УДК 519.673

[1]Баранов В. Л., д-р техн. наук
[2]Засядько А. А., канд. техн. наук

СИСТЕМОАНАЛОГОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

[1]Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету
[2]Черкаський національний університет

Використання системоаналогового моделювання процесу відновлення сигналів на основі зміщених диференційних тейлоровських перетворень істотно скорочує розмірність систем рівнянь і підвищує стійкість обчислення наближеного розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, яким можна представити дану задачу.

Постановка проблеми і аналіз публікацій. Задача відновлення сигналів має велике значення при цифровій обробці інформації для складних радіолокаційних комплексів, в енергетиці в процесах контроля за режимами роботи енергооб'єктів і систем, з метою отримання інформації про екологічну обстановку на території України.

Вихідна математична модель задачі відновлення представлена у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду [1]:

$$\int_{\alpha}^{\beta} Q(x,s)\cdot y(s)ds = f(x), \quad x\in[\delta,\gamma], s\in[\alpha,\beta] \tag{1}$$

Для розв'язку некоректної задачі (1) необхідно за відомими $f(x)$ і $Q(x,s)$ знайти невідомий сигнал $y(s)$, неспотворений вимірювальною апаратурою.

У роботі [2] розглядається метод системоаналогового моделювання. На відміну від традиційного моделювання, суть якого складається в спрощенні математичного опису об'єкта, системоаналоги будуються в класі складних систем, що мають складніший математичний опис, ніж об'єкт моделювання. Ступінь подоби математичного опису системоаналогів стосовно до математичного опису оригіналів може оцінюватися такими критеріями, як подоба (ідентичність), еквівалентність і толерантність. Доцільність використання системоаналогового моделювання доведена процесами і явищами, властивими складним системам. Об'єднанням системоаналогів у вигляді складних систем можна одержати надсистему, більш просту у функціональному відношенні, ніж підсистеми. Системоаналог складається з множини моделей, кожна з яких характеризується неповним набором признаків подібності до модельованого об'єкту. Проте, об'єднання цієї множини моделей у системоаналог дає співпадання по повному набору признаків подібності до об'єкту моделювання.

Системоаналогове моделювання використовує системну аналогію для перенесення інформації про модель у вигляді складної системи на об'єкт моделювання. Системна аналогія, що реалізує відношення толерантності, дозволяє одержувати інформацію про об'єкт моделювання шляхом дослідження поведінки складної системи (системоаналогів) [2].

Мета даної роботи полягає в розробці підходів системоаналогового моделювання, в результаті якого сумісно використовувалися переваги окремих методів вирішення задачі відновлення для підвищення точності отримуваного розв'язку і ефективності використання кожного з цих методів.

Теоретичні дослідження. У відповідності до системоаналогового методу модель процесу відновлення сигналів будується у вигляді складної системи різноманітних моделей (системоаналогів), що мають віддалену подібність з об'єктом (процесом), що моделюється. Концепцію системоаналогового моделювання зручно реалізувати на основі зміщених дифференційних перетворень.

Представимо методику системоаналогового моделювання задачі відновлення сигналів, яка складається з двох етапів.

На першому етапі позначимо підінтегральну функцію в (1) як

$$z(x,s) = Q(x,s) \cdot y(s) . \qquad (2)$$

Функціональне рівняння (2) буде визначатися як перша модель системоаналога [2].

На другому етапі апроксимуємо $z(x,s)$ при фіксованому x_i аналітичною функцією, для якої відомий табличний інтеграл. Прикладом такої аналітичної функції може бути дробово-раціональна функція (апроксимація Паде) [3], або функція вигляду $\widetilde{z}(x_i,s) = A(x_i)s^B e^{D(x_i)s}$ (при цілому b інтеграл береться аналітично). Тоді відома точна відповідність визначеного інтеграла і функції $\varphi(x,a,b,c)$ з відомою аналітичною структурою визначається табличним інтегралом

$$\int_{\alpha}^{\beta} \widetilde{z}(x_i,s)ds = \varphi(x_i,a,b) = f(x_i) , \qquad (3)$$

Таким чином, друга модель системоаналога має вигляд (3), або

$$\varphi[x_i,a,b] = f(x_i) ,$$

де $a=(a_0, a_1,......,a_m)$, $b=(b_1,b_2,\ldots,b_m)$...

