УДК 62-501.5

Онищенко С. М., д-р физ.-мат. наук
Коваленко Н. П.
Сусол М. Н.

ПРИМЕНЕНИЕ ШЕСТОГО АЛГОРИТМА СИНТЕЗА СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ К НЕЛИНЕЙНЫМ ОБЬЕКТАМ

Институт электроники и систем управления Национального авиационного университета

Анализируются алгоритмы синтеза систем стабилизации из группы жесткого синтеза. Рассматривается применение шестого алгоритма к синтезу нелинейных систем стабилизации.

Введение

Синтез нелинейных систем стабилизации удобно осуществлять, применяя прямой (второй) метод Ляпунова к исходной системе n-го порядка

$$\dot{x} = A(x,t)x, \quad x(t_0) = x_0 \text{ ,} \qquad (1)$$

представляемой в псевдолинейной форме и замкнутой С-управлением [2]

$$u \triangleq -C(x,t)x \in \mathrm{U} \subset \mathrm{R}_m, \qquad m \leq n, \quad (2)$$

из некоторого выпуклого множества U в R_m. Тогда, используя две положительно определенные квадратичные формы с матрицами коэффициентов D и Q, причем D,Q:{$D(t)$, $Q(x,t)$ / $D^T=D$: $\mathrm{T} \to \mathrm{R}_{n\times n}$, $D > 0$ $\forall t \in T$; $Q^T = Q$: $\mathrm{R}_n \times \mathrm{T} \to \mathrm{R}_{n\times n}$, $Q > 0$ $\forall x \in \Omega \subset \mathrm{R}_n$, $\forall t \in \mathrm{T}$}, можно обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\dot{x} = [A(x,t) - B(x,t)C(x,t)]x, x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

если путем синтеза матрицы управления C в (3) гарантировать справедливость матричного уравнения Ляпунова

$$\dot{D} + D(A - BC) + (A - BC)^T D = -Q \quad (4)$$

Здесь A: $\mathrm{R}_n \times \mathrm{T} \to \mathrm{R}_{n\times n}$, B: $\mathrm{R}_n \times \mathrm{T} \to \mathrm{R}_{n\times m}$, $m \leq n$, – известные матрицы; C: $\mathrm{R}_n \times \mathrm{T} \to \mathrm{R}_{m\times n}$ – подлежит определению; $x \in \Omega \subset \mathrm{R}_n$ – вектор состояния системы (1) из ее области определения Ω; точкой обозначена операция дифференцирования по времени $t \in \mathrm{T} = [t_0, \infty) \subset R_1$; $\triangleq$ означает равно по определению.

Однако задача стабилизации системы (3) на основании уравнения (4) оказывается плохо обусловленной, поскольку из одного уравнения Ляпунова (4) необходимо определить две матрицы: C и D.

Тем не менее, проблему можно решать несколькими путями:

- можно предварительно задать матрицу D, как в задачах анализа устойчивости (это направление получило название монотонной стабилизации [3]);
- матрицу D можно найти как решение матричного уравнения Ляпунова

$$\dot{D} + DA_0 + A_0^T D = -Q, \qquad (5)$$

записанного для линейного стационарного приближения

$$\dot{x} = A_0 x, \quad x(t_0) = x_0, \qquad (6)$$

исходной замкнутой системы (1) (это направление реализуемо лишь для асимптотически устойчивой системы (6), когда $\forall Q$ всегда $\exists$ $D^T=D > 0$), после чего найденную таким путем матрицу D можно использовать как заданную в уравнении (4);

- можно априори выразить матрицу C мультипликативно через матрицу D в виде $C \triangleq KD$; этот подход приводит к замене уравнения Ляпунова (4) матричным уравнением Риккати и позволяет решать задачи оптимальной стабилизации [2];
- наконец, если зафиксировать структуру матрицы D мультипликативной параметризацией любой невырожденной блочно-треугольной матрицей D_* (для определенности нижней) в виде

$$D \triangleq D_* D_*^T \qquad (7)$$

или соответственно

$$D \triangleq D_*^T D_* \qquad (8)$$

при условии

$$\det D_* \neq 0 \text{ ,} \qquad (9)$$

когда обеспечивается ее симметричность и положительная определенность [4], а также уменьшается количество ее независимых блоков, требующих непосредственной идентификации из уравнения (4), то задача стабилизации нелинейных систем и в этом случае оказывается разрешаемой; это направление получило название жесткой стабилизации [5].

