УДК 519.65+681.518.2

з 811.5

Денисюк В. П. д-р фіз.-мат. наук
Денисюк О. В.
Світлична А. А.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ СИГНАЛІВ КЛАСАМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету

У роботі розглядаються класи фундаментальних інтерполяційних функцій. Розглянуто функції Шеннона-Котельникова, Лагранжа, фундаментальні поліноміальні сплайни, фундаментальні тригонометричні функції ті фундаментальні тригонометричні сплайни.

Постановка проблеми

Як відомо, однією із складових частин систем енергетичного моніторингу є інформаційне забезпечення і програмні засоби оцінювання приоритетних показників, які дозволяють здійснювати оперативний аналіз цих показників з допомогою автоматизованих систем обробки даних. При цьому важливим є побудова математичної моделі об'єкту моніторингу в системах обробки даних, на базі якої отримують якісні і кількісні характеристики стану системи. Актуальною є також розробка і реалізація методів побудови моделей електричних сигналів, які характеризують стан об'єкту моніторингу, а також методів обробки цих моделей з метою отримання оцінок параметрів стану об'єкту моніторингу.

Мета статті

В даній роботі розглядається один із методів побудови моделей електричних сигналів, при якому в ролі базисних функцій використовуються фундаментальні функції деяких класів. Однією з суттєвих переваг такого підходу є те, що в ролі коефіцієнтів узагальненого многочлена (або ряду) по цих функціях виступають миттєві значення досліджуваних сигналів; в свою чергу, це дозволяє значно спростити алгоритми обробки таких моделей.

Основний матеріал

У теорії інформації важливу роль відіграє теорема Шеннона, згідно з якою фінітну функцію з обмеженим спектром можна відновити абсолютно точно, використовуючи лише значення цієї функції на зліченній множині рівновіддалених значень аргументу. При цьому відновлювана функція подається рядом Шеннона

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{j}{2F_m}\right)\times\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi F_m\left(x-\dfrac{j}{2F_m}\right)}{2\pi F_m\left(x-\dfrac{j}{2F_m}\right)},$$

де F_m – верхня гранична частота сигналу.

Відомо, що для сигналів, які задано на скінченому проміжку, умови теореми Шеннона не виконуються; отже, ця теорема має лише теоретичне значення. Відновлення реальних сигналів скінченими сумами ряду Шеннона відбувається з деякою похибкою і у багатьох випадках не є оптимальним.

Проте ідея подання сигналів узагальненим многочленом по деякій системі функцій $\varphi_k(x)$. ($k\in Z$, Z – множина цілих чисел), коефіцієнтами якого є значення сигналів у деякі, не обов'язково рівновіддалені, моменти часу, тобто у вигляді

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N} f(k\Delta x)\varphi_k(x),$$

де $f(k\Delta x)$ – значення сигналу у деякі моменти часу, $\varphi_k(x)$ – деяка система функцій, і в теперішній час не втратила своєї актуальності. Оскільки при реалізації цієї ідеї головним є вибір систем функцій $\varphi_k(x)$, розглянемо умови, яким повинні задовольняти функції таких систем більш детально.

Зрозуміло, що системи функцій, які можуть застосовуватися для такого подання, на сітках $\Delta=\{x_i\}$ повинні задовольняти співвідношенню

$$\varphi_k(x_i)=\begin{cases}1, & k=i;\\ 0, & k\neq i.\end{cases}; \qquad (1)$$

Надалі такі системи функцій будемо називати фундаментальними системами функцій.

Зауважимо, що область визначення функцій фундаментальних систем має бути у всякому разі не вужчою, ніж проміжок існування сигналу.

До фундаментальних систем функцій, найбільш відомих на теперішній час, належать система функцій Шеннона, система інтерполяційних многочленів Лагранжа, система фундаментальних інтерполяційних поліноміальних сплайнів, система фундаментальних інтерполяційних тригонометричних многочленів, і запропонована авторами система фундаментальних інтерполяційних тригонометричних сплайнів. Широке розповсюдження саме цих систем функцій пояснюється тим, що алгебраїчні і тригонометричні многочлени є лінійно щільними множинами у просторах відповідно неперервних і періодичних неперервних функцій; поліноміальні ж і тригонометричні сплайни є вельми зручними узагальненями цих многочленів.

1. Система функцій Шеннона будується на еквідистантних сітках, заданих всій чисельній вісі; властивості функцій цієї системи досить відомі (див. напр.[1]), і детально нами не розглядаються.

