УДК 621.396.4

[1]**Лысенко А.И.,** д.т.н.,
[2]**Тачинина Е.Н.,** к.т.н.

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЕТВЯЩЕЙСЯ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ СОСТАВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

[1]Национальный технический университет Украины «КПИ им. И. Сикорского»
[2]Национальный авиационный университет

lysenko.a.i.1952@gmail.com
tachinina@rambler.ru

Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности ветвящейся траектории движения составной динамической системы с произвольной схемой ветвления

Ключевые слова: оптимальное управление, ветвящаяся траектория, составная динамическая система

Введение

В настоящее время для решения многих прикладных задач в различных областях науки и техники широко используются составные динамические системы [3, 5].

Под составной динамической системой (СДС) расматриваем совокупность объектов (подсистем) с последовательными во времени режимами их работы, которая описывается на различных интервалах времени разными дифференциальными уравнениями и некоторыми конечными связями для стыковки траекторий составных частей.

Примерами использования на практике таких составных динамических систем являются:

- авиационно-космические системы (АКС), которые используются в качестве воздушной стартовой платформы для выведения на околоземную орбиту наноспутников [4];
- информационные роботы (ИР), представляющие собой СДС элементами которой являются: базовый беспилотный летательный аппарат (БПЛА) (БПЛА-носитель), группа мобильных, разнородных БПЛА (дроны), оснащенных мультисенсорами и связанных между собой посредством единой информационно-телекоммуникационной сети [2-3].

Траектории таких составных систем в современной научной литературе получили название ветвящихся [1], так как они состоят из участков совместного движения составных частей и участков их индивидуального движения к цели по отдельным ветвям траектории.

Эффективность использования этого класса систем зависит от пространственных координат и моментов времени, в которые происходят структурные преобразования СДС, а также от управления составными элементами при их движении по ветвям траектории в интервалах времени между последовательными структурными преобразования.

Рассмотрение каждого элемента данной системы в отдельности вне целой системы нарушает системный подход и снижает эффективность СДС.

В данной статье предлагается цельно рассматривать систему и кроме того осуществляется оперативный синтез управлений под конкретный сценарий работы данной системы, и в этом заключается актуальность работы.

Целью данной статьи является изложение приемов применения метода динамического программирования для разработки условий оптимальности ветвящейся траектории движения составной динамической системы с произвольной схемой ветвления.

Постановка задачи

Рассмотрим в качестве примера движение гипотетической СДС, которая состоит из N подсистем.

В процессе движения подсистемы будут отделяться с целью индивидуального выполнения задачи.

Схема траектории движения СДС с произвольной схемой ветвления представлена на рис. 1. Задача оптимизации произвольно разветвляющейся траектории СДС сводится к решению задачи оптимизации разрывной системы [1] с переменным размером вектора состояния и управления.

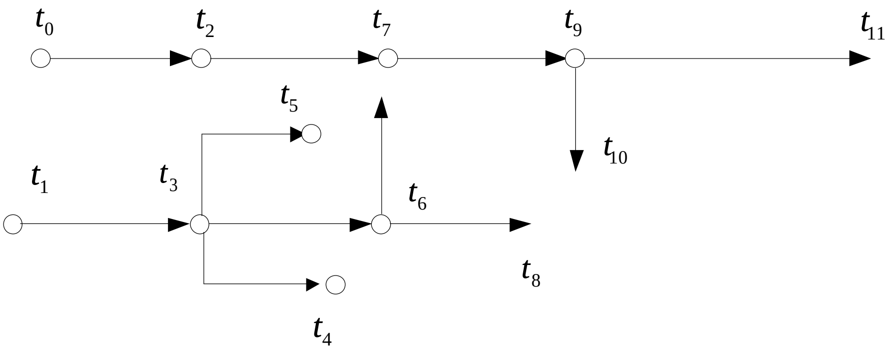

Рис. 1. Схема траектории движения СДС с произвольной схемой ветвления:
t_i -моменты времени структурных преобразований СДС;
стрелки условно показывают направление движение подсистем СДС

Методика преобразования СДС в разрывную динамическую системе с изменяющимся в моменты структурных преобразований размером векторов состояния и управления состоит в следующем [2]:

1. Исходя из физических соображений функционирования СДС, вычерчиваться схема ветвящейся траектории, составляются уравнения движения подсистем вдоль ветвей траектории.

