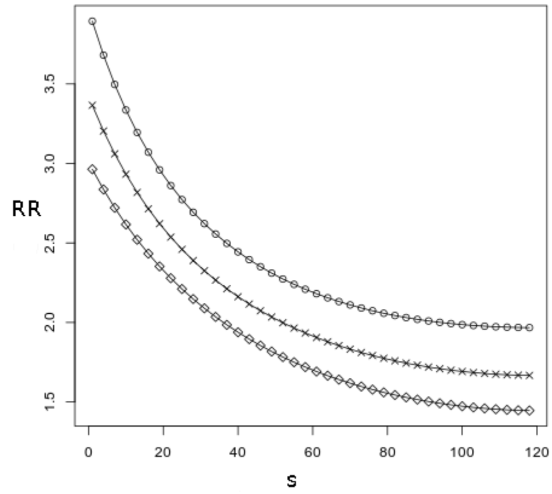
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 2. Зависимость характеристик системы от параметра при использовании рандомизированной ППЗ.

Для конкретности изложения функция $\sigma(m)$ в различных схемах определяется так:

во второй схеме:

$$\sigma(1) < 1/S\,, \sigma(k) = \sigma(1) + (k-1)\varepsilon, k = 2, \ldots, S, \text{ где } \varepsilon = \frac{2(1-S\sigma(1))}{S(S-1)};$$

в третьей схеме:

$$\sigma(1) > \frac{1}{S}, \sigma(k) = \sigma(1) - (k-1)\varepsilon, k = 2, \ldots, S, \text{ где } \varepsilon = \frac{2(-S\sigma(1)+1)}{S(S-1)}.$$

Поскольку $S = 120$, то ниже в численных экспериментах принимается, что во второй схеме $\sigma(1) = 8 \cdot 10^{-3}$, а третьей схеме – $\sigma(1) = 10^{-2}$.

Отметим, что для всех характеристик системы равномерная схема поставки запасов (схема 1) является промежуточной между двумя остальными схемами.

Вероятность потери заявок низкого приоритета (PB_1) является возрастающей, так как с увеличением параметра s уменьшаются шансы заявок данного типа для принятия в систему с вероятностью единица (рис.2, а). Отметим, что при использовании схемы 2 значения этой функции меньше, чем ее аналогичные значения при использовании схемы 3. Этот факт является ожидаемым, так как в схеме 2 вероятность поступления заказов большого размера растет с ростом объема заказа, и тем самым, уменьшается вероятность опустошения склада системы. Обратная картина наблюдается при изучении поведения вероятности потери заявок высокого приоритета (PB_2), т.е. здесь эта функция является убывающей, так как с увеличением параметра s увеличиваются шансы заявок данного типа для принятия в систему, так как с ростом параметра S уменьшаются шансы заявок низкого приоритета для принятия в систему, и тем самым конкуренция решается в пользу заявок высокого приоритета (рис.2, б). При использовании схемы 2 значения этой функции меньше, чем ее аналогичные значения при использовании схемы 3.

Средний уровень запасов является возрастающей функцией. Это объясняется тем, что с ростом параметра s уменьшается интенсивность обычных заявок, которые получают запасы с вероятностью единица, и поэтому с увеличением указанного параметра уменьшается объем отпускаемых запасов, т.е. увеличивается средний уровень запасов системы (рис.2, в). Здесь при использовании схемы 2 значения этой функции больше, чем ее аналогичные значения при использовании схемы 3. Этот факт является ожидаемым, так как в схеме 2 вероятность поступления заказов большого размера растет с ростом объема заказа, и тем самым, увеличивается средний уровень запасов системы. Вместе с тем, с ростом параметра s уменьшается средняя интенсивность заказов (рис.2, г). Этот факт объясняется тем, что с ростом указанного параметра уменьшается вероятность опустошения склада, поэтому уменьшается интенсивность заказов. Отметим, что при использовании схемы 2 значения этой функции меньше, чем ее аналогичные значения при использовании схемы 3. Этот факт является ожидаемым, так как в схеме 2 вероятность поступления заказов большого размера растет с ростом объема заказа, и тем самым, уменьшается вероятность опустошения склада, что в свою очередь приводит к уменьшению интенсивности заказов.

