

УДК 519.65:629.782(045)

052-01-07 + 062-01-07

Зіатдінов Ю. К. д-р техн. наук
Климова А. С.

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету

У статті розглядаються різні підходи до рішення задачі векторної оптимізації. Наведені результати досліджень можливостей і досвіду застосування різних моделей і математичних методів рішення оптимальних задач.

Вступ

Сучасний етап розвитку авіаційно-космічної техніки характеризується необхідністю рішення дослідницької задачі по обґрунтованому визначенню технічного вигляду (ТВ) авіаційно-космічної системи (АКС) з урахуванням ряду факторів і досить твердих обмежень. У більшості випадків при проектуванні АКС прагнуть одержати систему, що володіє багатьма оптимальними характеристиками, а не який-небудь однієї з них. Отже, оптимізація АКС виконується як багатокритеріальна (векторна) [1, 3].

Для задач оптимізації фундаментальними є поняття математичної моделі об'єкта і ті дані, якими дослідник оперує для побудови моделі. Спектр широкий – від повного знання до повної невизначеності. Між цими інформаційними полюсами знаходиться імовірнісний рівень невизначеності. Наявність достатньої інформації про механізми фізичних, хімічних, інформаційних, економічних і інших процесів, що відбуваються в об'єкті, дозволяє скласти детерміновану модель у вигляді диференціальних, алгебраїчних і інших рівнянь. Аналітичне дослідження щодо простих детермінованих математичних моделей є предметом класичної теорії оптимізації. При невідомому ж механізмі процесів, що протікають в об'єкті, для складання математичної моделі й оптимізації застосовуються експериментальні чи експериментально-статистичні методи.

В даний час відома велика кількість методів і підходів для рішення задач багатокритеріальної оптимізації. Це пояснюється широким застосуванням їх до різ-

них класів задач. При цьому, потрібно їхня оцінка й відбір найбільш підходящих для рішення тих або інших класів задач. Вибір методу в значній мірі визначається постановкою оптимальної задачі й математичною моделлю об'єкта оптимізації.

Постановка задачі векторної оптимізації в спрощеному виді полягає в наступному: поведінка системи характеризується n -мірним вектором $x = \{x_1, \dots, x_n\}$, $x \in X \subset E^n$ (аргументи оптимізації) і оцінюється k -мірним вектором-функцією $y(x) = \{y_1(x), \dots, y_k(x)\}$ (критерії якості), компоненти якої являють собою задані дійсні функції змінної x .

Потрібно визначити крапку $x^0 \in X$, яка оптимізує в деякому змісті значення функцій $y_1(x), \dots, y_k(x)$.

Аналіз методів рішення задачі векторної оптимізації

Серед класичних методів рішення задач векторної оптимізації можна виділити такі: метод головного критерію; методи звуження множини всіх рішень до множини ефективних рішень; метод визначення рішення, заснованого на тім або іншому виді компромісу; метод послідовних відступок; методи рішення лексикографічних задач, та інші.

Метод головного критерію (оптимізації ієрархічної послідовності критеріїв якості) заснований на введенні порядку переваги тих або інших критеріїв, або впорядкування скалярних критеріїв.

Після встановлення такого порядку, допустимо $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$, рішення $x^0 \in X$ визначається як задовольняючим співвідношенням:

$$y_1(x^0) = \min y_1(x), x \in X_0 \subset X,$$

$$y_2(x^0) = \min y_2(x), x \in X_1 \subset X_0,$$

$$y_3(x^0) = \min y_3(x), x \in X_2 \subset X_1,$$

.....

$$y_k(x^0) = \min y_k(x), x \in X_{k-1} \subset X_{k-2},$$

Тут множини $X_i \subset X_{i-1}$ ($i=1,2,\dots,k-1$) визначені як $X_i = \{x: y_i(x) = \min y_i(x), x \in X_{i-1}\}$.

Застосування методу вимагає виділення одного, найважливішого критерію й встановлення граничних значень для інших критеріїв, що можливо далеко не завжди. Головний критерій устанавлюється на основі інженерних розрахунків, а інші оголошуються ієрархічно підлеглими йому. Застосування методу малоефективне для рішення більшості практичних задач, тому що все зводиться до оптимізації лише по першому головному критерію.

У методах звуження множини всіх рішень до множини рішень, що не поліпшуються (ефективних) на основі додаткової інформації про відносну важливість критеріїв вибирається єдиний оптимальний варіант. Крапка $x^0 \in X$ називається крапкою, що не поліпшується в X відносно $y(x)$, якщо серед всіх $x \in X$ не існує такої точки x^* , що має місце $y_i(x^*) \leq y_i(x^0)$, $i=1,\dots,k$, причому хоча б одне з нерівностей – строге.

