УДК 517.581

Рибачук Л. В.

ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ В АВТОМАТИЗОВАНИХ СИСТЕМАХ ОБРОБКИ ДАНИХ

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету

В роботі запропоновано методику обчислення значень гіпергеометричної функції, яка визначається через гамма-функції Ейлера. Досліджуються відомі варіанти подання гамма–функції Ейлера з точки зору можливості їх використання для обчислення значень цієї функції. Експериментально досліджено вплив значень параметрів, що входять в ці подання, на точність обчислюваних значень.

Актуальність. Математичне забезпечення автоматизованих систем обробки даних часто має містити блок, в якому обчислюються значення гіпергеометричної функції. Як відомо, гіпергеометричні функції відіграють велику роль в математиці, зокрема в аналізі. Розв'язки багатьох задач математичної теорії теплопровідності, математичної теорії коливань, теоретичної радіотехніки, теорії потенціалу та ін. легко узагальнюються і подаються через гіпергеометричну функцію. Так, зокрема, такі спеціальні функції, як інтеграли Лапласа, Френеля, многочлени Ерміта та Лагерра, сферичні та циліндричні функції, тощо, можуть бути отримані як частинні випадки гіпергеометричної функції [1]. Як відомо, гіпергеометрична функція визначається рядом Гаусса, члени якого подаються через гамма-функції Ейлера; отже, при обчисленні значень гіпергеометричної функції доводиться використовувати значення гамма-функцій при певних значеннях аргументів. Таким чином, гамма-функція є основоположною для побудови багатьох елементарних та спеціальних функцій.

Слід відзначити, що ейлерова гамма-функція дійсного та комплексного аргументу має самостійне значення і відіграє важливу роль як в теоретичній, так і в прикладній математиці. Однією з причин широкого застосування гамма-функції є те, що вона являє собою розв'язок одного з найпростіших різницевих рівнянь, і розв'язки великої кількості різницевих рівнянь подаються через гамма-функцію.

Існує багато таблиць, що містять табульовані значення гамма-функції Ейлера (див. напр. [2]). Проте, користування такими таблицями в багатьох випадках пов'язане з певними незручностями. Тому виникає задача про обчислення значень гіпергеометричної функції з використанням засобів сучасної обчислювальної техніки.

Постановка задачі. Дослідження методики обчислення значень гіпергеометричної функції; порівняльний аналіз способів обчислення значень гамма-функцій, розробка алгоритмів та створення програм.

Основний матеріал

Як відомо [3], гіпергеометричною функцією називають функцію, яка є розв'язком гіпергеометричного рівняння

$$z(1-z)w''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]w'-\alpha\beta w=0 \quad (1)$$

Гіпергеометрична функція може бути визначена за допомогою так званого ряду Гаусса (гіпергеометричного ряду):

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{z^n}{n!}=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^n}{n!}, \quad (2)$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція; z – комплексна змінна; $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – параметри, які приймають будь-які дійсні або комплексні значення ($\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$); $(x)_n\equiv x(x+1)\ldots(x+n-1)$.

Обчислення гіпергеометричної функції зводиться до обчислення значень гамма-функції, оскільки, як показано вище, гіпергеометрична функція подається через гіпергеометричний ряд, а члени гіпергеометричного ряду подаються через гамма-функції, аргументами яких є значення параметрів ряду. Тому розглянемо питання обчислення значень гамма-функції детальніше. В даній роботі проведено порівняльний аналіз різних способів подання гамма-функції з точки зору їх застосовності до обчислення значень гамма-функції. Експериментально досліджено вплив значень параметрів, що входять в ці подання, на точність обчислюваних значень.

З теоретико–функціональної точки зору однією з найбільш важливих особливостей гамма–функції є те, що вона не задовольняє жодному диференціальному рівнянню. З цього випливає, що гамма-функція є функцією вищого типу трансцендентності, ніж функції, що задовольняють диференціальним рівнянням, а для обчислення значень гамма-функцій доводиться використовувати різні форми її наближеного подання.

При обчисленні значень гамма-функції доводиться вирішувати такі питання:

а) за якою формулою вести обчислення, фактично мова йде про швидкість збіжності ряду;

б) вибір значення параметра θ, що входить у залишковий член ряду, через який обчислюються значення гамма-функції;

в) на якому відрізку обчислювати значення гамма-функції;

г) скільки членів ряду необхідно утримувати для забезпечення необхідної точності.

Розглянемо поставлені питання детальніше.

