УДК 004.021

Галузинський Г.П., к.т.н.

# МОДИФІКАЦІЯ ІНТЕРАКТИВНОЇ ПРОЦЕДУРИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

**Київський національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана**

galuzin@i.ua

## *Вступ*

Аналіз сучасних публікацій, присвячених розв’язанню задач багатокритеріальній оптимізації, в яких альтернативи в явному вигляді не сформульовані, а замість цього в явному вигляді сформульовані обмеження, що накладаються на можливі рішення, показує, що увага авторів зосереджена переважно на способах визначення розрахунковим шляхом вагових коефіцієнтів з метою заміни сукупності критеріїв певною скалярною функцією, яка надалі використовується як єдина основа для отримання єдиного проектного рішення, яке визначається оптимальним значенням цієї функції. Такий підхід, що ґрунтується на визначені на науковій основі вагових коефіцієнтів локальних критеріїв, може бути ефективним лише для окремих класів задач, оскільки  у більшості випадків формалізований аналіз, що залишає поза увагою суб'єктивні цінності та можливості їхньої взаємної компенсації не може дати правильних вказівок щодо доцільності прийняття тих чи інших рішень і тому результат такого аналізу часто буде неприйнятним.

В роботі [1] був запропонований варіант ітеративної евристичної процедури узгодження локальних цілей, в якій сукупність локальних критеріїв замінюється скалярною функцією для її подальшого використання не як єдиної основи для отримання «оптимального» рішення, а як основного елементу механізму переналагодження моделі, що дозволяє людині втручатися в процес пошуку рішення за рахунок зворотного зв’язку між нею і моделлю.

Завдяки тому, що запропонована процедура не залишає поза увагою суб’єктивні цінності особи, що приймає рішення (ОПР) та можливості їхньої взаємної компенсації, вона дозволяє забезпечити вирішення досить широкого кола безперервних задач багатокритеріальної оптимізації, в яких альтернативи в явному вигляді не сформульовані, а замість цього в явному вигляді сформульовані обмеження, що накладаються на можливі рішення.

Проте використання цієї процедури показало, що хоча усвідомлення напрямів дій, які створюють передумови отримання суб’єктивно кращого рішення, не викликає труднощів, вона не позбавлена деяких недоліків, пов'язаних, по-перше, з певною складністю вибору на кожній ітерації конкретних значень масштабних коефіцієнтів узгодження локальних критеріїв і, по-друге, з недостатньою ефективністю стандартного способу усунення різнорідності окремих критеріїв [2].

## *Мета*

Метою є удосконалення інтерактивної процедури оптимізації, описаної в статті [1], за рахунок підвищення прозорості способу переналагодження моделі для отримання нового варіанту рішення та забезпечення таким чином більш швидкого просування до компромісу, який ОПР, буде вважати достатньо задовільним.

## *Основна частина*

Запропонована в [1] інтерактивна процедура дозволяє досягати певного рішення, ґрунтуючись на здатності ОПР оцінити якість об'єкта управління вектор-функцією

$$f(x) = (f1(x), f2(x), \ldots, fk(x)), \quad (1)$$

компонентами якої є задані локальні критерії, які є функціями fi(x) (i = 1, 2,…, k) вектора x = (x1, x2, …, xn), а на змінні xj (j = 1,n) накладені обмеження вигляду:

$$gj \geq xj \leq uj \ (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (2)$$
$$dl \geq ql(x) \leq bl \ (l = 1, 2, \ldots, m). \quad (3)$$

Знайдені рішення повинні бути Парето-оптимальними та здатними забезпечити отримання вектор-функції f(x) з такими компромісними значеннями локальних критеріїв, які в змозі задовольнити суб’єктивні вимоги ОПР, або показати йому відсутність об’єктивної можливість їх задовільнити.

Кожне нове Парето-оптимальне рішення в запропонованій процедурі визначається в просторі локальних критеріїв мінімізацією масштабованої відстані між «ідеальною» точкою у вигляді значень екстремального вектора z* (яка у загальному випадку є недосяжною) та точкою, заданою поточними значеннями локальних критеріїв. Величина цієї відстані оцінюється сумою добутків масштабних коефіцієнтів з квадратами відхилень критеріїв від своїх «ідеальних» значень:

$$F(x) = ß1\ (z^*1 – z1)2 + ß2\ (z^*2 – z2)2 + \ldots + ßk\ (z^*k – zk)2, \quad (4)$$

де z*i – екстремальне значення і-ого локального критерію, яке при задоволенні суб’єктивних вимог ОПР не може бути досягнуто, zi – поточне значення і-ого локального критерію, а ßi – і-ий коефіцієнт масштабування.