2. Устанавливается хронологическая последовательность моментов времени структурных преобразований СДС.

3. В интервалах времени между структурными преобразованиями СДС вводятся переменные векторы состояния ${}_iX$ и управления ${}_iU$ $(i=\overline{1,N})$, где N– количество структурных преобразований СДС, состоящие соответственно из векторов состояния и управления динамических подсистем, перемещающихся по вервям траектории в данном интервале времени.

Метод динамического программирования для СДС с произвольной схемой ветвления

Метод динамического программирования позволяет решить эту задачу в следующей постановке [6, 7]:

$$\begin{aligned} I &= I(t_0,\dots,t_N;\,{}_1X(t_0^+),\dots,{}_NX(t_{N-1}^+);\\ &\quad {}_1X(t_1^-),\dots,{}_NX(t_N^-);\,{}_1X(\cdot),\dots{}_NX(\cdot);\\ &\quad {}_1U(\cdot),\dots,{}_NU(\cdot)) = \\ &= S_0({}_1X(t_0^+),t_0)+\sum_{i=1}^{N} I_i \to \inf, \end{aligned} \qquad (1)$$

$$I_i = S_i({}_1X(t_i^-),\,{}_{i+1}X(t_1^+),t_i)+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Phi_i({}_iX,{}_iU,t)dt$$

$$(i=\overline{1,N-1}),$$

$$I_N = S_N({}_NX(t_N^-),t_N)+\int_{t_{N-1}}^{t_N}\Phi_N({}_NX,{}_NU,t)dt,$$

$$({}_1X(t_0^+),t_0)\in B_0,\ ({}_NX(t_N^-),t_N)\in B_N; \qquad (2)$$

$$({}_iX(t_i^-),\,{}_{i+1}X(t_i^+),t_i)\in B_i,\ i=\overline{1,N-1}; \qquad (3)$$

$({}_iX(t),{}_iU(t))\in W_i(t), t\in[t_{i-1}^+,t_i^-], i=\overline{1,N}$; (4)

${}_i\dot{X}={}_iF({}_iX,{}_iU,t)$, $t\in[t_{i-1}^+,t_i^-], i=\overline{1,N}$; (5)

${}_iX\in E^{n_{\Sigma i}}, {}_iU\in E^{m_{\Sigma i}}, (i=\overline{1,N}), t_i\in E, (i=\overline{0,N})$,

где ${}_iX$, U_i – векторы фазового состояния и управляющих воздействий, соответствующие i-му интервалу времени между структурными преобразованиями СДС, размерности $n_{\Sigma i}$ и $m_{\Sigma i}$; ${}_iU(t)$ – кусочно-непрерывно; B_0, B_N, B_i, $(i=\overline{1,N-1})$, $W_i(t)$ $(i=\overline{1,N})$ – заданные подмножества соответственно из $E^{n_{\Sigma 1}}\times E^1$, $E^{n_{\Sigma N}}\times E^1$, $E^{n_{\Sigma i}}\times E^{n_{\Sigma i+1}}\times E^1$ $(i=\overline{1,N-1})$, $E^{n_{\Sigma i}}\cdot E^{m_{\Sigma i}}$, $(i=\overline{1,N})$. Запись $f(t_i^+)$ или $f(t_i^-)$ $(i=\overline{1,N})$ показывает, что значение функции рассматривается в момент времени $t=t_i^+=t_i+0$ или $t=t_i^-=t_i-0$, т.е. сразу справа от t_i или сразу слева от t_i. Аналогичный смысл имеет запись $t\in[t_{i-1}^+,t_i^-]$ $(i=\overline{1,N})$, т.е. $t\in[t_{i-1}+0,t_i-0]$ – рассматриваемый интеграл времени от момента справа от t_{i-1} до момента слева от t_i.