При фіксації x усередині інтервалу $x\in[\delta, \gamma]$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_r)$, $i = \overline{1,r}$, з моделі (3) одержуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів a, b апроксимуючої дробово-раціональної функції. Якщо кількість точок по x_i дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів a, b апроксимуючої функції, то маємо систему рівнянь для визначення чисельних значень коефіцієнтів a, b апроксимуючої функції. Таким чином, згідно рівняння (3) будується аналог підінтегральної функції у вигляді аналітичної функції

$$\widetilde{z}(x_i,s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_m s^m}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + a_n s^n} , \qquad (4)$$

Рівняння (2) і (3) являють собою системоаналог рівняння (1). Дійсно, він дозволяє знайти розв'язок $y(s)$ по системній моделі, що містить у собі моделі (2) і (3).

Наведемо розв'язок рівняння (1) $y(s)$ у вигляді аналітичної функції $y(s,c)$, де $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ – вектор вільних коефіцієнтів, наприклад, степенним поліномом [4, 5].

$$y(s,c) = \sum_{m=0}^{m=n} c_m s^m . \qquad (5)$$

Рівняння (2) при одному фіксованому xi представимо у вигляді

$$Z(s)=Q(s)\cdot y(s,c). \qquad (6)$$

Для одержання системи рівнянь, що визначають невідомі коефіцієнти $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, застосуємо диференційні перетворення [4, 5].

$$Z(k,c) = Q(k) * Y(k,c)$$

або

$$Z(k,c) = \sum_{l=0}^{l=k} Q(k-l) \cdot Y(l,c). \qquad (7)$$

Застосуємо метод балансу диференційних спектрів, запропонований Г. Є. Пуховим [6-8]. Переведемо в область зображень аналітичну функцію (6)

$$\widetilde{Z}(\tau) = \frac{a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots + a_m\tau^m}{1 + b_1\tau + b_2\tau^2 + \ldots + a_n\tau^n} ,$$

де $\tau=s/H$. Тоді отримаємо:

$$\widetilde{Z}(k) + \sum_{l=0}^{l=n} b_l \widetilde{Z}(k-l) = \sum_{l=0}^{l=m} a_l ъ(k-l) . \qquad (8)$$

Складемо рівняння балансу диференційних спектрів (7) і (8):

$$Z(k,c) = \widetilde{Z}(k) . \qquad (9)$$

Послідовно привласнюючи цілі значення аргументу k=1,2,3,…з (9), складемо систему рівнянь, кількість рівнянь якої дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$...

Розв'язуючи систему кінцевих рівнянь (9), знаходимо вектор вільних коефіцієнтів, компоненти якого визначають невідомий розв'язок (5) рівняння Фредгольма першого роду (1).

Переваги системоаналогового моделювання при вирішенні задачі відновлення сигналу на основі ДТ-перетворень полягають у наступному:

1. Відомо, що інтеграли визначаються грубо, тому що їх апроксимації рядами погано збігаються, а розкладання по власних функціях з обчислювальної точки зору складне. Цей недолік, пов'язаний з похибками наближеного інтегрування, усувається при використанні точного табличного інтегралу.

2. Відомо, що похибка підінтегральної функції мало впливає на похибку обчислення інтегралів. Тому апроксимація підінтегральної функції може бути грубою, оскільки розв’язок буде стійким за рахунок фільтра нульового порядку, яким є інтеграл.

3. Системоаналог дозволяє побудувати дві нелінійні системи низької розмірності замість однієї системи рівнянь високої розмірності з поганообумовленою матрицею, до якої зводяться відомі сіткові методи моделювання. Це підвищує обчислювальну стійкість.