Как и в работах [6,7], рассмотрим задачу нахождения оптимального значения критического уровня запасов s для максимизации прибыли системы. Доходы системы (RV) формируются от продажи запасов, т.е. указанная величина определяется так:

$$RV(s) = \Big(\lambda_1\big(1 - PB_1(s)\big)\Big)C_{rev}^1 + \lambda_2\big(1 - PB_2(s)\big)C_{rev}^2 , \qquad (13)$$

где C_{rev}^k – доходы системы от продажи единицы запаса заявкам k-го типа, $k = 1,2$. Поскольку доходы от обслуживания приоритетных заявок больше, чем от обслуживания обычных, т.е. считается, что $C_{rev}^2 > C_{rev}^1$.

Суммарные штрафы (TC) в системе определяются так:

$$TC(s) = c_r S \cdot RR(s) + c_h S_{av}(s) + c_l^1 \lambda_1 PB_1(s) + c_l^2 \lambda_2 PB_2(s), \qquad (14)$$

где c_r – цена единицы объема заказа; c_h – цена хранения единицы объема запасов за единицу времени; c_l^k – штраф за потерю одной заявки k-го типа, $k = 1,2$. Считается, что штрафы за потерю приоритетных заявок больше, чем за потерю обычных, т.е. $c_l^2 > c_l^1$.

Тогда задача оптимизации данной системы ставится следующим образом: требуется найти значение параметра s, которое позволяет максимизировать прибыль системы $\big(PT(s)\big)$, т.е. необходимо решить следующую задачу:

$$s^* = arg \max_s \ PT(s) , \qquad (15)$$

где $PT(s) = RV(s) - TC(s)$.

Очевидно, что задача (15) всегда имеет решение, так как множество допустимых решений $\{1 \le s \le S - 1\}$ является конечным и дискретным.

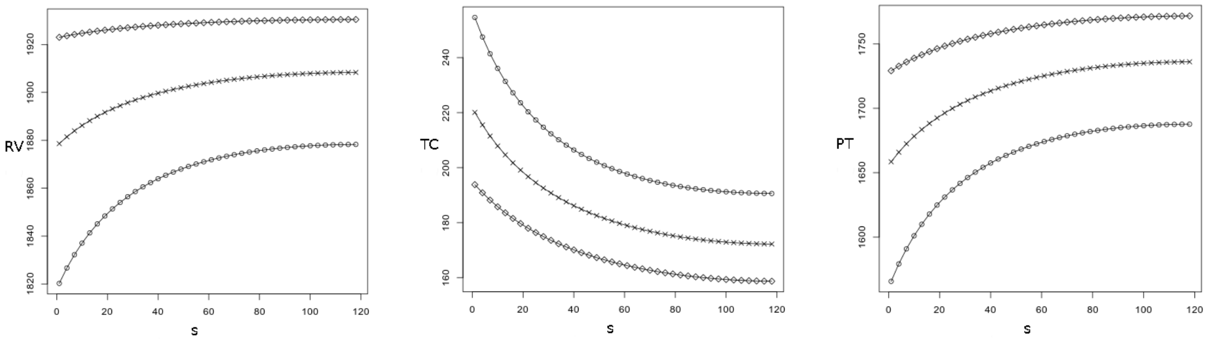
Коэффициенты в функционалах (13) и (14) выбираются так [6,7]:

$$C_{rev}^1 = 5, C_{rev}^2 = 10, K = 0.2, c_r = 0.01, c_h = 0.2, c_l^1 = 2, c_l^2 = 6.$$

метра s (рис.3, б), при этом здесь для выбранных исходных данных при использовании схемы 3 доходы оказываются намного больше, чем при использовании схемы 2. Затруднительно объяснить характер поведения этой функции, так как она зависит от многих показателей, которые связаны со средним уровнем запасов, с интенсивностью заказов, а также с потерями разнотипных заявок.

Поведение экономических показателей системы относительно изменения критического уровня запасов показаны на рис.3. Здесь, как и выше, для всех экономических показателей системы равномерная схема поставки запасов (схема 1) является промежуточной между двумя остальными схемами. Для выбранных исходных данных доходы системы является возрастающей (рис.3, а), при этом при использовании схемы 2 доходы оказываются намного больше, чем при использовании схемы 3. Это объясняется тем, что при использовании схемы 2 вероятность опустошения склада меньше, чем при использовании схемы 3, и тем самым при использовании схемы 2 увеличивается интенсивность доходов от продажи запасов. Вместе с тем, суммарные штрафы (TC) является убывающей функцией относительно параметра s (рис.3, б), при этом здесь для выбранных исходных данных при использовании схемы 3 доходы оказываются намного больше, чем при использовании схемы 2. Затруднительно объяснить характер поведения этой функции, так как она зависит от многих показателей, которые связаны со средним уровнем запасов, с интенсивностью заказов, а также с потерями разнотипных заявок.