Основним способом переналагодження моделі з метою отримання нового Парето-оптимального рішення є корегування перед початком наступної мінімізації скалярної функції F(x) одного або декількох значень коефіцієнтів масштабування квадратів відхилень критеріїв від своїх «ідеальних» значень (коефіцієнтів узгодження критеріїв).

До недоліків такого способу вироблення компромісного рішення слід віднести:

- результати оптимізації функції F(x), показуючи наскільки вдало, чи навпаки, наскільки невдало були скореговані коефіцієнти узгодження, не дають достатньо повної інформації щодо подальшого їх корегування. Особливо враховуючи те, що значення цих коефіцієнтів напряму не пов’язанні з бажаними для ОПР значеннями локальних критеріїв;

- локальні критерії в реальних задачах, як правило, є непорівнянними і мають різні масштаби виміру. Використання для усунення цієї проблеми відомих методів нормалізації критеріїв [2] часто не дає бажаних результатів.

Для зменшення цих недоліків пропонується обчислювати функцію F(x) за формулами (5, 6).

$$F(x) = (\beta_1(z^*_1 - z_1))^p + (\beta_2(z^*_2 - z_2))^p + \ldots + (\beta_k(z^*_k - z_k))^p, \quad (5)$$
$$\beta_i = 1/(z^*_i - v^*_i). \quad (6)$$

У формулі (5) показник ступеня p – це ціле позитивне число, а у формулі (6) значення v*i трактується як величина бажаного компромісного значення і-ого локального критерію.

У цьому разі основний спосіб переналагодження моделі полягає не в призначені деяких значень коефіцієнтам узгодження (елементам вектора ß), а у їх обчисленні за формулою (8) після вибору має максимальну «силу тяжіння» до свого ідеального значення (максимальне значення елемента адитивної функції F(x)) за рахунок зменшення деяких інших, що мають менші «сили тяжіння» до своїх ідеальних значень.

ОПР цільових значень локальних критеріїв (елементів вектора v*).

Додатковий спосіб переналагодження моделі – це корегування величини p. Її збільшення призводить при мінімізації функції F(x) до збільшення величини, принаймні, того локального критерію, що має максимальну «силу тяжіння» до свого ідеального значення (максимальне значення елемента адитивної функції F(x)) за рахунок зменшення деяких інших, що мають менші «сили тяжіння» до своїх ідеальних значень.

Процес переналагодження моделі розглянемо на наступному прикладі [1, 2]: Знайти вектор $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$, що максимізує чотири функції

$$f_1(x) = 15x_1 + 5x_2 + 12x_3 - 8x_4 + 2x_5 + 7x_6 - 17x_7 - 1x_8 - 14x_9 + 9x_{10}$$
$$f_2(x) = -17x_1 - 19x_2 - 1x_3 + 3x_4 - 4x_5 - 18x_6 + 14x_7 + 4x_8 - 16x_9 - 11x_{10}$$
$$f_3(x) = -3x_1 + 3x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 15x_5 + 18x_6 + 17x_7 - 19x_8 + 14x_9 - 19x_{10}$$
$$f_4(x) = -x_1 + 2x_4 + 8x_5 - 4x_6 + 7x_7 + 9x_8$$

і задовольняє обмеженням $x_i \geq 0$ та

$$18x_1 + 11x_6 + 2x_7 + 6x_8 + 3x_{10} \leq 100,$$
$$4x_1 + 19x_3 + 15x_4 + 1x_5 + 11x_6 + 13x_7 \leq 100,$$
$$8x_2 + 3x_4 + 11x_8 \leq 100,$$
$$12x_5 + 2x_6 + 5x_7 + 3x_9 + 4x_{10} \leq 100,$$
$$13x_1 + 4x_3 + 9x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 13x_8 + 12x_9 + 3x_{10} \leq 100,$$
$$4x_3 + 19x_5 + 8x_9 + 9x_{10} \leq 100,$$
$$8x_1 + 3x_2 + 18x_3 + 3x_5 + 2x_7 + 2x_9 + 5x_{10} \leq 100,$$
$$1x_2 + 9x_4 + 13x_9 + 19x_{10} \leq 100$$

Розглянемо декілька кроків вирішення цієї задачі з використанням функції (5).

Крок 1. Припустимо, що у компромісному рішенні значення локальних функцій не можуть бути від'ємними. З урахуванням цього додаткового обмеження оптимізується кожен локальний критерій окремо і отриманні результати заносяться в таблицю екстремальних рішень (таблиця 1).