Постановка задачи

Аналитическая реализация методов прямого синтеза стабилизируемых систем зависит от свойств матрицы B. В случае

$$B \in R_{n\times n}, \qquad \operatorname{rank} B = n, \qquad \exists B^{-1} \quad (10)$$

когда в замкнутой системе (3) матрица B не особая и имеет обратную, решение задач прямого синтеза систем стабилизации удобно осуществлять методом кососимметризации [6] уравнения Ляпунова (4), когда оно переписывается в виде

$$\begin{aligned}&[\tfrac{1}{2}(\dot{D}+Q)+D(A-BC)]+\\&+[\tfrac{1}{2}(\dot{D}+Q)+D(A-BC)]^{T}=0,\end{aligned} \quad (11)$$

и затем удовлетворяется произвольной кососимметричной матрицей

$$S+S^{T}=0, \quad (12)$$

так что

$$\frac{1}{2}S^{T} \underline{\Delta} \frac{1}{2}(\dot{D}+Q)+D(A-BC). \quad (13)$$

В результате из (13) легко получается с учетом (10) выражение искомой матрицы управления. Имеем

$$C=B^{-1}[A+\frac{1}{2}D^{-1}(\dot{D}+Q+S)], \quad (14)$$

причем управление (14) обеспечивает стабилизацию любой нелинейной системы, даже априори неустойчивой, без каких бы то ни было условий стабилизируемости.

Задача значительно усложняется для матрицы B вида

$$\mathrm{B} \underline{\Delta} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

При этом она обязательно должна подчиняться условию

$$B_2 \in R_{m\times m},\ \operatorname{rank} B_2 = m < n,\ \exists B_2^{-1}, \quad (16)$$

которое свидетельствует о том, что матрица B имеет максимально возможный ранг, равный размерности управления m.

Структура (15) матрицы B определяет следующее представление матриц A, C, Q и D_*:

$$\mathrm{A} \underline{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (17а)$$

$$\mathrm{C} \underline{\Delta} [C_1, C_2], \quad (17б)$$

$$\mathrm{Q} \underline{\Delta} \begin{bmatrix} Q_{11}^{*} & Q_{12}^{*} \\ Q_{12}^{*T} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad (17в)$$

$$D_* \underline{\Delta} \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ D_{12}^{T} & D_2 \end{bmatrix}, \det D_i \neq 0, \mathrm{i}=1,2, \quad (17г)$$

Из (7) с учетом (17г) легко получается "нижняя" матрица D

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{11}D_{12} \\ D_{12}^{T}D_{11} & D_{12}^{T}D_{11}D_{12}+D_{22} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

если обозначить

$$\mathrm{D}_{11} \underline{\Delta} D_i D_i^{T},\ \mathrm{i}=1,2. \quad (19)$$

Тогда аналогично для верхней блочно-треугольной матрицы

$$D_*^{T} \underline{\Delta} \begin{bmatrix} D_1 & D_{21}^{T}D_2 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \det D_i \neq 0, \mathrm{i}=1,2, \quad (20)$$

учитывая (19), будем иметь "верхнюю" матрицу D вида

$$D = \begin{bmatrix} D_{11}+D_{21}^{T}D_{22}D_{21} & D_{21}^{T}D_{22} \\ D_{22}D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