1. Обчислення значень гамма-функцій через ряд Стірлінга

Для обчислення значень гамма-функції через ряд Стірлінга використовувався ряд [3]

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\Big(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}-\frac{571}{2488320x^4}+\frac{163879}{209018880x^5}+\frac{5246819}{75246796800x^6}-\frac{534703531\cdot\theta}{902961561600x^7}\Big),$$
$$(0<\theta<1). \qquad (3)$$

Для обчислення значень гамма-функції за формулою (3) було складено програму на алгоритмічній мові *Pascal*. Значення гамма-функції, обчислені розробленою програмою, порівнювалися із значеннями, отриманими за допомогою математичного пакету *MathCAD*. При проведенні обчислень ставилися такі задачі:

а) вибір значення параметра θ, що входить у залишковий член ряду (3);

б) вибір відрізку, на якому обчислюється значення гамма-функції;

в) необхідна кількість членів ряду (3) для обчислення значення гамма-функції з заданою точністю.

На першому етапі обчислень утримувалося два члени ряду (3), а значення аргументу задавалися на відрізку $[1, 2]$.

Результати обчислень наводяться в таблиці 1.

Із аналізу цієї таблиці випливає, що найбільша точність досягається при значенні параметра $\theta = 0.9999$. Надалі ми фіксуємо значення цього параметра, покладаючи $\theta = 0.9999$.

Таблиця 1

Значення параметра θ	Максимальна відносна похибка δ, %
0.0001	7.78553
0.5	3.94406
0.9999	0.10259

На наступному етапі вибирався проміжок, на якому обчислювалися значення гамма-функції. Необхідність такого вибору пояснюється такими факторами.

Перш за все зауважимо, що при проведенні обчислень по попередньому пункту найбільші відносні похибки отримувалися у крайній лівій точці відрізку.

Це пояснюється тим, що формула Стірлінга, за якою проводяться обчислення, є асимптотичною, тобто її точність зростає із збільшенням значення аргументу. Враховуючи ж властивості гамма-функції, ми можемо перераховувати її значення для будь якого відрізку. В той же час обчислення гамма-функції для великих значень аргументу вимагає обчислення факторіальних добутків великих натуральних чисел, що вимагає проведення обчислень з багатьма значущими цифрами. При цьому природно постає задача вибору оптимального відрізку для обчислень.

Оскільки постановка такої задачі та її дослідження не є метою цієї роботи, обмежимось обчисленням значень гамма-функції на відрізках $[1,2]$, $[5,6]$, $[10,11]$; при цьому для порівняння обчислені значення перераховувалися для відрізку $[1,2]$. Результати обчислень наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Відрізок змінювання аргументу $[a,b]$	Максимальна відносна похибка, δ, %
$[1,2]$	0.10259
$[5,6]$	0.0117
$[10,11]$	0.00326

Із аналізу отриманих результатів випливає, що найменша відносна похибка спостерігається на відрізку $[10,11]$; отже, надалі будемо обчислювати значення гамма-функції саме на цьому відрізку.

На наступному етапі обчислень досліджувалася швидкість збіжності ряду Стірлінга. Для цього при обчисленнях утримувалися 2, 4 та 8 членів ряду. Результати обчислень наведено в таблиці 3.

Таблиця 3

Кількість членів ряду	Максимальна відносна похибка, δ, %
2	0.00326
4	1.524×10^{-6}
8	5.841×10^{-9}

Враховуючи результати проведених обчислень можна зробити висновок, що при значенні параметра $\theta=0.9999$ і обчисленні значень гамма-функції за формулою (3) на відрізку $[10,11]$, для забезпечення відносної точності обчислень 0.003 % слід утримувати 2 члени ряду, для забезпечення точності 1.5×10^{-6} % – 4 члени ряду, а для забезпечення точності 5.8×10^{-9} % – 8 членів ряду. Така висока точність є необхідною тому, що значення гамма-функції будуть використовуватися при проведенні подальших обчислень.