*Таблиця 1*

| | $z^{(1)}$ | $z^{(2)}$ | $z^{(3)}$ | $z^{(4)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $z_1$ | **66** | 0 | 0 | 0 |
| $z_2$ | 0 | **47,2** | 0 | 0 |
| $z_3$ | 0 | 0 | **168,5** | 109,1 |
| $z_4$ | 30,52 | 57,6 | 53,3 | **83,8** |

Значення, що знаходяться на головній діагоналі цієї таблиці, утворюють ідеальний критеріальний вектор z* = {66; 47,2;168,5; 83,8}, який через суперечливості критеріїв є недосяжним.

Крок 2. Встановлюються цільові значення локальних критеріїв, наприклад, v* = {33; 24; 84; 42} і у відповідності з формулою (6) визначаються значення елементів вектора ß ≈ {0,03; 0,043; 0,011; 0,024}.

Крок 3. Мінімізується функція F(x). При показнику ступеня p=2 це призводить до отримання значень локальних критеріїв (вектор f(x)) та елементів вектора F(x), наведених в таблиці 2.

Крок 4. З аналізу відносних значень елементів вектора F(x), які характеризують «сили тяжіння» до значень локальних оптимумів, видно, що збільшення показника ступеня p повинно призвести до покращення значення f2(x), а можливо й f1(x).

Дійсно, мінімізація F(x) при збережені попередніх умов, крім величини показника ступеня p, котрий збільшується до 4, призводить до передбачуваного результату (таблиця 3).

Крок 5. Припустимо, що бажано визначити нове компромісне рішення з приблизним зростанням третього критерію на дві одиниці. Перевіримо, які значення буде мати вектор f(x) при мінімізації функції F(x), якщо значення третього елемента вектора v* буде збільшено на дві одиниці (до 86). Результат наведено в таблиці 4.

Надалі кроки 4 та 5 можуть повторюватися в необмеженій кількості.

*Таблиця 2*

| Критерії | | Вектор $z^*$ | Вектор $v^*$ | Вектор $\beta$ | Вектор $f(x)$ | Значення елементів $F(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | абсолютне | відносне |
| $f_1(x)$ | *Макс* | 66,05 | 33 | 0,0303 | **22,45** | 1,74 | 0,38 |
| $f_2(x)$ | *Макс* | 47,22 | 24 | 0,0431 | **14,91** | 1,94 | 0,42 |
| $f_3(x)$ | *Макс* | 168,45 | 84 | 0,0118 | **86,96** | 0,91 | 0,20 |
| $f_4(x)$ | *Макс* | 83,8 | 42 | 0,0239 | **74,95** | 0,04 | 0,01 |
| | | | | | | 4,63 | |

*Таблиця 3*

| Критерії | | Вектор $z^*$ | Вектор $v^*$ | Вектор $\beta$ | Вектор $f(x)$ | Значення елементів $F(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | абсолютне | відносне |
| $f_1(x)$ | *Макс* | 66,05 | 33 | 0,0303 | **24,40** | 2,522 | 0,36 |
| $f_2(x)$ | *Макс* | 47,22 | 24 | 0,0431 | **17,26** | 2,772 | 0,39 |
| $f_3(x)$ | *Макс* | 168,45 | 84 | 0,0118 | **71,59** | 1,73 | 0,24 |
| $f_4(x)$ | *Макс* | 83,8 | 42 | 0,0239 | **62,15** | 0,087 | 0,01 |
| | | | | | | 7,111 | |

*Таблиця 4*

| Критерії | | Вектор $z^*$ | Вектор $v^*$ | Вектор $\beta$ | Вектор $f(x)$ | Значення елементів $F(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | абсолютне | відносне |
| $f_1(x)$ | *Макс* | 66,05 | 33 | 0,0303 | **24,05** | 2,607 | 0,36 |
| $f_2(x)$ | *Макс* | 47,22 | 24 | 0,0431 | **17,01** | 2,866 | 0,39 |
| $f_3(x)$ | *Макс* | 168,45 | **86** | 0,0118 | **73,85** | 1,733 | 0,24 |
| $f_4(x)$ | *Макс* | 83,8 | 42 | 0,0239 | **63,35** | 0,069 | 0,01 |
| | | | | | | 7,275 | |

## ***Висновки***

Модифікована інтерактивна процедура вироблення компромісів при вирішенні безперервних задач багатокритеріальної оптимізації залишається евристичною, оскільки на питання, що потребують відповіді для просування в напряму вироблення компромісу (наприклад, які ввести на даній ітерації цільові значення локальних критеріїв для досягнення потрібного результату), не можна відповісти абсолютно чітко. Проте, корегування цільових значень локальних критеріїв є більш зрозумілим і прозорим ніж корегування значень відповідних коефіцієнтів «узгодження». Тим більше, що запропоновані модифікації не тільки спрощують процес вибору регулюючих дій, направлених на досягнення компромісного рішення, а й роблять непотрібним масштабування критеріїв, оскільки, як видно з формул (5, 6), усунення різнорідності критеріїв та довільності вибору їхніх масштабів досягається автоматично. А це вже, само по собі, здатне суттєво прискорити процес досягнення бажаного компромісу.