Чисельний експеримент. Розглянемо системоаналогове моделювання для розв’язку модельного прикладу на основі (1). Обрано ядро вигляду *(Xx, і') = В е* А(м>2, яким, як правило, описується апаратна функція вимірювального приладу [1], де

В= ; *А=3,92;* Ж> = Г(1-^)2,|і|<1, І (ф И (10)

/(*) = 0,743є-"98і2 , **хє** [-1,4; 1,4].

Наведемо алгоритм обчислень для прикладу (10) з використанням апроксимацій підінтегральної функції 2Ц)=б(х,5)->'(5) апроксимаціями Паде вигляду (4).

Для двох точок розкладання з рисунку 1 вибрано *Н* - 0,25, ^ =0,25 і 5,,г=0,75. Тут зображення підінтегральних функцій обчислюються за формулою (7). Вибрано три дискрети диференційного спектру підінтегральної функції. На рисунку зображений додатній інтервал підінтегральної функції ЦТ) для перетину х=0 для двох точок розкладання.

Рис. 1. Апроксимація дробово-раціональними функціями для прикладу (10)

Розбиваємо інтеграл у (5) на суму інтегралів щодо точок розкладання, наприклад,

Іг,(5п -*m)(im*+ +*m)cim* +
0 *н2* 0 *На* о
+ / -*m)(Іm*+ |г,(іу2+*m)cim.*
о о

Апроксимацію (4) виберемо у вигляді

І + бл

Знайдемо формули для знаходження невідомих коефіцієнтів йго, *а*і, *Ь*.

г(я) + Ь$г(з) = а0 + *ах** ,

2(к) + ЬН2(к -1) = *а0ь(к)* + а, *Нъ(к* - 1).

Тоді три дискрети диференціального спектру зображення підінтегральної функції:

2(0) = а0;

2(1) + ЬН2(0) = ахН 2(2) + ЪН2(\) = Ъ

Звідси *а0 = 2(0); ах* = *Н* + *ЬН2* (0);

Ь ~ - *Н2{*1) , де *2і(к)* обчислюються по формулі (7).

Якщо розв’язок відомий для розкладання в нульовій точці Л'у=5о=0 у(£) = С0 + С,у + С2^2 + С353 + *С У* , то перерахунок відомого розв’язку для нульової точки 5о=0 в зміщену точку = і'о +*m* *у(m) = С0* + СЦ + *С У* + С353 + *С У* , здійснюється за формулами [4]

С0 *Сд* *4"С]^0 + ї7250* С350 ^4*^0 5

С, = С[+ 2 ч3Сз^д + 4С450 ,

С2 = С2 + 3С3£д + 6С450 ,

Сг - С г + 4С450, С4 = С4 [4,5]. (11)

Аналогічно можна одержати коефіцієнти (17) для будь-якого порядку багаточлена (2). При ^о=0 у (И) С, = С,.

Для ^ =0,25; хс= -0,25; #=0,25 по формулі (17) С0=0,8789; С, = -0,9375;

С2 = -1,6250, до=0,6879; *щ*= -2,4816; *Ь*= -0,5806.

Для =0,75; *хс*—-0,75; Н=0,25

С0 =0,1914; С,= -1,3125; С2= -1,375, ао=0,0211; *а*= -0,19; *Ь* - -3,73.

Тоді інтеграл у (1) буде замінюватися близьким йому:

$$\int_0^H z(s)ds \approx \int_0^H \frac{a_0+a_1 s}{1+bs}ds = \frac{a_1}{b}H + \frac{a_0 b - a_1}{b^2}\ln|1+bH|$$

Детальніший опис побудови ДТ-моделі рівняння (1) подано в роботах [4, 5].