В интервалах времени $t_{i-1}^+ \le t \le t_1^-$ на систему (5) накладываются непрерывно действующие ограничения

$${}_iU(t)={}_iU(t+0)=\lim_{t\to t+0}{}_iU(t), \qquad (6)$$

Обозначим через $D_i({}_iX(t),t_{i-1},t_i)$ $(i=\overline{1,N})$ множество всех допустимых управлений ${}_iU(\cdot)$, определенных на отрезке $[t_{i-1}^+,t_i^-]$, удовлетворяющих условиям (4), (6) и таких, что траектория системы (5) удовлетворяет условиям (2)-(4). По определению $D_i\neq 0$, $i=\overline{1,N}$.

Кроме того, обозначим через ${}_iX(t),{}_iU(t),t_0,t_i$ $(i=\overline{1,N})$, $t_0\le t\le t_N$ один из допустимых процессов задачи (1)–(6).

Допустимый процесс $(\hat{t}_0,..,\hat{t}_N;{}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+),..,{}_N\hat{X}(\hat{t}_{N-1}^+);{}_1\hat{X}(\hat{t}_1^-),..,{}_N\hat{X}(\hat{t}_N^-)$; ${}_1\hat{X}(\cdot),...,{}_N\hat{X}(\cdot);{}_1\hat{U}(\cdot),...,{}_N\hat{U}(\cdot))$ назовем решением задачи (1)–(6), т.е. оптимальным процессом, если

$$\begin{aligned}\hat{I}&=I(\hat{t}_0,...,\hat{t}_N;{}_1\hat{X}(\hat{t}_0^+),...\\&...,{}_N\hat{X}(\hat{t}_{N-1}^+);{}_1\hat{X}(\hat{t}_1^-),...\\&..,{}_N\hat{X}(\hat{t}_N^-);{}_1\hat{X}(\cdot),...\\&...,{}_N\hat{X}(\cdot);{}_1\hat{U}(\cdot),..,{}_N\hat{U}(\cdot))=\\&=\inf_{B_0}...\inf_{B_N}\inf_{D_1}...\inf_{D_N}I.\end{aligned} \qquad (7)$$

Исходя из выражений (7) и на основании уравнения Беллмана [6, 7], сформулируем необходимые и достаточные условия оптимальности допустимого процесса.

Для оптимальности допустимого процесса необходимо и достаточно существование таких функций $V_i({}_iX(t),t)$, $t\in[t_{i-1}^+,t_i^-]$ $(i=\overline{1,N})$, которые:

- определены и непрерывны на всех $({}_iX,t)\in B_i^*(t)$, ${}_iX\in B_{iX}^*(t)$, $t\in[t_{i-1}^+,t_i^-]$ $(i=\overline{1,N})$, где $B_{iX}^*(t)$ – проекция B_i^* на n-мерное евклидово пространство с элементами ${}_iX=({}_iX_1(t)...{}_iX_{n\Sigma i}(t))$;
- обладают кусочно-непрерывными частными производными;
- удовлетворяют уравнениям

$$-\frac{\partial V_i}{\partial t}=\inf_{({}_iX,{}_iU)\in W_i(t)}\left[\begin{matrix}\Phi_i({}_iX,{}_iU,t)+\\+\left(\dfrac{\partial V_i}{\partial_i X}\right)^T{}_iF({}_iX,{}_iU,t)\end{matrix}\right]_{{}_iX} \qquad (8)$$

всюду на $[t_{i-1}^+,t_i^-]$ $(i=\overline{1,N})$, где существуют производные, и связанных граничными условиями

$$V_i({}_iX(t_1^-),t_i)=\left.\left[\begin{matrix}V_{i+1}({}_{i+1}X(t_1^+),t_i)+\\+S_i({}_iX(t_1^-),{}_{i+1}X(t_1^+),t_1^-)\end{matrix}\right]\right|_{\substack{({}_iX(t_1^-),\\ {}_{i+1}X(t_1^+),\\ t_i)\in B_i}} \qquad (9)$$

$$(i=\overline{1,N-1})$$

$$V_N({}_NX(t_N^-),t_N)=\left.=S_N({}_NX(t_N^-),t_N)\right|_{\substack{({}_NX(t_N^-),\\ t_N)\in B_N}}; \qquad (10)$$