Вивчення деяких властивостей множини крапок, що не поліпшуються, при рішенні задач векторної оптимізації з k критеріями якості показує, що проблема зводиться до мінімізації лінійної форми компонентів вектора $y(x)$ з постійними ваговими коефіцієнтами, тобто до мінімізації вираження $y_\lambda = \sum \lambda_i y_i(x)$, $i=1,\dots,k$ у якому $\lambda_i > 0$, $i=1,\dots,k$, $\sum \lambda_i = 1$, $i=1,\dots,k$.

Ухвалення рішення здійснюється на основі порівняння множини альтернатив із застосуванням людино-машинних процедур. Процес пред'явлення додаткової інформації особі, що приймає рішення (ОПР), і облік машиною отриманої від ОПР цієї інформації повторюються циклічно до ухвалення остаточного рішення. Цей метод одержав назву методу Парето оптимальних рішень й є досить розповсюдженим методом багатокритеріальної оптимізації.

Метод послідовних відступок доцільно застосовувати, коли всі частні критерії впорядковані по ступені важливості, причому кожен критерій настільки суттєво більше важливий, чим наступний, що можна обмежитися обліком тільки по парному зв'язку критеріїв і вибирати величину припустимого зниження чергового критерію з урахуванням поведінки лише одного наступного критерію.

Методи рішення лексикографічних задач вимагають строге впорядкування всіх критеріїв по важливості. Для одержання ефективних рішень використовують лексикографічне відношення переваги, відмінне від відношення Парето. Вимога строгої впорядкованості критеріїв по важливості є досить сильним обмеженням застосовності лексикографічних методів.

Найбільш доцільне дослідження складних технічних систем, при якій раціонально сполучаються універсальність аналітичного розрахунку з вірогідністю експерименту. Такий підхід відбитий у теоретико-експериментальному методі, що поєднує теоретичні й експериментальні процедури.

Перш ніж приступити до рішення задачі багатокритеріальної оптимізації необхідно з'ясувати:

- чи має задача оптимізації (мінімізації) рішення, тобто чи досягає критеріальна функція своєї нижньої грані?

- чи є знайдений локальний мінімум єдиним, а якщо ні, то чи збігається він із глобальним мінімумом критеріальної функції?

- яким образом знайти мінімум критеріальної функції, тобто як побудувати збіжний ефективний алгоритм знаходження хоча б одного локального мінімуму?

Перші дві проблеми – існування й єдиність знімаються в тому випадку, коли критеріальна функція ставиться до класу опуклих функцій (зокрема, до класу поліномів другого ступеня) [2,4]. Тому пропонується використання квадратичної апроксимації критеріальної функції, щоб вивести ці дві проблеми за межі дослідження.

При рішенні третьої проблеми центральне місце займає задача створення, по можливості, універсального високоєфективного збіжного алгоритму знаходження екстремумів чисельних критеріальних функцій.

Локальний та нелокальний методи рішення векторної оптимізації

В даний час в обчислювальній математиці переважно використовуються різні версії градієнтних методів [5]. Суть цих методів полягає в заміні складної задачі оптимізації послідовністю простих локальних задач, що не вимагають апріорних даних про характер цільової функції. Спочатку в невеликій області деякої початкової точки простору аргументів ставиться серія експериментів. Отримані дані використовуються для представлення локальної моделі цільової функції в околицях стартової точки поліномом першого ступеня. Організується рух з деяким кроком по поверхні цільової функції в напрямку градієнта лінійного наближення до досягнення умовного екстремуму. В отриманій точці робиться нове лінійне наближення і так продовжується доти, поки поточна точка не попадає в ту малу область простору аргументів, де знаходиться шуканий екстремум.

Градієнтні методи спираються на локальні (в околицях поточної точки) моделі цільової функції і тому недостатньо ефективні. Застосування локальних властивостей змушує часто змінювати напрямки пошуку, що і приводить у підсумку до неефективної обчислювальної процедури [5]. Для більшості градієнтних методів характерна необхідність евристичного завдання початкової точки і кроку пошуку, що вносить у процедуру оптимізації елементи суб'єктивності й істотно впливає на ефективність.

Нелокальний підхід передбачає апроксимацію цільової функції деякою моделлю не в околицях якоїсь точки, а у всій області визначення. Чим краще нелокальна модель описує цільову функцію, тим ближче розрахунковий екстремум до істинного. Але у відомих модифікаціях не-

локальні апроксимаційні методи великої практичної значимості не мають, тому що критерії якості алгоритмів оптимізації й апроксимації істотно розрізняються [6]. Дійсно, у задачі апроксимації наближення повинне бути рівномірно "гарним" на всій заданій множині аргументів, а в задачі оптимізації – тільки в околицях точки шуканого екстремуму. Доцільно врахувати особливості розглянутих напрямків і розробити ефективний метод оптимізації, вільний від зазначених недоліків.