### *Література*

1. *Галузинський Г.П.* Інтерактивна процедура багатокритеріальної оптимізації [Текст] / Галузинський Г.П., Городній О.В. // Збірник наукових праць Проблеми інформатизації та управління. – Вип. 4 (56). – К.: НАУ, 2016. – С. 26-33.

2. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация. / Штойер Р. // Теория, вычисления и приложения: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1992. — 504 с

**Галузинський Г.П.**

## МОДИФІКАЦІЯ ІНТЕРАКТИВНОЇ ПРОЦЕДУРИ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

*На основе анализа существующих подходов по поиску компромисса при решении задач многокритериальной оптимизации, в которых альтернативы в явном виде не формулируются, была предложена итеративная процедура, проведение которой должно облегчать процесс осознания, какой именно курс действий в определенных конкретных условиях следует выбирать для согласования локальных целей, и гарантировать, что при достижении компромиссного решения оно будет Парето-оптимальным. Однако использование этой процедуры показало, что хотя осознание направлений действий, которые создают предпосылки получения субъективно лучшего решения, не вызывает трудностей, она не лишена некоторых недостатков. Это, во-первых, определенная сложностью выбора на каждой итерации конкретных значений масштабных коэффициентов согласования локальных критериев и, во-вторых, недостаточная эффективность стандартного способа устранения разнородности отдельных критериев. Предлагаемая модификация этой процедуры позволяет упростить человеко-машинное взаимодействие, направленное на выработку интерактивным путем одного или нескольких компромиссных решений, допустимых с точки зрения лица, принимающего решение, за счет повышения прозрачности способа переналадки модели для получения нового варианта решения и обеспечения таким образом более быстрого продвижения к компромиссу, который лицо, принимающее решение, будет считать достаточно удовлетворительным. Это достигается использованием для получения нового Парето-оптимального решения скалярной функции вида:*

$$F(x) = ((z*1 - z1)/(z*1 - v*1))p + (\beta 2(z*2 - z2)/(z*2 - v*2))p + \ldots + ((z*k - zk)/(z*k - v*k))p,$$

*где z*i – экстремальное значение i-ого локального критерия (которое при удовлетворении всех субъективных требований не может быть достигнуто), zi – текущее значение i-ого локального критерия, v*i – желательное значение i-ого локального критерия, p ─ целое положительное число. В этом случае основной способ переналадки модели с целью получения нового Парето-оптимального решения ─ это корректировка перед началом последующей минимизации функции F(x) одного или нескольких значений вектора v**

***Ключевые слова**: многокритериальная оптимизация, Парето-оптимальные решения, лицо, принимающее решение.*

**Galuzinsky G.P.**

## MODIFICATION OF THE INTERACTIVE MULTICRITERIAL OPTIMIZATION PROCEDURE

*Based on an analysis of existing approaches to finding a compromise in solving multicriteria optimization problems in which alternatives are not explicitly formulated, an iterative procedure was proposed that should facilitate the process of understanding which course of action in certain specific conditions should be chosen to coordinate local goals, and ensure that upon reaching a compromise solution it will be Pareto-optimal. However, the use of this procedure showed that although awareness of the lines of action that create the prerequisites for obtaining a subjectively better solution does not cause difficulties, it is not without some drawbacks. This is, firstly, determined by the complexity of the choice at each iteration of the specific values of the scale coefficients of matching local criteria and, secondly, the lack of effectiveness of the standard way to eliminate the heterogeneity of individual criteria. The proposed modification of this procedure makes it possible to simplify man-machine interaction aimed at interactively developing one or more compromise solutions acceptable from the point of view of the decision maker by increasing the transparency of the model redeployment method to obtain a new solution and thus ensuring faster progress to a compromise that the decision creator would consider satisfactory enough. This is achieved by using to obtain a new Pareto-optimal solution of a scalar function of the form:*

$$F(x) = ((z*1 - z1)/(z*1 - v*1))p + (\beta 2(z*2 - z2)/(z*2 - v*2))p + \ldots + ((z*k - zk)/(z*k - v*k))p,$$

*where z*i is the extreme value of the i-th local criterion (which cannot be achieved if all the subjective requirements are satisfied), zi is the current value of the i-th local criterion, v*i is the desired value of the i-th local criterion, p is a positive integer. In this case, the main way to reconfigure the model in order to obtain a new Pareto optimal solution is to correct one or more values of the vector v* before the subsequent minimization of the function F (x).*

***Keywords**: multicriteria optimization, Pareto-optimal solutions, decision creator.*