Для выбранных исходных данных прибыль системы является возрастающей функцией относительно изменения критического уровня запасов (рис.3, в), при этом при использовании схемы 2 прибыль системы оказывается намного больше, чем при использовании схемы 3. Поскольку данная функция является возрастающей, то заключаем, что решением задачи (13) для данной политики пополнения запасов является $s^* = 120$.



(а) (б) (в)

Рис. 3. Зависимость экономических показателей системы от параметра при использовании рандомизированной ППЗ.

Заключение

В работе предложена модель СУЗ с разнотипными заявками, мгновенным обслуживанием, в которой принята рандомизированная политика пополнения запасов. Считается, что известно распределение объемов восстановления запасов системы. Заявки высокого приоритета получают запас, если в момент их поступления в системе имеются запасы, а заявки низкого приоритета получают запасы лишь тогда, когда в моменты их поступления уровень запасов системы ниже определенного критического уровня; иначе эти заявки согласно схеме Бернулли либо получают запас, либо покидают систему без получения запаса.

Математическая модель изучаемой системы представляет собой одномерную цепь Маркова. Разработаны формулы для нахождения стационарного распределения этой цепи Маркова и на их основе получены формулы для нахождения характеристик изучаемой СУЗ. Разработанные формулы позволяют изучить поведения характеристик системы относительно исходных параметров системы и решить задачи ее оптимизации относительно выбранного критерия качества.

Литература

1. *Krishnamoorthy A., Shajin D., Narayanan W.* Inventory with positive service time: a survey // Advanced Trends in Queueing Theory. Series of Books “Mathematics and Statistics” Sciences. Anisimov V., Limnios N. (Eds.). London: ISTE & Wiley, 2020. – P. 171-208.

2. *Kleijn M.J., Dekker R.* An overview of inventory systems with several demand classes // Lect. Notes in Econ. & Math. Syst., 1999. – Vol. 480. – P. 253-265.

3. *Melikov A.Z., Ponomarenko L. A., Aliev I.A.* Analysis and optimization of models of queuing-inventory systems with two types of requests // J. Autom. & Inf. Sci., 2018. – Vol. 50. – P. 34-50.

4. *Melikov A.Z., Ponomarenko L. A., Aliev I.A.* Markov models of systems with demands of two types and different stocking ppolicies // Cybern. & Syst. Anal., 2018. – Vol. 54. – P. 900-917.

5. *Melikov A.Z., Ponomarenko L. A., Aliev I.A.* Markov models of queuing-inventory systems with different types of retrial customers // J. Autom. & Inf. Sci., 2019. – Vol. 51. – P. 1-15.

6. *Aliyev I.A.* Mathematical models of resource management systems with instant service and two types of applications // Proc. of the XXV International Open Science Conference «Modern Informatization Problems in Economics and Safety». Yelm, WA. USA: Science Book Publishing House, 2020. – P. 4-9.

7. *Алиев И.А.* Численное исследование и оптимизация системы управления запасами с мгновенным обслуживанием и двумя типами заявок // Системы управления и информационные технологии, 2020. – №2 (80). – С. 28-34.

Алиев И.А.

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ С МГНОВЕННЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И РАНДОМИЗИРОВАННОЙ ПОЛИТИКОЙ ПОПОЛНЕНИЯ ЗАПАСОВ

Предложена Марковская модель системы с мгновенным обслуживанием, в которой обслуживаются заявки двух типов. Считается, что высокоприоритетные заявки обслуживаются, если в моменты их поступления имеются запасы в складе системы, а низкоприоритетные заявки могут получать запасы лишь тогда, когда уровень запасов в складе выше определенной величины. В системе используется рандомизированная политика пополнения запасов. Предложен алгоритм расчета характеристик данной системы и решена задача ее оптимизации.

Ключевые слова: *система запасания, мгновенное обслуживание, разнотипные заявки, рандомизированная политика пополнения запасов, метод расчета, оптимизация.*

Aliyev I.A.

MODEL OF SYSTEM WITH INSTANTANEOUS SERVICE AND RANDOMIZED REPLENISHMENT POLICY

The Markovian model of system with instantaneous service and two types of customers is proposed. High priority customers get the item if inventory level is positive while low priority customers get the item if and only if inventory level is more than some critical level. In this system a randomized replenishment policy is used. An algorithm to calculation of performance measures is proposed and optimization of investigated system is performed.

Keywords: *inventory system, instantaneous service, customers of different types, randomized replenishment policy, calculation method, optimization.*