Розглянемо задачу оптимізації у наступному вигляді. Нехай задана деяка компактна підмножина X (множина аргументів оптимізації) кінечномірного евклідового простору E^n , де $n \geq 1$, що складається з елементів $x = \{x_i\}_{i=1}^n$, на якому визначена обмежена знизу цільова функція $f(x)$, що належить деякому класу функцій: $f(x) \in \Phi$. Потрібно, використовуючи кінцеве число обчислень функції $f(x)$, оцінити величину

$$f^*(x) = f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x) \quad (1)$$

і знайти точку $x^* \in X$, у якій ця оцінка реалізується. Серед задач оптимізації є такі, про які заздалегідь відомо, що

$$\inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} f(x)$$

тобто в області визначення X є єдиний мінімум функції $f(x)$. Якщо, користуючись цією інформацією, визначити Φ як клас неперервних в області екстремуму однокінцевих (унімодалних) на X функцій $f(x)$, а також акцентувати увагу на ефективності обчислювального процесу, то задача (1) може бути сформульована так: використовуючи чим найменше число обчислень функції $f(x)$, знайти

$$x^* = \arg \min_{x \in X} f(x) \quad (2)$$

З огляду на те, що визначення x^* може бути виконано лише приблизно, мова йде про відшукування якої-небудь точки з множини

$$X_\varepsilon = \{x \in X : \rho(x, x^*) \leq \varepsilon\}, \quad X_\varepsilon \subset X,$$

де ρ – деяка метрика на X ; ε – припустима похибка по аргументу. Розглянута постановка є досить загальною. Задача максимізації виходить з (1) чи (2) заміною f на $-f$.

Звернемося до потенційно більш ефективного нелокального підходу і постараємося звільнитися від властивих йому недоліків. Апроксимуємо функцію $f(x)$ на множині аргументів X деякою наближеною функцією $F(x, a)$, відомою з точністю до вектора констант (коефіцієнтів $\{a_j\}_{j=1}^m$). Вигляд функції $F(x, a)$ визначається тією інформацією, якою володіє дослідник про механізми процесів чи явищ в об'єкті який оптимізується. Такі дані можуть значно поліпшити якість апроксимації. В ідеалі функція $F(x, a)$ настільки добре описує цільову функцію $f(x)$, що їх екстремуми збігаються. На практиці так не буває, тому вирішити задачу оптимізації «за один раз», як правило, не можна.

Але необхідно мати на увазі, що при виборі $F(x, a)$ функція повинна бути досить простою, щоб процеси апроксимації й обчислення оцінок аргументів мінімуму не виявилися надмірно громіздким. З іншого боку, апроксимуюча залежність повинна володіти достатніми прогностичними властивостями, щоб швидкість збіжності обчислювального процесу була задовільною. У більшості практичних випадків ці вимоги виконуються в класі апроксимуючих поліномів другого порядку:

$$F(x, a) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{j=1}^n a_j x_j^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (3)$$

де a_0, a_i, a_j, a_{ij} – коефіцієнти. Для спрощення обчислювальних процедур можливі різні усікання функції (3). У той же час не виключено, що дуже складні цільові функції можуть бути визначені з застосуванням набагато більших апроксимаційних залежностей.

Побудова наближених функцій може бути виконана як методами інтерполяції, так і апроксимацією по методу найменших квадратів. Чому ж обрано спосіб апроксимації? Інтерполяційні формули передбачають точний збіг наближеної і цільової функцій в опорних точках (вузлах інтерполяції), кількість яких, як і кількість невідомих констант a , дорівнює m . Коефіцієнти a визначаються рішенням визначеної системи рівнянь

$$F(x^{(k)}, a) = f(x^{(k)}), k \in [1, m],$$

де $x^{(k)}$ – вузли інтерполяції.

Метод найменших квадратів передбачає N опорних точок (вузлів апроксимації), причому число N може бути більшим, меншим чи дорівнювати кількості констант m . Невідомі коефіцієнти наближеної функції визначаються з умови

$$E(a) = \sum_{u=1}^N [f(x^{(u)}) - F(x^{(u)}, a)]^2 = \min_a$$

Використовуючи необхідну умову мінімуму функції, одержуємо систему нормальних рівнянь

$$\partial E(a) / \partial a_j = 0, j \in [1, m]$$

рішення якої дає невідомі коефіцієнти апроксимуючої функції. Таким чином, метод найменших квадратів може розглядатися як більш універсальний, у деякому розумінні, спосіб рішення який пропонує додаткові можливості для підвищення ефективності обчислювального процесу, чим метод інтерполяції, хоча метод інтерполяції має перевагу простоти.