В результате уравнение Ляпунова (4) для нижней матрицы D из (18) будет эквивалентно трем матричным уравнениям

$$\begin{aligned}&\dot{D}_{11}+D_{11}({}^{1}A_{11}-{}^{1}BC_{1})+\\&+({}^{1}A_{11}-{}^{1}BC_{1})^{T}D_{11}=-Q^{*}_{11},\end{aligned} \quad (22а)$$

$$\begin{aligned}&\dot{D}_{22}+D_{22}[{}^{1}A_{22}-B_2(C_2-C_1D_{12})]+\\&+[{}^{1}A_{22}-B_2(C_2-C_1D_{12})]^{T}D_{22}=\\&=-Q^{*}_{22}+Q^{*T}_{12}D_{12}+D_{12}^{T}Q^{*}_{12}-D_{12}^{T}Q^{*}_{11}D_{12},\end{aligned} \quad (22б)$$

$$\begin{aligned}&D_{11}\dot{D}_{12}+D_{11}[{}^{1}A_{12}-{}^{1}A_{11}D_{12}-{}^{1}B(C_2-C_1D_{12})]+\\&+(A_{21}-B_2C_1)^{T}D_{22}=-Q^{*}_{12}+Q^{*}_{11}D_{12},\end{aligned} \quad (22в)$$

относительно блоков матриц (17а-в), а для верхней матрицы $\dot{D}$ из (21) будем иметь соответственно

$$\begin{aligned}&\dot{D}_{11}+D_{11}[\widetilde{A}_{11}-B_1(C_1-C_2D_{21})]+\\&+[\widetilde{A}_{11}-B_1(C_1-C_2D_{21})]^T D_{11}=\\&=-Q^*_{11}+D_{21}^T Q^*_{21}+Q^{*T}_{21}D_{21}-D_{21}^T Q^*_{22}D_{21},\end{aligned}\tag{23а}$$

$$\begin{aligned}&\dot{D}_{22}+D_{22}(\widetilde{A}_{22}-\widetilde{B}_2C_2)+\\&+(\widetilde{A}_{22}-\widetilde{B}_2C_2)^T D_{22}=-Q^*_{22},\end{aligned}\tag{23б}$$

$$\begin{aligned}&D_{22}\dot{D}_{21}+D_{22}[\widetilde{A}_{21}+D_{21}\widetilde{A}_{11}-\widetilde{B}_2(C_1-C_2D_{21})]+\\&+(A_{12}-B_1C_2)^T D_{11}=-Q^*_{21}+Q^*_{22}D_{21},\end{aligned}\tag{23в}$$

с учетом обозначений

$$\begin{aligned}&{}^1A_{11}\underline{\Delta}A_{11}+D_{12}A_{21},\ {}^1A_{12}\underline{\Delta}A_{12}+D_{12}A_{22},\\&{}^1A_{22}\underline{\Delta}A_{22}-A_{21}D_{12},\ {}^1B\underline{\Delta}B_1+D_{12}B_2,\\&\widetilde{A}_{11}\underline{\Delta}A_{11}-A_{12}D_{21},\ \widetilde{A}_{21}\underline{\Delta}A_{21}-A_{22}D_{21},\\&\widetilde{A}_{22}\underline{\Delta}A_{22}+D_{21}A_{12},\ \widetilde{B}_2\underline{\Delta}B_2+D_{21}B_1.\end{aligned}\tag{24}$$

Отметим, что системы (22) и (23) состоят из трех уравнений каждая, предназначенных для определения двух искомых блоков C_1 и C_2 матрицы управления (17б) из (2), причем, поскольку третьи уравнения обеих систем зависят от обоих этих блоков, что позволяет формально выражать их один через другой, то все уравнения каждой системы могут считаться равноправными, так что из двух любых в каждой системе можно определить C_1 и C_2, а оставшееся после исключения в нем матрицы управления интерпретировать как условие стабилизируемости. Подобный подход сводит решение задачи стабилизации к 6-ти различным алгоритмам как для системы (22), так и для системы (23), которые удобно представить таблицей.

Таблица 1. Алгоритмы синтеза систем стабилизации

Алгоритмы / Уравнения	1	2	3	4	5	6
(а)	C_1	C_1	*	C_2	C_2	*
(б)	C_2	*	C_1	C_1	*	C_2
(в)	*	C_2	C_2	*	C_1	C_1

Из табл. 1 видно, какие соотношения (22) или (23) используются в каждом из шести алгоритмов для определения блоков C_1 и C_2 матрицы управления, а какие являются условиями стабилизируемости (они обозначены звездочкой).

Цель работы состоит в дополнительном анализе 1-го и 6-го алгоритмов таблицы.

