УДК 519.863

Шевченко В. Л., канд. техн. наук

МЕТОД АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Національний науково-дослідний центр оборонних технологій і воєнної безпеки України

Запропоновано метод отримання аналітичного рішення оптимізаційної задачі на підставі достатніх умов оптимальності В. Ф. Кротова для функціоналів, що лінійно залежать від управління та поліномів від фазових координат з нестаціонарними коефіцієнтами.

Сучасні системи підтримки управлінських рішень повинні мати можливості оптимізаційного моделювання. Постановка задачі оптимізації вимагає від користувача певної кваліфікації. Керівник знає, яку задачу треба вирішити. Аналітик знає як. Звичайно керівник формулює задачу аналітику. Останній її переосмислює та вирішує так, як він її зрозумів і повертає рішення керівнику. Основні проблеми у цьому процесі: втрати часу на постановку задачі аналітику, втрата аналітиком деяких нюансів при постановці задачі, неочевидність для керівника процесу оптимізації та, як слідство, недовіра до результатів. Крім того, часто керівник не може повністю сформулювати постановку задачі. Постановка має дозріти у результаті пробних рішень. Така ситуація робить актуальною задачу створення в складі систем підтримки управлінських рішень оптимізаційних моделюючих систем, які дозволяють з відносно невеликими працевтратами в короткий термін моделювати процеси розвитку та знаходити оптимальні рішення для багатьох варіантів постановок задач [1].

Одним із розповсюджених методів розв'язання оптимізаційних задач є метод достатніх умов оптимальності В. Ф. Кротова [2, 3, 4, 5]. Його перевагою є спроможність поглинати в себе інші методи оптимізації динамічних процесів. В багатьох задачах оптимізації процесів розвитку функція управління має лінійний вигляд. Для управління у вигляді u відома процедура застосування методу достатніх умов оптимальності В. Ф. Кротова [4]. Для функції управління виду $W(t,x,u)$ модифікація процедури виконана автором [1]. Для збільшення прозорості та прискорення розв'язання оптимізаційних задач, важлива та актуальна можливість знаходження аналітичного рішення. Щоб вияснити, чи має конкретна практична задача аналітичне рішення, часто приходиться розв'язувати її до кінця, тобто витрачати багато часу. Актуальним є виявлення класів оптимізаційних задач, для яких можливе аналітичне рішення методом достатніх умов оптимальності В. Ф. Кротова.

Метою статті є виявлення класів оптимізаційних задач для функціоналів, що лінійно включають функцію управління, для яких можливо аналітичне розв'язання оптимізаційної задачі методом достатніх умов оптимальності В.Ф. Кротова.

Постановка задачі.

Динамічна модель об'єкту та функціонал якості задані у вигляді [1]

$$\dot{x} = f(t,x,u), \qquad (1)$$

$$I = \int_0^T f^0(t,x,u)dt \to \min,$$

$$(x(t),u(t)) \in V^t,\ t \in [0,T], \qquad (2)$$

де t – час ($t \in [0,T]$, $T = const$); x – фазові координати $x \in E^1$; u – управління $u \in E^1$, $f(t,x,u)$, $f^0(t,x,u)$ – деякі функції. Тут та надалі, компоненти, що відносяться до функціоналу якості позначаємо верхнім індексом "^{0}". Обмеження задані у вигляді $(x(t),u(t)) \in V^t$, $t \in [0,T]$.

Сформулюємо задачу оптимального управління: знайти на проміжку часу $t \in [0,T]$ такі допустимі функції $x(t)$, $u(t)$, котрі в кожний момент часу задовольняють обмеженням $(x(t),u(t))\in V^t$, $\dot{x}=f(t,x,u)$ і переводять об'єкт (1) зі стану $x(0)=x_0$ до стану $x(T)=x_1$, забезпечуючи мінімум функціоналу (2).