Пропонується декомпозиція складної задачі оптимізації ітераційною послідовністю більш простих нелокальних задач, причому кожна наступна обчислюється в меншій області визначення аргументів, чим попередня. Так зменшується протиріччя між критеріями якості алгоритмів апроксимації й оптимізації і використовуються переваги нелокального підходу. До нелокальної моделі $F(x, a)$ пред'являються вимоги унімодалності у відкритій області аргументів $x \in E^n$ і диференційованості по цих аргументах. Апроксимаційній моделі $F(x, a)$ надається властивість адаптації за рахунок вибору коефіцієнтів a на кожній ітерації в області визначення аргументів меншої чим на попередній ітерації. Основна ідея побудови алгоритму полягає в наступному. На першій ітерації здійснюється апроксимація функції $f(x)$ нелокальною моделлю $F(x, a)$ на усій заданій множині аргументів X . У цій області виконаємо N обчислень функції $f(x)$ у різних точках (вузлах апроксимації), що складають систему базисних точок $S^{(0)}$. По отриманим даним обчислимо за-

даний набір коефіцієнтів $a^{(0)}$ що дозволяє перейти від моделі $F(x, a)$ до вираження $F(x)$. Далі, спираючись на вимогу унімодальності наближеної моделі, у відкритій області, скористаємося необхідною умовою мінімуму функції

$$\partial F^{(0)}(x)/\partial x_i = 0, \quad i \in [1, n] \quad (4)$$

і знайдемо першу оцінку $x^{(1)}$ шуканої сукупності аргументів як рішення системи рівнянь (4). Дискретна система $S^{(0)}$ базисних точок є гомеоморфним відображенням заданої неперервної області X . Отримана нова точка $x^{(1)}$ вводиться в систему базисних точок замість відкинутої старої (звичайно в ній $f(x)$ максимальна). Далі розрахунок повторюється для отриманої в такий спосіб нової системи базисних точок $S^{(1)}$. По властивості гомеоморфізму

$$X^{(i+1)} < X^{(i)}, \quad i = I, II, \dots \quad (5)$$

у тому розумінні, що гіперобсяг, зайнятий компактною підмножиною $X^{(i+1)}$ в просторі E^n , менше, ніж гіперобсяг, що відповідає підмножині X^i (зазначені підмножини не обов'язково вкладені). Так як в меншій області функція $F(x, a)$ точніше описує функцію $f(x)$, то вираженню (5) відповідає послідовність нелокальних моделей з уточнюючими коефіцієнтами $a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(II)}, \dots$. Звідси, згідно (4), впливає послідовність $x^{(I)}, x^{(II)}, x^{(III)}, \dots$, оцінок, які у принципі, сходяться до точки x^* істинного мінімуму функції $f(x)$.

По суті, метод заснований на ітераційній побудові «пливучої» разом із системою базисних точок $S^{(i)}$, яка уточнюється за результатами експерименту нелокальної $F(x, a^{(i)})$ моделі, причому сукупність опорних точок стискається і стягується до точки шуканого екстремуму. Таким чином, на кожній ітерації одночасно і взаємозалежно здійснюється, як уточнення наших представлень про цільову функцію в області екстремуму, так і визначення такої оцінки аргументів екстремуму, яка адекватна рівню цих представлень на даній ітерації.

Ефективність нелокального підходу роз'яснюється властивостями ітераційно-

го уточнення нелокальних апроксимаційних моделей цільової функції в міру стиску областей аргументів, що стягаються до шуканої точки екстремуму. Крім того відмінністю цього методу є те, що він не вимагає суб'єктивного завдання ні початкової точки пошуку, ні яких би то не було пошукових кроків, але і не виключає можливості включити до складу заданої системи базисних точок $S^{(0)}$ тієї точки, яка по тим чи іншим розумінням здається перспективною.

Висновки

Центральне місце при проектуванні складної системи займає рішення задачі багатокритеріальної оптимізації її характеристик. Задача включає вибір математичного методу, що приводив би до кінцевих результатів з найменшими витратами на обчислення з максимально можливою кількістю інформації про цільову функцію й побудови універсального високоефективного збіжного алгоритму знаходження екстремумів чисельних функцій. Вибір методу в значній мірі визначається постановкою конкретної оптимальної задачі й використовуваною математичною моделлю об'єкта оптимізації.

Список літератури

1. Воронин А. Н. Многокритериальный синтез динамических систем. – К.: Наукова думка, 1992. – 160 с.
2. Поляк Э. Численные методы оптимизации. – М.: Мир, 1974. – 376 с.
3. Воронин А. М., Зятдінов Ю. К., Козлов О. І., Чабанюк В. С. Векторна оптимізація динамічних систем – К.: Техніка, 1999. – 284 с.
4. Стронгин Р. Т. Поиск глобального оптимума. – М.: Знание. Математика, кибернетика. №2, 1990. – 48 с.
5. Банди Б. Методы оптимизации. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
6. Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г. Методы поиска глобального экстремума. – М.: Наука, 1991. – 248 с.