- удовлетворяют соотношению

$$\hat{I}=\inf_{B_0}\inf_{B_1}...\inf_{B_N}\begin{bmatrix} S_0({}_1X(t_0^+),t_0)+ \\ +V_1({}_1X(t_0^+),t_0); \\ {}_1X(t_1^-),..,{}_NX(t_{N\text{-}1}^-); \\ {}_2X(t_1^+),..,{}_NX(t_{N\text{-}1}^+); \\ t_1,...,t_N) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Доказательство. Согласно принципу оптимальности Беллмана [6, 7] соотношение (7) представляется в виде

$$\hat{I}=\inf_{B_0}...\inf_{B_N}\begin{bmatrix} S_0({}_1X(t_0^+),t_0)+\inf_{D_1}[I_1+ \\ +\inf_{D_2}[I_2+...+\inf_{D_N}[I_N]...]] \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Поиск нижней грани выражения (11) начинается с *N*-ой внутренней скобки. Введем функцию

$$V_N({}_NX(t),t)=$$

$$=\inf_{D_N}\left.\begin{bmatrix} S_N({}_NX(t_N^-),t_N)+ \\ \int_t^{t_N}\Phi_N({}_NX,{}_NU,\tau)d\tau \end{bmatrix}\right\|_{\substack{({}_NX(t_N^-),\\ t_N)\in B_N}}, \quad (13)$$

$$t\le\tau\le t_N,\ t\in[t_{N\text{-}1}^+,t_N^-],$$

которая согласно [6, 7] определена и непрерывна на всех $({}_NX,t)$, $({}_NX(t),{}_NU({}_NX(t),t))\in W_N(t)$, обладает кусочно-непрерывными частными производными по ${}_NX(t)$ и *t*, а также удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial V_N}{\partial t}=$$

$$=\inf_{({}_NX,{}_NU)\in W_N(t)}\left.\begin{bmatrix} \Phi_N({}_NX,{}_NU,t)+ \\ \left(\dfrac{\partial V_N}{\partial {}_NX}\right)^T {}_NF({}_NX,{}_NU,t) \end{bmatrix}\right\|_{{}_NX} \quad (14)$$

при граничных условиях

$$V_N({}_NX(t_N^-),t_N)=$$

$$=S_N({}_NX(t_N^-),t_N)\Big|_{\substack{({}_NX(t_N^-),\\ t_N)\in B_N}}$$

Далее, по аналогии с уравнениями (12-14) вводим функцию

$$V_i({}_iX(t),t)=$$

$$=\inf_{D_{i({}_iX(t),t,t_i)}}\left.\begin{bmatrix} V_{i+1}({}_{i+1}X(t_i^+),t_i)- \\ +S_i({}_iX(t_i^-),{}_{i+1}X(t_i^+),t_i)+ \\ +\int_t^{t_i}\Phi_i({}_iX,{}_iU,\tau)d\tau \end{bmatrix}\right\|_{\substack{({}_iX(t_i^-),\\ {}_{i+1}X(t_i^+),\\ t)\in B_i}}$$

$$i=N-1,N-2,...,1;$$

$$t_0\le\tau\le t_i,\ t\in[t_{i\text{-}1}^+,t_i^-],$$

которая определена при всех $({}_iX(t),t)$, $({}_iX(t),{}_iU({}_iX(t),t))\in W_i(t)$, обладает кусочно-непрерывными частными производными по ${}_iX(t)$ и *t* и удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial V_i}{\partial t}=$$

$$=\inf_{({}_iX,{}_iU)\in W_i(t)}\left.\begin{bmatrix} \Phi_i({}_iX,{}_iU,\tau)+ \\ +\left(\dfrac{\partial V_i}{\partial {}_iX}\right)^T {}_iF({}_iX,{}_iU,t) \end{bmatrix}\right\|_{{}_iX}$$