Сформулюємо достатні умови оптимальності описаного процесу [1, 4]: для того, щоб допустимий процес, що задовольняє обмеженню $(x(t),u(t))\in V^t$, $t\in[0,T]$ був оптимальним $(\bar{x}(t),\bar{u}(t))$, $t\in[0,T]$, достатньо щоб він задовольняв умовам:

$$R(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))=\max_{\substack{(x,u)\in V^t\\ t\in[0,T]}} R(t,x,u), \qquad (3)$$

де

$$R(t,x,u)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot f(t,x,u)-f^0(t,x,u). \quad (4)$$

Припускаємо, що допоміжна функція $\varphi(t,x)$ підібрана так, що вона має безперервні часні похідні по всіх аргументах, що екстремум $R(t,x)$ існує, що точка екстремуму належить внутрішній області обмеження V^t та відповідні функції в (1-2) задані у вигляді

$$f(t,x,u)=P(t,x)+Q(t,x)\cdot W(t,x,u), \quad (5)$$

$$f^0(t,x,u)=P^0(t,x)+Q^0(t,x)\cdot W(t,x,u). (6)$$

Тоді, необхідною умовою максимуму $R(t,x)$ буде [1, 4]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q^0(t,x)}{Q(t,x)}\right)+ +\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^0(t,x)}{Q(t,x)}\cdot P(t,x)-P^0(t,x)\right)=0,$$

$$Q(t,x)\neq 0. \qquad (7)$$

Приклад задачі мінімізації коштів під час одночасного скорочення штату працівників та оновлення деякої його частки.

В початковий момент часу t_0 чисельність персоналу x складає $x(t_0)=x_0$. В момент t_f чисельність x має складати $x(t_f)=x_f$. Організаційно-штатні заходи щодо зміни чисельності персоналу неможливо миттєво розпочати або закінчити. Тобто, мають місце обмеження на управління, фазові координати та їх похідні. Динамічне рівняння щодо чисельності особового складу має вигляд

$$\dot{x}=k_{in}\cdot x-k_{inv}\cdot x-k_{(+)}\cdot x-k_{(-)}\cdot x-a_r, \quad (8)$$

де коефіцієнти надані у вигляді відношення певного показника до загальної чисельності персоналу: k_{in} – частка працівників, що ретельно відбираються на посади та успішно витримують випробувальний строк, k_{inv} – частка звільняємих працівників, що не залежить від зусиль керівництва установи, $k_{(+)}$, $k_{(-)}$ – звільнення персоналу у зв'язку з організаційно – штатними заходами, $k_{(+)}$ частка персоналу, що бажають працювати якщо організаційно – штатний захід буде відмінено, $k_{(-)}$ – частка персоналу, що звільняться, якщо організаційно-штатний захід розпочнеться незалежно від можливої відміни останнього, a_r – інші складові звільнення персоналу, що не залежать від його загальної кількості.

В певних соціально-економічних умовах всі перелічені коефіцієнти можуть змінюватись лише в жорстко визначених межах, оскільки як надзвичайно швидке зростання, так і надзвичайно швидке зменшення чисельності неможливе завдяки обмеженням на економічні ресурси та небезпеку соціально-економічних потрясінь. Вартість утримання персоналу в одиницю часу дорівнює

$$Cs_{Personnel}=Cs_{Salary}\cdot x+Cs_{Equip}\cdot x+ +Cs_{Train}\cdot x=(Cs_{Salary}+Cs_{Equip}+Cs_{Train})\cdot x= =Cs\cdot x,$$

$$Cs=Cs_{Salary}+Cs_{Equip}+Cs_{Train},$$

де Cs_{Salary}, Cs_{Equip}, Cs_{Train} – відповідно, вартості грошового, матеріального забезпечення та витрат на навчання (перепідготовку), в розрахунку на одного працівника в одиницю часу. Задачу мінімізації грошових витрат при заданому рівні ефекту від діяльності персоналу можна записати у наступному вигляді

$$Ef_{Personnel}(t,x)\geq Ef_{Personnel\_зад}(t),$$

$$I=\int_{t_0}^{t_f} Cs\cdot x(t)\,dt\rightarrow\min, \qquad (10)$$

де $Ef_{Personnel}(t,x)$, $Ef_{Personnel\_зад}(t)$ – поточний та заданий рівні ефекту діяльності персоналу.

Якщо в якості управління обрати $u = k_{(+)}$ або $u = k_{(+)} + k_{(-)}$, то після групування коефіцієнтів рівняння (8) може бути представлено у вигляді

$$\dot{x} = u \cdot x - b \cdot x - a, \qquad (11)$$

де b, a – постійні коефіцієнти, u – управління.

Наведений приклад та досвід автора [6] свідчить, що для багатьох задач стратегічного планування, функції $P(t,x)$, $Q(t,x)$, $P^0(t,x)$, $Q^0(t,x)$ можуть бути задані у вигляді поліномів

$$F(t,x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \cdot x^i, \qquad (12)$$

де $a_i(t)$ – деякі функції часу.