Перш ніж перейти до розгляду інших систем фундаментальних функцій, зробимо таке зауваження. Оскільки будь який відрізок $[a,b]$ лінійною заміною змінних можна відобразити на відрізок $[0,1]$, надалі будемо вважати, що інтерпольована функція $f(x)$ розглядається на відрізку $[0,1]$. Припустимо також, що на цьому відрізку задано деяку сітку Δ_N, $\Delta_N=\{x_i\}_{i=0}^{N}$, $\quad 0=x_0<x_1<\ldots,<x_N=1$. Крім того, на відрізку $[0,1]$ будемо розглядати і еквідистантні сітки $\widetilde{\Delta}_N$, $\widetilde{\Delta}_N=\{x\}_{i=0}^{N}$, $x_i=\dfrac{i}{N}$.

2.Система фундаментальних многочленів Лагранжа будується у загальному випадку на нерівномірних сітках, заданих на відрізку $[0,1]$; властивості функцій цієї системи також досить відомі і детально нами не розглядаються.

3.Система фундаментальних простих поліноміальних сплайнів.

Одним із варіантів поліноміальної інтерполяції є інтерполяція поліноміальними сплайнами. Нагадаємо, що поліноміальним сплайном степеня $2m-1$, $m=1,2,\ldots$, з дефектом $d, 1\le d\le m$, який інтерполює функцію $f(x)$ на сітці Δ_N називають функцію $S_{2m-1,d}(f,\Delta_N,x)$ яка задовольняє умовам:

а) функція $S_{2m-1,d}(f,\Delta_N,x)$ співпадає з поліномом степеня $2m-1$, $m=1,2,\ldots$ на кожному з проміжків $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots,N$;

б) $S_{2m-1,d}(f,\Delta_N,x)\in C_{[a,b]}^{2m-1-d}$;

c) $S_{2m-1,d}(f,\Delta_N,x_i)=f(x_i),(i=1,2,\ldots,N)$.

Поліноміальні сплайни з дефектом $d=1$ називають простими.

З означення інтерполяційних поліноміальних сплайнів випливає, що задача побудови сплайну є більш складною, ніж задача побудови інтерполяційного многочлена, і зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розмірність якої визначається кількістю інтерполяційних точок; проте кількість ненульових членів у кожному рівнянні цієї системи визначається степенем сплайна. Необхідність розв'язання системи рівнянь не дає можливості отримати формули, які визначають поліноміальні фундаментальні сплайни у явному вигляді; ми обмежимося лише тим, що наведемо графіки цих сплайнів (рис. 1).

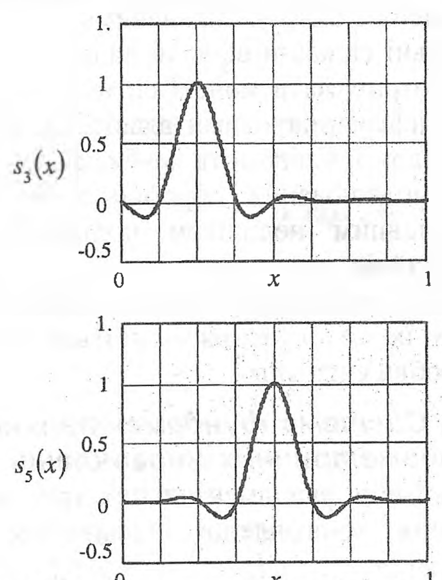

Рис. 1. Фундаментальні поліноміальні кубічні сплайни

Зауважимо, що у поліноміальних фундаментальних сплайнів модулі максимумів спадають із віддаленням від точки інтерполяції.

Широке застосування поліноміальних інтерполяційних сплайнів в задачах моделювання сигналів, яке спостерігається останнім часом, пояснюється їх апроксимативними властивостями. Ми обмежимося лише наведенням того факту, що на класах простих інтерполяційних періодичних сплайнів реалізується поперечник Колмогорова при наближенні класів періодичних диференційовних функцій (зауважимо, що класи періодичних функцій мають певну симетрію екстремальних властивостей, в той час як на екстремальних властивостях функцій, які задані на скінченому відрізку, суттєво впливає збурююча дія кінців відрізка). Інакше кажучи, інтерполяційні поліноміальні сплайни на рівномірних сітках являють собою найкращий лінійний метод наближення класів періодичних диференційовних функцій, який у метриках деяких просторів гарантує найменшу похибку наближення у порівнянні з будь якими іншими лінійними методами наближення [3].