при граничных условиях

$$V_i({}_iX(t_i^-),t_i)=$$

$$=\left.\begin{bmatrix} S_i({}_iX(t_i^-),{}_{i+1}X(t_i^+),t_i)+ \\ +V_{i+1}({}_{i+1}X(t_i^+),t_i) \end{bmatrix}\right\|_{\substack{({}_iX(t_i^-),\\ {}_{i+1}X(t_i^+),\\ t)\in B_i}}$$

Задавая *i* последовательно, уменьшая при этом значения *i* от *N*-1 до 1, и учитывая рекуррентное соотношение

$$\inf_{D_i}\left[I_i+V_{i+1}({}_{i+1}X(t_i^+),t_i)\right]=$$

$$=V_i({}_iX(t_{i\text{-}1}^+),t_{i\text{-}1})$$

получаем, что $V_1({}_1X(t_0^+),t_0)$ зависит от набора $({}_1X(t_1^-),...,{}_NX(t_{N\text{-}1}^-);\ {}_2X(t_1^+),...,{}_NX(t_{N\text{-}1}^+);t_1,...,t_N)$.

Подставляя $V_1({}_1X(t_0^+),t_0);{}_1X(t_1^-),...$ $...,{}_NX(t_{N\text{-}1}^-);{}_2X(t_1^+),...,{}_NX(t_{N\text{-}1}^+);t_1,...,t_N$ в выражение (12), доказываем соотношение (11).

Таким образом, сформулированные необходимые и достаточные условия оптимальности траектории движения составной динамической системы с произвольной схемой ветвления доказаны.

Изложению необходимых и достаточных условий оптимальности для наиболее часто встречающихся схем ветвлений траекторий СДС будут посвящены последующие исследования.

Выводы

Сформулированные необходимые, достаточные, необходимые и достаточные условия оптимальности ветвящихся траекторий детерминированных составных динамических систем описывают набор операций и правил их чередования. Приведенные и доказанные условия следует рассматривать в качестве алгоритмов, дающих описание общей методики вычислений оптимальных ветвящихся траекторий с произвольной схемой ветвлений и позволяющих находить оптимальные траектории и управление составными системами, а также проверять на оптимальность траектории составных систем, полученные другими способами.

Список литературы

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. – Новосибирск: Наука, 1987. – 226 с.

2. Лисенко О.І., Тачиніна О.М., Чумаченко С. М. Постановка задачі застосування теорії розгалужених траєкторій для вирішення задач пошуку та рятування в зоні надзвичайних ситуацій // Технічна механіка: Міжвідомчий збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2015. – Вып. 1. – С.73-78.

3. Лисенко О. І., Тачиніна О.М. Математична постановка задачі оптимізації руху групи літаючих роботів на базі безпілотних літальних апаратів // Науковий вісник Академії муніципального управління: збірник наукових праць. – К.: АМУ, 2014. – Вип. 1(7). – С. 93-99.

4. Lysenko O. Tachinina O., Zacharchenko V., Alekseeva I. The optimal injection path of group of nanosatellite multisensor-based platforms // IEEE 4th International Conference «Methods and Systems of Navigation and Motion Control» (Kyiv, Ukraine, october 18-20, 2016).– К.: NAU, 2016. – pp. 155-158.

5. Lysenko O. Tachinina O. The scenario-based approach for control of multi-object dynamic system motion//IEEE 3rd International Conference, “Actual Problems of Unmanned Air Vehicles Developments” (Kyiv, Ukraine, october 13-15, 2015).– К.: NAU, 2015. – pp. 305-309.

6. Sage A., *White* Ch. C. Optimum Systems Control. Moscow, Radio and connection, 1982, 392 p.

7. Брайсон А., Хо Ю–Ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир.– 1972, 554 с.

Статью представлено в редакцию 15.09.2017