Знаходження управління $\overline{u}(t)$ на підставі відомої $\overline{x}(t)$ розглянуто у [1]. Знаходження аналітичного розв'язання $\overline{x}(t)$ рівняння (7) для функцій $P(t,x)$, $Q(t,x)$, $P^0(t,x)$, $Q^0(t,x)$ виду (12) стає гарантовано можливим, якщо після підстановки (12) в (7) та виконання перетворень отримуємо поліном, порядок $n_{dR/dt}$ якого відносно x дорівнює 1 або 2. В першому випадку, для отримання виразу $\overline{x}(t)$ достатньо перегрупувати члени, у другому – розв'язати квадратне рівняння. Для $n_{dR/dt} > 2$ можна використовувати чисельні методи.

Знайдемо умови, за якими $n_{dR/dt}$ не перевищує завданого $n_{завд}$. Для цього перетворимо вираз (7). Для спрощення запису опустимо аргументи функцій Q^0, Q, P^0, P

$$\frac{\partial Q^0}{\partial t} \cdot Q - \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot Q^0 + \frac{\partial Q^0}{\partial x} \cdot P \cdot Q + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot Q^0 \cdot Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot P \cdot Q^0 - \frac{\partial P^0}{\partial x} \cdot Q^2 = 0. \qquad (13)$$

Для забезпечення $n_{dR/dt} \le n_{завд}$ необхідно, щоб порядок жодної з адитивних складових $n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$ не перевищував $n_{завд}$. Аналіз складових відобразимо у таблиці 1.

Таблиця 1.

Аналіз складових диференційного рівняння (13) Варіант	В1.1.1	В1.1.2	В1.2.1	В.1.2.2	В.1.2.3
$n_{dR/dt}$	1	1	2	2	2
Складові виразу (13)					
$\frac{\partial Q^0}{\partial t} \cdot Q$	0,1,..,..	1,0,..,..	2,0,..,..	0,2,..,..	1,1,..,..
$\frac{\partial Q}{\partial t} \cdot Q^0$	0,1,..,..	1,0,..,..	2,0,..,..	0,2,..,..	1,1,..,..
$\frac{\partial Q^0}{\partial x} \cdot P \cdot Q$	0,1,..,0	1,0,..,1	2,0,..,1	0,2,..,0	1,1,..,1
$\frac{\partial P}{\partial x} \cdot Q^0 \cdot Q$	0,1,..,1	1,0,..,1	2,0,..,1	0,2,..,1	1,1,..,1
$\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot P \cdot Q^0$	0,1,..,1	1,0,..,0	2,0,..,0	0,2,..,1	1,1,..,1
$\frac{\partial P^0}{\partial x} \cdot Q^2$	0,1,0,0	1,0,1,0	2,0,3,0	0,2,0,0	1,1,1,1
$n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$	0,1,0,0	1,0,1,0	2,0,3,0	0,2,0,0	1,1,1,1

В першій колонці вказані адитивні складові, що підляґають аналізу. В основному полі вказані максимальні порядки $n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$ функцій Q^0, Q, P^0, P по мірі їх визначення в ході аналізу відповідних адитивних складових виразу (13). У кінцевому рядку вказані максимально можливі $n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$ з урахуванням всіх розглянутих обмежень. При цьому зі всіх $n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$ в колонці основного поля має обиратись найменше (в таблиці вказано стрілками).

Розглянемо можливі способи спрощення (13).

Припустимо $Q = const$. Тоді $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $n_Q = 0$. Перетворюємо (13), виносимо Q за скобку та скорочуємо вираз

$$\frac{\partial Q^0}{\partial t} + \frac{\partial Q^0}{\partial x} \cdot P + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot Q^0 - \frac{\partial P^0}{\partial x} \cdot Q = 0. \quad (15)$$

Аналогічно викладеному вище, з урахуванням $n_Q = 0$, складаємо таблицю 2 аналізу складових виразу (15)

Таблиця 2.