2. Обчислення значень гамма-функцій через розклад Стірлінга-Соніна

Для обчислення значень гамма-функції використовувався розклад Стірлінга-Соніна [4]

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\times$$
$$\times\exp\left(\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\right.$$
$$-\frac{1}{1680x^7}+\frac{1}{1188x^9}-\frac{691}{360360x^{11}}+$$
$$\left.+\frac{1}{156x^{13}}-\frac{3617}{122400(x+\theta)^{15}}\right),$$
$$(0<\theta<1). \qquad (4)$$

Для обчислення значень гамма-функції за формулою (4), було складено програму на алгоритмічній мові Pascal. Значення гамма-функції, обчислені розробленою програмою, порівнювалися із значеннями, отриманими за допомогою математичного пакету *MathCAD.* При проведенні обчислень, як і раніше, ставилися такі задачі:

а) вибір значення параметра θ, що входить у залишковий член ряду (4);

б) вибір відрізку, на якому обчислюється значення гамма-функції;

в) необхідна кількість членів ряду (4) для обчислення значення гамма-функції з заданою точністю.

На першому етапі обчислення велися за формулою Соніна [3] на відрізку $[1,2]$

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12(x+\theta)}}$$
$$(0<\theta<1). \qquad (5)$$

Результати обчислень при значеннях параметра $\theta = 0.0001$; $\theta = 0.5$; $\theta = 0.9999$ наводяться в таблиці 4.

Із аналізу таблиці випливає, що найбільша точність досягається при значеннях параметра $\theta = 0.0001$. Надалі ми фіксуємо значення цього параметра, покладаючи $\theta = 0.0001$.

Таблиця 4

Значення параметра θ	Максимальна відносна похибка δ, %
0.0001	0.22661
0.5	2.51834
0.9999	3.86269

На наступному етапі вибирався проміжок, на якому обчислювалися значення гамма-функції. Як і раніше, обчислювалися значення гамма-функції на проміжках $[1,2]$, $[5,6]$, $[10,11]$, при цьому обчислені значення перераховувалися для відрізку $[1,2]$. Результати обчислень наведено в таблиці 5.

Таблиця 5

Відрізок змінювання аргументу $[a,b]$	Максимальна відносна похибка, δ, %
$[1,2]$	0.22661
$[5,6]$	0.00216
$[10,11]$	0.00027

Із аналізу отриманих результатів випливає, що найменша відносна похибка спостерігається на відрізку $[10,11]$; отже, надалі будемо обчислювати значення гамма-функції саме на цьому відрізку.

На наступному етапі обчислень досліджувалася швидкість збіжності ряду Стірлінга-Соніна. Для цього при обчисленнях утримувалися 2, 4 та 8 членів ряду. Результати обчислень наведено в таблиці 6.

Таблиця 6

Кількість членів ряду	Максимальна відносна похибка, δ, %
2	7.794×10^{-7}
4	8.208×10^{-11}
8	6.804×10^{-13}

Враховуючи результати проведених обчислень можна зробити висновок, що при значенні параметра $\theta = 0.0001$ і обчисленні значень гамма-функції за формулою (4) на відрізку $[10,11]$ для забезпечення відносної точності обчислень 7.8×10^{-7}% слід утримувати 2 члени ряду, для забезпечення точності 8.2×10^{-11}% – 4 члени ряду, а для забезпечення точності 6.8×10^{-13} % – 8 членів ряду.

3. Обчислення значень гамма-функцій через нескінчений добуток

Для обчислення значень гамма-функції через нескінчений добуток використовувалася формула [5]

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\,e^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z}{k})e^{-\frac{z}{k}}. \qquad (6)$$

Для обчислення значень гамма-функції за формулою (6) було складено програму на алгоритмічній мові *Pascal*. Значення гамма-функції, обчислені розробленою програмою, порівнювалися із значеннями, отриманими за допомогою математичного пакету *MathCAD*. При проведенні обчислень досліджувалася швидкість збіжності ряду; значення аргументу задавалися з відрізку $[1,2]$. Результати обчислень наведено в таблиці 7.

Таблиця 7

Кількість співмножників	Максимальна відносна похибка δ, %
1 000	5.84703
10 000	0.60292
100 000	0.06048

Перш за все, відзначимо, що найбільше значення відносної похибки досягалося у крайній правій точці. Проведені обчислення показали надто повільну збіжність нескінченого добутку; отже, формула (6) для обчислення значень гамма-функції практично непридатна.

4. Обчислення значень гамма-функцій через розклад по зсунутих многочленах Чебишева

Для обчислення значень гамма-функції інколи застосовують і її розклад [6] по зсунутих многочленах Чебишева:

$$\Gamma(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n^*(x) \quad (0 \le x \le 1). \quad (7)$$

Як відомо, зсунуті многочлени Чебишева визначаються рекурентним співвідношенням

$$\mathrm{T}_{n+1}(x)=2(2x-1)\mathrm{T}_n(x)-\mathrm{T}_{n-1}(x),$$
$$\mathrm{T}_0(x)=1, \quad \mathrm{T}_1(x)=2x-1. \quad (8)$$

Перші 16 коефіцієнтів цього розкладу наведено в таблиці 8.