Відхилення представлення підінтегральної функції $z(s)$ апроксимаціями Паде і правої частини рівняння (1) $f(x)$ для даного прикладу:

$$\varepsilon = 2\cdot\left(\sum_{j=1}^{j=2}\int_0^H z_i(s_{v_j}-\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{j=2}\int_0^H z_i(s_{v_j}+\tau)d\tau\right) - f(x_i) = 0{,}0313.$$

Розглянемо іншу апроксимацію підінтегральної функції $z(s)$ – апроксимацію функції $z(s)$ дробово-раціональними функціями вигляду $z(s)=\dfrac{a_0+a_1 s}{1+bs^2}$ (локон Ан'єзі). Локон Ан'єзі вдало апроксимує гаусову криву, якою є підінтегральна функція, тому виберемо одну точку розкладання s_v=0,5 і перепишемо цю функцію таким чином:

$$z(s)+bs^2 z(s) = a_0 + a_1 s$$

$$Z(k)+bH^2ъ(k-2)Z(k) = a_0ъ(k)+a_1Hъ(k-1)$$

$$Z(0)=a_0 \quad Z(1)=a_1H \quad Z(2)+bH^2Z(1)=0\,.$$

Звідси формули для знаходження невідомих коефіцієнтів a0, a1, b будуть мати вигляд:

$$a_0 = Z(0)\,;\; a_1 = \frac{Z(1)}{H}\,;\; b = -\frac{Z(2)}{H^2}\,.$$

Для $s_v = x_c$=0; H=0,5:

по формулі (11) $\overline{C}_0$ =C_0=1; $\overline{C}_1$ = C_1=0; $\overline{C}_2$ = C_2= -2, a_0=1; a_1= 0; b=5,92.

Для s_v =0,5; x_c= -0,5; H=0,5;

$\overline{C}_0$ =0,5625; $\overline{C}_1$ = -1,5; $\overline{C}_2$ = -0,5, a_0=0,211; a_1=1,3905; b= -13,3276.

Замінимо (6) апроксимуючим інтегралом:

$$\int_0^H z(s)ds \approx \int_0^H \frac{a_0+a_1 s}{1+bs^2}ds = \frac{a_0}{\sqrt{b}}\,arctg(H\sqrt{b}) + \frac{a_1}{2b}\ln|1+bH^2|.$$

Відхили представлення апроксимаціями Паде для модельного прикладу (10):

$$\varepsilon = 2\cdot\left(\int_0^H z_i(s_{v_j}-\tau)d\tau + \int_0^H z_i(s_{v_j}+\tau)d\tau\right) - f(x_i) = 0{,}0119.$$

Висновок. Розроблені в даній роботі підходи системоаналогового моделювання дозволяють сумісно використовувати переваги зміщених диференційних перетворень і апроксимацій Паде для підвищення ефективності вирішення задачі відновлення. У порівнянні з відомими сітковими методами розв'язку рівняння Фредгольма першого роду запропонований метод моделювання істотно скорочує розмірність системи рівнянь і підвищує стійкість обчислення наближеного розв'язку (1), тому що використання розглянутих апроксимацій підінтегральної функції для задач відновлення сигналів, виражених інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду в сполученні з використанням зміщених ДТ-перетворень може істотно спростити ДТ-модель цієї задачі.

Список літератури

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
2. *Баранов В. Л., Баранов Г. Л.* Системоаналоговое и квазианалоговое моделирование //Электрон. моделирование. – 1994. – 16, № 4. – С. 9-6.
3. *Бейкер Дж. Мл., Грейс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. Пер.с. англ. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
4. *Засядько А. А.* Дифференциально-тейлоровская модель задачи восстановления в спектроскопии // Электронное моделирование. – 2002. – Т.24. – № 6. – С. 125-133.
5. *Засядько А. А.* Моделирование процесса восстановления сигналов методом дифференциально-тейлоровских преобразований // Вісник ЖІТІ. – 2001. – № 18 / Технічні науки. – С.101-104.
6. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1980, – 419 с.
7. *Пухов Г. Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – К.: Наук. думка, 1988. –216 с.
8. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.