Анализ 1-го алгоритма жесткого синтеза систем стабилизации для верхней матрицы D

В работе [7] исследовалась реализация 1-го алгоритма табл.1 для стабилизации нелинейных систем с использованием нижней матрицы D и уравнений (22).

Рассмотрим особенности реализации этого алгоритма для верхней матрицы D и уравнений (23).

Сначала упростим правые части системы (23), положив в ней

$$\begin{aligned}&Q^*_{21}\ \underline{\Delta}\ Q^*_{22}D_{21},\ Q^*_{22}\underline{\Delta}D_{22}Q_{22}D_{22},\\&Q^*_{11}\ \underline{\Delta}\ Q_{11}+D_{21}^T Q^*_{22}D_{21}\ ,\end{aligned}\tag{25}$$

а также

$$D\ \underline{\Delta}\ const\,,\tag{26}$$

после чего уравнения (23) примут вид

$$\begin{aligned}&D_{11}[\widetilde{A}_{11}-B_1(C_1-C_2D_{21})]+\\&+[\widetilde{A}_{11}-B_1(C_1-C_2D_{21})]^T D_{11}=-Q_{11},\end{aligned}\tag{27а}$$

$$\begin{aligned}&D_{22}(\widetilde{A}_{22}-\widetilde{B}_2C_2)+\\&+(\widetilde{A}_{22}-\widetilde{B}_2C_2)^T D_{22}=-D_{22}Q_{22}D_{22},\end{aligned}\tag{27б}$$

$$\begin{aligned}&D_{22}[\widetilde{A}_{21}+D_{21}\widetilde{A}_{11}-\widetilde{B}_2(C_1-C_2D_{21})]+\\&+(A_{12}-B_1C_2)^T D_{11}=0.\end{aligned}\tag{27в}$$

Поскольку при условии (16) для матрицы $\widetilde{B}_2$ из (24) будет всегда существовать обратная (произвольный вид матрицы D_{21} как по структуре, так и по величине позволяет обеспечить это ее свойство при любой известной матрице B_1), то применяя метод кососимметризации в виде соотношений (11)-(14) к уравнению (27б), можно получить матрицу C_2 непосредственно в виде

$$C_2=\widetilde{B}_2^{-1}[\widetilde{A}_{22}+\frac{1}{2}(Q_{22}+S_{22})D_{22}]\,.\tag{28}$$

Исключая ее далее в уравнении (27а), перепишем его, вводя обозначения

$$\begin{aligned}&{}^1\widetilde{A}_{11}\underline{\Delta}\ \widetilde{A}_{11}+\widetilde{B}_*[\widetilde{A}_{22}+\\&+\frac{1}{2}(Q_{22}+S_{22})D_{22}]D_{21},\qquad \widetilde{B}_*=B_1\widetilde{B}_2^{-1},\end{aligned}\tag{29}$$

следующим образом:

$$D_{11}({}^1\widetilde{A}_{11}-B_1C_1)+({}^1\widetilde{A}_{11}-B_1C_1)^T D_{11}=-Q_{11}, \quad (30)$$

после чего получим для определения матрицы C_1 из (30) рекуррентную процедуру, детально описанную в [7]. К сожалению, ее реализация будет гораздо более трудоемкой, а структура более сложной из-за громоздкого обозначения (29), содержащего Q_{22}.

Анализ 6-го алгоритма для верхней матрицы D

В работе [8] рассматривался 6-й алгоритм с использованием верхней матрицы D для синтеза линейных систем стабилизации, канонических по управлению.

Покажем, что его можно успешно применить для синтеза нелинейных систем стабилизации.