Для обчислення значень гамма-функції за формулою (7) було складено програму на алгоритмічній мові *Pascal*. Значення гамма-функції, обчислені розробленою програмою, порівнювалися із значеннями, отриманими з допомогою математичного пакету *MathCAD*.

Таблиця 8

n	a_n
0	0.941785597795494
1	0.004415381324841
2	0.056850436815993
3	-0.004219835396418
4	0.001326808181212
5	-0.000189302452979
6	0.000036069253274
7	-0.000006056761904
8	0.000001055629546
9	-0.000000181196736
10	0.000000031177249
11	-0.000000005354219
12	0.000000000919327
13	-0.000000000157794
14	0.000000000027079
15	-0.000000000004646

При проведенні обчислень досліджувалася швидкість збіжності ряду; значення аргументу задавалися з відрізку $[1,2]$. Результати обчислень наведено в таблиці 9.

Таблиця 9

Кількість членів розкладу	Максимальна відносна похибка, δ, %
4	0.146
8	1.157×10^{-4}
16	2.266×10^{-8}

Із аналізу таблиці 8 випливає, що коефіцієнти розкладу спадають досить швидко; так, зокрема, 16-й коефіцієнт цього розкладу має порядок $O(10^{-12})$. В той же час зростання старших коефіцієнтів зсунутих многочленів Чебишева практично компенсує високий порядок спадання коефіцієнтів розкладу. Внаслідок цього утримання 16 членів в розкладі (7) забезпечує порядок максимальної відносної похибки лише 10^{-8}. Невисокий порядок спадання членів розкладу (7) обмежує застосування цього розкладу для обчислення значень гамма-функції.

5. Обчислення значень гіпергеометричних функцій.

Розглянемо тепер обчислення значень гіпергеометричної функції, яка, як було згадано раніше, обчислюється через гіпергеометричний ряд (2).

Для забезпечення високої точності обчислення значень гіпергеометричної функції, при обчислення значень гамма–функції використовувався ряд Стірлінга–Соніна, швидкість збіжності якого є найбільшою. При цьому значення параметра θ покладалося рівним 0.0001. Враховуючи асимптотичний характер ряду Стірлінга–Соніна та можливість зсуву аргументу гамма–функції на будь який відрізок чисельної вісі, при обчисленнях аргумент зсувався на відрізок $[10, 11]$.

Для обчислення значень функції $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ було складено програму на алгоритмічній мові *Pascal*, яка дозволяє обчислювати значення гіпергеометричної функції при різних значення параметрів $\alpha,\ \beta;\ \gamma$, що визначають цю функцію, та значеннях аргументу x, $|x|<1$.

В процесі тестування розробленої програми вибиралися такі набори значень параметрів $\alpha,\ \beta;\ \gamma$, при яких гіпергеометрична функція визначає певні елементарні та спеціальні функції. При цьому порівнювалися результати обчислень цих елементарних та спеціальних функцій, отримані безпосередньо, та обчислені через гіпергеометричну функцію. Деякі результати цих обчислень наводяться нижче.

5.1. Обчислення елементарних функцій

1. Обчислення логарифмічної функції

Як відомо [1]

$$\ln(1+z)=z\,F(1,1;2;-z). \tag{9}$$

Обчислюючи праву частину цієї рівності при дійсному значенні аргументу $x=0.1$, отримуємо

$$x\,F(1,1;2;-0.1)=0.095310179804326.$$

Точне значення логарифма

$$\ln 1.1=0.095310179804325.$$

Як бачимо, відмінність спостерігається лише в 15 знаку, а відносна похибка обчислення $\delta=6.115\times10^{-13}$ %.

2. Обчислення арксинуса

Як відомо [1]

$$\arcsin z=z\,F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right). \tag{10}$$

Обчислюючи праву частину рівності (10) при дійсному значенні аргументу $x=0.2$, отримуємо

$$x\,F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};(0.2)^2\right)=$$
$$=0.201357920790331.$$

Точне значення арксинуса

$$\arcsin 0.2=0.201357920790331.$$

Як бачимо, значення співпадають, тобто відносна похибка обчислення δ=0 %.

3. Обчислення арктангенса.