Аналіз складових диференційного рівняння (15)

Варіант	B2.1.1	B2.1.2	B2.2.1	B.2.2.2	B.2.2.3
$n_{dR/dt}$	1	1	2	2	2
Припущення $n_Q = 0$	..,0,..,..	..,0,..,..	..,0,..,..	..,0,..,..	..,0,..,..
Складові виразу (15)					
$\frac{\partial P}{\partial x} \cdot Q^0$	1,0,..,1	0,0,..,2	2,0,..,1	1,0,..,2	0,0,..,3
$\frac{\partial Q^0}{\partial t} + \frac{\partial Q^0}{\partial x} \cdot P$	1,0,..,1	0,0,..,2	2,0,..,1	1,0,..,2	0,0,..,3
$\frac{\partial P^0}{\partial x} \cdot Q$	1,0,2,1	0,0,2,2	2,0,3,1	1,0,3,2	0,0,3,3
$n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$	1,0,2,1	0,0,2,2	2,0,3,1	1,0,3,2	0,0,3,3
Примітка	$Q = const$	$Q = const$	$Q = const$	$Q = const$	$Q = const$

Для винесення за скобку та скорочення Q^0 припустимо, що $\frac{\partial Q^0}{\partial t} = \frac{\partial Q^0}{\partial x} = \frac{\partial P^0}{\partial x} = 0$, тобто $Q^0 = const$, $P^0 = P^0(t)$, $n_{Q^0} = n_{P^0} = 0$. Відповідне перетворення рівняння (13) та таблиця аналізу (табл. 3) приймуть вигляд

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot P = 0. \quad (16)$$

Таблиця 3.

Аналіз складових диференційного рівняння (16)

Варіант	B3.1.1	B3.1.2	B3.2.1	B.3.2.2	B.3.2.3
$n_{dR/dt}$	1	1	2	2	2
Припущення $n_{Q^0} = n_{P^0} = 0$	0,..,0,..	0,..,0,..	0,..,0,..	0,..,0,..	0,..,0,..
Складові виразу (16)					
$-\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot Q$	0,1,0,1	0,0,0,2	0,2,0,1	0,1,0,2	0,0,0,3
$\frac{\partial Q}{\partial x} \cdot P$	0,1,0,1	0,0,0,1	0,2,0,1	0,1,0,2	0,0,0,2

Варіант	В3.1.1	В3.1.2	В3.2.1	В.3.2.2	В.3.2.3
$n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$	0,1,0,1	0,0,0,1	0,2,0,1	0,1,0,2	0,0,0,2
Примітка 1	$Q^0 = const$	$Q^0 = const$	$Q^0 = const$	$Q^0 = const$	$Q^0 = const$
Примітка 2	0,1,0,1	Поглинене в В3.1.1	0,2,0,1	0,1,0,2	Поглинене в В3.2.2

Для винесення за скобку та скорочення P припустимо, що $\frac{\partial Q^0}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial P^0}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0$, тобто $Q^0 = Q^0(x)$, $Q = Q(x)$ $P^0 = P^0(t)$, $P = P(t)$, $n_{P^0} = n_P = 0$. Відповідне перетворення рівняння (13) та таблиця аналізу (табл. 4) приймуть вигляд

$$\frac{\partial Q^0}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot Q^0 = 0 . \qquad (17)$$

Таблиця 4.

Аналіз складових диференційного рівняння (17)

Варіант	В4.1.1		В4.2.1	В.4.2.2	
$n_{dR/dt}$	1		2	2	
Припущення $n_{Q^0} = n_{P^0} = 0$	..,..,0,0		..,..,0,0	..,..,0,0	
Складові виразу (17)					
$\frac{\partial Q^0}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot Q^0$	1,1,0,0		2,1,0,0	1,2,0,0	
$n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$	1,1,0,0		2,1,0,0	1,2,0,0	

Упорядкуємо показники $n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$ за всіма варіантами (табл. 5).

Таблиця 5.

Результати упорядкування показників $n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$ за всіма варіантами

Варіант	n	$n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$	Примітки
В2.1.2	1	0,0,2,2	$Q = const$
В1.1.1	1	0,1,0,0	
В3.1.1	1	0,1,0,1	$Q^0 = const$
В1.1.2	1	1,0,1,0	
В2.1.1	1	1,0,2,1	$Q = const$
В4.1.1	1	1,1,0,0	
В2.2.3	2	0,0,3,3	$Q = const$
В3.2.2	2	0,1,0,2	$Q^0 = const$
В1.2.2	2	0,2,0,0	
В3.2.1	2	0,2,0,1	$Q^0 = const$
В2.2.2	2	1,0,3,2	$Q = const$
В1.2.3	2	1,1,1,1	
В4.2.2	2	1,2,0,0	
В1.2.1	2	2,0,3,0	
В2.2.1	2	2,0,3,1	$Q = const$
В4.2.1	2	2,1,0,0	