Обратимся к уравнениям системы (23), которые с учетом условий (25) и

$$D_{11}\underline{\Delta}\ const,\ D_{22}\underline{\Delta}\ const, \quad (31)$$

запишутся в виде

$$\begin{gathered}D_{11}[\widetilde{A}_{11}-B_1(C_1-C_2D_{21})]+\\+[\widetilde{A}_{11}-B_1(C_1-C_2D_{21})]^T D_{11}=-Q_{11},\end{gathered} \quad (32а)$$

$$\begin{gathered}D_{22}(\widetilde{A}_{22}-\widetilde{B}_2C_2)+(\widetilde{A}_{22}-\widetilde{B}_2C_2)^T D_{22}=\\=-D_{22}Q_{22}D_{22},\end{gathered} \quad (32б)$$

$$\begin{gathered}D_{22}\dot{D}_{21}+D_{22}[\widetilde{A}_{21}+D_{21}\widetilde{A}_{11}-\widetilde{B}_2(C_1-\\-C_2D_{21})]+(A_{12}-B_1C_2)^T D_{11}=0.\end{gathered} \quad (32в)$$

Применим к уравнению (32б) метод кососимметризации и найдем матрицу C_1 в явном виде. Она будет определяться выражением (28).

Подставим его в уравнение (32в) и после несложных преобразований выразим из него C_1 в виде

$$\begin{gathered}C_1=\widetilde{B}_2^{-1}[\hat{A}_{21}+\frac{1}{2}(Q_{22}+S_{22})D_{22}D_{21}-\\-\frac{1}{2}(Q_{22}-S_{22})\widetilde{B}_*^T D_{11}],\end{gathered} \quad (33)$$

где

$$\begin{gathered}\hat{A}_{21}\underline{\Delta}\widetilde{A}_{21}+D_{21}\widetilde{A}_{11}+\widetilde{A}_{22}D_{21}+\\+D_{22}^{-1}(A_{12}^T-\widetilde{A}^T{}_{22}\widetilde{B}^T{}_*)D_{11}+\dot{D}_{21},\end{gathered} \quad (34)$$

Исключим матрицы C_1 и C_2 в уравнении (32а), используя их выражения (28), (33). В результате получим с учетом обозначения (34) условие стабилизируемости

$$\begin{gathered}D_{11}[\widetilde{A}_{11}-\widetilde{B}_*(\hat{A}_{21}-\widetilde{A}_{22}D_{21})]+\\+[\widetilde{A}_{11}-\widetilde{B}_*(\hat{A}_{21}-\widetilde{A}_{22}D_{21})]^T D_{11}=-Q_{11}-\\-D_{11}\widetilde{B}_*Q_{22}\widetilde{B}_*^T D_{11}.\end{gathered} \quad (35)$$

Анализ 6-го алгоритма для нижней матрицы D

Упростим правые части системы (22) положив в ней

$$\begin{gathered}Q_{11}^*\underline{\Delta}Q_{11},\qquad Q^*{}_{12}\underline{\Delta}\,Q^*{}_{11}D_{12},\\ Q^*{}_{22}\underline{\Delta}\,D_{22}Q_{22}D_{22}+D_{12}^TQ^*{}_{11}D_{12},\end{gathered} \quad (36)$$

а также

$$D=\text{const}, \quad (37)$$

после чего уравнения (22) примут вид

$$\begin{gathered}D_{11}({}^1A_{11}-{}^1BC_1)+\\+({}^1A_{11}-{}^1BC_1)^T D_{11}=-Q_{11},\end{gathered} \quad (38а)$$

$$\begin{gathered}D_{22}[{}^1A_{22}-B_2(C_2-C_1D_{12})]+\\+[{}^1A_{22}-B_2(C_2-C_1D_{12})]^T D_{22}=-Q_{22},\end{gathered} \quad (38б)$$

$$\begin{gathered}D_{11}[{}^1A_{12}-{}^1A_{11}D_{12}-{}^1B(C_2-C_1D_{12})]+\\+(A_{21}-B_2C_1)^T D_{22}=0.\end{gathered} \quad (38в)$$

Применим к уравнению (38б) метод кососимметризации. Тогда с учетом процедуры (11) – (14) и условия (16) получим выражение

$$C_2-C_1D_{12}=B_2^{-1}[{}^1A_{22}+\frac{1}{2}(Q_{22}+S_{22})D_{22}]. \quad (39)$$

Подставим его в уравнение (38в) и определим C_1 в явном виде. Будем иметь

$$C_1=B_2^{-1}[{}^1\hat{A}_{21}-\frac{1}{2}(Q_{22}-S_{22})\hat{B}_*^T D_{11}]. \quad (40)$$