Як відомо [1]

$$\operatorname{arctg} z=z\,F\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-z^2\right). \tag{11}$$

Обчислюючи праву частину рівності (11) при дійсному значенні аргументу $x=0.3$, отримуємо

$$x\,F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};-(0.3)^2\right)=$$
$$=0.291456794477867.$$

Точне значення арктангенса $\operatorname{arctg} 0.3=0.291456794477867$.

Значення співпадають, отже, відносна похибка обчислення δ=0 %.

4. Обчислення квадратного кореня

Як відомо [1]

$$(1+z)^{\nu}=F(-\nu,1;1;-z). \tag{12}$$

Обчислимо праву частину рівності (12) при дійсному значенні аргументу $x=0.1$. Нехай $\nu=0.5$, тобто обчислимо значення $\sqrt{1+x}$, матимемо

$$F(-0.5,1;1;-0.1)=1.04880884817015.$$

Точне значення даного квадратного кореня $\sqrt{1.1}=1.04880884817015$.

Значення співпадають, отже, відносна похибка обчислення δ=0 %.

5.2. Обчислення спеціальних функцій

Для ілюстрації розглянемо обчислення повних еліптичних інтегралів першого та другого роду.

1. Як відомо [1], повні еліптичні інтеграли першого роду, що задаються формулою

$$K(z)=\int_0^{\pi/2}\left(1-z^2\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}d\varphi$$

пов'язані з гіпергеометричною функцією співвідношенням

$$K(z)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;z^2\right). \tag{13}$$

Нехай $x=0.0001$, тобто обчислимо значення $K(0.0001)$. Обчислюючи

$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;(0.0001)^2\right)$ рівності (13), отримуємо

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;(0.0001)^2\right) =$$
$$1.0000000025.$$

Точне значення гіпергеометричної функції при даних значеннях параметрів:

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\ 1;(0.0001)^2\right) =$$
$$1.00002500140635.$$

Таким чином, відносна похибка обчислення $\delta = 2.5\times10^{-3}$ %.

Отже,

$$K(0.0001) = 1.57079633072189.$$

2. Повні еліптичні інтеграли другого роду, що задаються формулою [1]

$$E(z)= \int_0^{\pi/2}\left(1-z^2\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

пов'язані з гіпергеометричною функцією співвідношенням

$$E(z)=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;z^2\right). \qquad (14)$$

Нехай $x=-0.0002$, тобто обчислимо значення $E(-0.0002)$. Обчислюючи $F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;(-0.0002)^2\right)$ рівності (14), отримуємо

$$F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;(-0.0002)^2\right) = 0.99999999.$$

Точне значення гіпергеометричної функції при даних значеннях параметрів:

$$F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};\ 1;(-0.0002)^2\right) =$$
$$1.00004999812516.$$

Таким чином, відносна похибка обчислення $\delta = 5\times10^{-3}$ %.

Отже,

$$E(-0.0002) = 1.57079631108693.$$

Висновки

Враховуючи результати дослідження деяких варіантів можливого обчислення значень гіпергеометричної функції, можна зробити такі висновки.

Для обчислення значень гамма–функції, через які подаються значення гіпергеометричної функції, доцільно використовувати ряд Стірлінга–Соніна, швидкість збіжності якого є найбільшою; при цьому значення параметра θ можна покласти рівним 0.0001. Враховуючи асимптотичний характер ряду Стірлінга–Соніна та можливість зсуву аргументу гамма–функції на будь який відрізок числової вісі, доцільно при обчисленнях зсувати її аргумент на відрізок $[10, 11]$.

Для обчислення значень гіпергеометричної функції розроблено алгоритм та створено програму на алгоритмічній мові *Pascal*. Результати проведених експериментальних досліджень з використанням розробленої програми, добре узгоджуються з відомими теоретичними положеннями.

Розроблена методика, алгоритм та програма обчислення значень гіпергеометричної функції можуть бути рекомендовані для застосування при проведенні практичних обчислень.

Список літератури

1. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. – М.: Физматгиз, 1963. – 358 с.

2. *Table* of the Gamma Function for Complex Arguments. – National Bureau of Standards Applied Mathematical Series 34 Issued August 6, 1954. – 108 p.

3. *Математическая* энциклопедия (гл. ред. И. М. Виноградов). – М.: Советская энциклопедия, т.1, 1977. – 1152 с.

4. *Сонин Н. Я.* Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1954. – 244 с.

5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.– 736 с.

6. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.