До переваг поліноміальних сплайнів слід також віднести і те, що при побудові сплайнів використовуються многочлени невисоких степенів (найчастіше третього степеня). Це пояснюється тим, що система лінійних рівнянь, з якої визначаються параметри сплайну, ускладнюється з ростом степеня сплайну. Відзначимо, що поліноміальні сплайни вперше надали можливості отримувати моделі сигналів з певними диференціальними властивостями, які, як відомо, відіграють неабияку роль в задачах моделювання і обробки сигналів.

Головним недоліком поліноміальних сплайнів слід вважати те, що ці сплайни є составною функцією; це значно обмежує їх застосування в багатьох задачах обробки сигналів.

4. Система фундаментальних тригонометричних многочленів.

Система фундаментальних тригонометричних многочленів складається з многочленів $t_k(x)$, $k=0,1,\cdots,N$, ($N=2n+1$, $n=1,2,\cdots,$), де N – кількість вузлів інтерполяції, а n – порядок тригонометричного многочлена. Оскільки внаслідок періодичності тригонометричного многочлена $t_0(x)\equiv t_N(x)$, то система фундаментальних тригонометричних многочленів на сітці Δ_N містить лише N складових; многочлени $t_k(x)$, $k=1,2,\cdots,N$, цієї системи можна подати у вигляді

$$t_k(x)=\frac{\sin\pi(x-x_0)\sin\pi(x-x_1)}{\sin\pi(x_k-x_0)\sin\pi(x_k-x_1)}\cdots\times$$

$$\times\frac{\sin\pi(x-x_{k-1})\sin\pi(x-x_{k+1})}{\sin\pi(x_k-x_{k-1})\sin\pi(x_k-x_{k+1})}\cdots\times$$

$$\times\frac{\sin\pi(x-x_N)}{\sin\pi(x_k-x_N)}$$

Якщо інтерполяційна сітка є еквідистантною, то фундаментальні многочлени $t_k(x)$, $k=1,2,\cdots,N$, порядку n можна записати простіше, а саме

$$t_k(x)=\frac{1}{N}\times\left[1+2\sum_{j=1}^{n}\cos 2\pi j(x-x_k)\right].$$

Графіки деяких фундаментальних тригонометричних многочленів на рівномірній сітці наводяться на рис. 2.

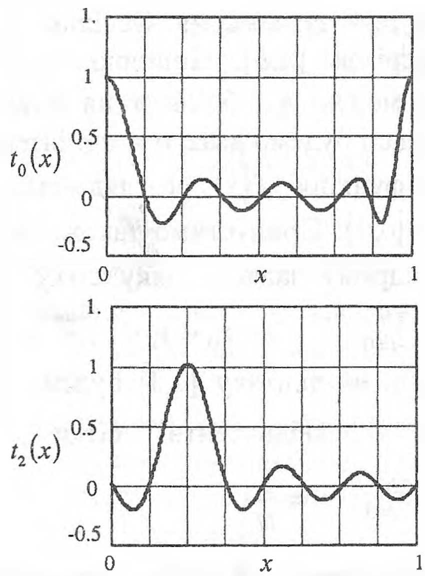

Рис. 2. Фундаментальні тригонометричні многочлени

Система фундаментальних тригонометричних функцій, породжувана деякою сіткою, є єдиною у тому розумінні, що існує лише єдина система тригонометричних многочленів порядку n, яка задовольняє на цій сітці умовам (2).

Використовуючи систему фундаментальних тригонометричних многочленів $t_k(x)$, $k=1,2,\cdots,N$, інтерполяційний тригонометричний многочлен можна записати у вигляді

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{N} f(x_k)\,t_k(x).$$

Якщо інтерпольована функція сама є тригонометричним многочленом, порядок якого не перевищує n, то інтерполяційний тригонометричний многочлен співпадає з цією функцією.

Тригонометричні функції, що утворюють систему фундаментальних функцій, є періодичними з періодом 1, і задані на всій чисельній вісі. На практиці систему тригонометричних фундаментальних функцій часто розглядають лише на півзвідрізку, довжина якого дорівнює періоду; проте ігнорування періодичності інколи призводить до певних прикрощів при інтерполяції тригонометричними функціями.

Тригонометричний многочлен на точно подає вихідні дані і з деякою похибкою подає проміжні значення функції. Величина цієї похибки залежить від заданої функції. Великі можливості тригонометричної інтерполяції випливають із того факту, що із зростанням n тригонометричний многочлен на еквідистантних сітках інтерполює функцію з коливаннями, які весь час зменшуються. Для неперервної функції з обмеженою варіацією тригонометричний інтерполяційний многочлен необмежено прямує до неї в кожній точці даного інтервалу, коли кількість даних точок необмежено зростає [2].