В равенстве (40) обозначено

$$\begin{gathered}{}^1\hat{A}_{21}\underline{\Delta}A_{21}+D_{22}^{-1}(A_{12}^T-D_{12}^TA_{11}^T-{}^1A_{22}^TB_*^T)D_{11},\\ \hat{B}_*\underline{\Delta}B_*+D_{12},\qquad B_*\underline{\Delta}B_1B_2^{-1}.\end{gathered} \quad (41)$$

Если исключить C_1 в уравнении (38а), используя (40), (41), то условие стабилизируемости примет вид

$$\begin{gathered}D_{11}({}^1A_{11}-\hat{B}_*{}^1\hat{A}_{21})+({}^1A_{11}-\hat{B}_*{}^1\hat{A}_{21})D_{11}=\\=-Q_{11}-D_{11}\hat{B}_*Q_{22}\hat{B}_*^T D_{11},\end{gathered} \quad (42)$$

а матрица C_2 из (39) определится выражением

$$\begin{gathered}C_2=B_2^{-1}[{}^1A_{22}+{}^1\hat{A}_{21}D_{12}+\frac{1}{2}(Q_{22}+S_{22})D_{22}-\\-\frac{1}{2}(Q_{22}-S_{22})\hat{B}_*^T D_{11}D_{12}].\end{gathered} \quad (43)$$

Выводы

Выполненные исследования позволяет утверждать следующее:

- по 1-му алгоритму – его реализация возможна как с "нижней", так и с "верхней" матрицей D, причем в обоих случаях синтез матрицы управления С осуществляется рекуррентной процедурой на l этапах и сопровождается (l-1)-м условием стабилизируемости, но в случае верхней матрицы D процесс синтеза оказывается более громоздким;

- по 6-му алгоритму – его можно использовать не только для синтеза линейных нестационарных систем, канонических по управлению [9], когда структура матрицы управления C синтезируется на первом этапе, а на последующих этапах рекуррентной процедурой обеспечивается выполнение условия стабилизируемости и идентификация блоков матрицы C, причем на каждом этапе приходится приводить соответствующую подсистему к каноническому виду по управлению (с обязательным обратным переходом в конечном результате), но и для синтеза нелинейных систем стабилизации как с "нижней" матрицей D коэффициентов квадратичной формы с параметризацией нижней блочно-треугольной матрицей, так и с "верхней" матрицей D. При этом для верхней матрицы D матрица C_1 оказывается более сложной структуры, чем матрица C_2, а для нижней матрицы D – наоборот: выражение (39) для матрицы C_1проще выражения (42) для матрицы C_2. Что же касается условий стабилизируемости, то в отличие от 1-го алгоритма, где они сводятся к условиям Сильвестра положительной определенности l вспомогательных матриц m-го порядка [9], в 6-м алгоритме при обеих матрицах D условие стабилизируемости сводится к условиям положительной определенности некоторой матрицы (n-m)-го порядка. Их реализация требует дополнительных исследований.

Список литературы

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 270 с.

2. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высш. шк., 1989. – 447 с.

3. *Зубер И. Е.* О монотонной стабилизации линейных импульсных систем регулирования // Автоматика и телемеханика. – 1968.– №3. – С. 50-60.

4. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применение. – М.: Мир, 1980. – 454 с.

5. *Онищенко С. М.* Жесткая монотонная стабилизация нелинейных систем прямым методом Ляпунова // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1991. – №4. – С. 35-38.

6. *Онищенко С. М.* Модальный подход к синтезу нелинейных систем стабилизации // Проблемы управления и информатики. – 1996.–№6. – С. 5-19.

7. *Онищенко С. М.* Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза // Проблемы управления и информатики. – 2000. – №3. – С 17-25.

8. *Онищенко С. М.* Прямой подход к синтезу нелинейных систем стабилизации: метод прямого жесткого синтеза линейных канонических систем стабилизации // Проблемы управления и информатики. – 2000. – №4. – С. 49-58.

9. *Онищенко С. М.* Об условиях стабилизируемости в методах жесткого синтеза систем стабилизации // Вопросы аналитической механики и ее приложений / Праці Інституту математики НАН України. Т.26. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – С. 257-276.