Відповідно таблиці 5, враховуючи, що для В2.1.1, В2.1.2, В2.2.1, В2.2.2, В2.2.3 - $Q = a_Q = const$, для В3.1.1, В3.2.1, В3.2.2 - $Q^0 = a_{Q0} = const$, для кожного з варіантів можна записати (5)-(6) у загальному вигляді

$$f(t,x,u) = \sum_{i=0}^{n'_P} a_{Pi}(t)\cdot x^i + W(t,x,u)\cdot \sum_{i=0}^{n'_Q} a_{Qi}(t)\cdot x^i, \quad (18)$$

$$f^0(t,x,u) = \sum_{i=0}^{n'_{P^0}} a_{P^0_i}(t)\cdot x^i + W(t,x,u)\cdot \sum_{i=0}^{n'_{Q^0}} a_{Q^0_i}(t)\cdot x^i, \quad (19)$$

де $n'_{Q^0} \le n_{Q^0}$, $n'_Q \le n_Q$, $n'_{P^0} \le n_{P^0}$, $n'_P \le n_P$.

Наприклад, для варіанту В1.2.1: ($n_{Q^0}, n_Q, n_{P^0}, n_P$)=(2,0,3,0) рівняння (5)-(6) можуть приймати вигляд

$$f(t,x,u) = a_{P0}(t) + W(t,x,u)\cdot a_{Q0}(t),$$

$$f^0(t,x,u) = \sum_{i=0}^{3} a_{P^0_i}(t)\cdot x^i + W(t,x,u)\cdot \sum_{i=0}^{2} a_{Q^0_i}(t)\cdot x^i. \quad (21)$$

Замість змінної x можуть використовуватись будь-які функції виду $x = \alpha(y)$, якщо вони мають зворотнє перетворення для аналітичного знаходження y для відомого x, наприклад, $x = e^y$; $x = \ln y$; $x = a\cdot y^2 + b\cdot y + c$, якщо $b^2 - 4ac \ge 0$ та інші. Розглянутий алгоритм також може бути використаний для будь яких нелінійних функцій $P(t,x)$, $Q(t,x)$, $P^0(t,x)$, $Q^0(t,x)$, якщо постановка задачі дозволяє розкладувати їх, наприклад, у ряд Тейлора, для перетворення у степеневі поліноми, з урахуванням обмежень таблиці 5. Також можливо застосування викладеного підходу для поліномів більших порядків, наприклад, з використанням формул Кардано, Феррарі та інших.

Таким чином, в роботі запропонований метод оцінки можливості отримання аналітичного рішення оптимізаційної задачі на підставі достатніх умов оптимальності В.Ф. Кротова для функціоналів, що містять функцію управління у лінійному вигляді, та функції степеневих поліномів від фазових координат з коефіцієнтами, що є будь-якими функціями часу.

У подальшому доцільно вивчити можливість застосування подібного алгоритму для функції $P(t,x)$, $Q(t,x)$, $P^0(t,x)$, $Q^0(t,x)$, що включають логістичні функції, та розповсюдити його на поліноми більших порядків.

Список літератури

1. *Шевченко В. Л.* Модифікація обчислювальної процедури, що реалізує метод Кротова при оптимізації техніко-економічних процесів з межею зростання // Збірник наукових праць. Вип. 5 (25). – Київ: ННДЦ ОТ і ВБ України, 2004. – (20) 117-125.

2. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. – 446 с.

3. *Гурман В. И.* Вырожденные задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

4. *Основы* теории оптимального управления: Учеб. пособие для экон. вузов /В. Ф. Кротов, Б. А. Лагоша, С. М. Лобанов и др.; Под ред. В. Ф .Кротова. – М.: Высш.шк., 1990. – 430 с.:ил.

5. *Гурман В. И.* Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

6. *Облік* оборонних ресурсів за допомогою формуляра військової частини. Частина 1. Методики опрацювання формуляра. Монографія /В. Л. Шевченко, Є. Ф. Шелест, Р. М. Федоренко та ін. /За ред. Є. Ф. Шелеста, В. Л. Шевченка. – К.: ННДЦ ОТ і ВБ України, ГШ ЗС України, 2003. – 160 с.