Тригонометрична інтерполяція повністю вільна від недоліків степеневої інтерполяції на еквідистантних сітках, яка була розглянута вище. Коливання похибки не мають тенденції зростати на кінцях проміжку, а зберігають однаковий порядок похибки на всьому проміжку. Отже, тригонометрична інтерполяція як з аналітичної, так і з практичної точки зору, значно краще ніж степенева інтерполяція на еквідистантних сітках.

Оцінку похибки тригонометричної інтерполяції на еквідистантних сітках наведемо лише для функцій класу W_V^r, тобто для функцій з періодом 1, у якіх існують абсолютно неперервні похідні $f^{(r-1)}(x)$, а похідна $f^{(r)}(x)$ є функцією обмеженої варіації, причому

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}\left(f^{(r)}(x)\right)\le 1.$$

Отже, оцінка похибки має вигляд:

$$\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n} t_k(x)\right\|_{W_V^r} \le$$

$$\le \frac{2V_r}{\pi r}\left(\frac{1}{n^r}+\sqrt{2}(r+1)\times\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(N-n)^{r+1}}\right),$$

де V_r – варіація похідної r-го порядку, функції $f(x)$.

Враховуючи, що

$$V_r \le 1\cdot L_r$$

де L_r – константа Ліпшиця для похідної r-го порядку; маємо

$$\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n} t_k(x)\right\|_{W_V^r} \le \frac{4L_r}{r}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{n^r}+\sqrt{2}(r+1)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{(N-n)^{r+1}}\right).$$

Нескладно переконатися, що для многочленів фундаментальної тригонометричної системи на еквідистантних сітках, виконується умова

$$\sum_{k=0}^{N} t_k(x)=1.$$

Дійсно, враховуючи що

$$\sum_{k=1}^{N} t_k(x)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}\times\left[1+2\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}}\cos 2\pi j(x-x_k)\right],$$

після зміни порядку підсумовування, дістанемо

$$\sum_{k=1}^{N} t_k(x)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}+$$

$$+2\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}}\cos 2\pi jx\sum_{k=1}^{N}\cos 2\pi jx_k+$$

$$+2\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \sin 2\pi jx \sum_{k=1}^{N} \sin 2\pi j x_k$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{N} \cos 2\pi j x_k = \sum_{k=1}^{N} \sin 2\pi j x_k = 0,$$

$$\text{а} \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} = 1,$$

остаточно отримуємо

$$\sum_{k=0}^{N} t_k(x) = 1.$$

Система тригонометричних фундаментальних сплайнів

Узагальненням системи фундаментальних тригонометричних многочленів є система фундаментальних тригонометричних сплайнів [4]. Функції цієї системи, які ми будемо позначати $ts_k(r,x)$, на відміну від функцій $t_k(x)$, залежать ще і від параметра $r, r = 1,2,\cdots$, роль якого буде нами розглянута нижче. Функції системи фундаментальних функцій визначаються таким чином

$$ts_k(r,x) = \frac{1}{N}\left\{1 + 2\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} g_j^{-1}(r,N) \times \right.$$

$$\left. \times \left[C_j(r,x)\cos(jx_k) + S_j(r,x)\sin(jx_k)\right] \right\}, \text{ де}$$

$$C_j(r,x) = \frac{\cos jx}{j^{r+1}} + ;$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(mN+j)x}{(mN+j)^{r+1}} + \frac{\cos(mN-j)x}{(mN-j)^{r+1}}\right]$$

$$S_j(r,x) = \frac{\sin jx}{j^{r+1}} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(mN+j)x}{(mN+j)^{r+1}} - \frac{\sin(mN-j)x}{(mN-j)^{r+1}}\right];$$

$$g_j(r,N) = -(-j)^{-(r+1)} + N^{-(r+1)} \times$$

$$\times\left[\zeta\left(r+1, jN^{-1}\right) + \zeta\left(r+1, -jN^{-1}\right)\right];$$

$\zeta(.,.)$ – узагальнена дзета-функція.

Параметр r визначає диференційні властивості тригонометричних сплайнів. Так при будь якому значенні r $ts_k(r,x) \in C_{[0,2\pi]}^{r-1}$.

Графіки деяких фундаментальних тригонометричних сплайнів при різних значеннях параметра r наводяться на рис. 3.

Зауважимо, що у тригонометричних фундаментальних сплайнів, як і у тригонометричних фундаментальних многочленів модулі максимумів спадають із віддаленням від вузла інтерполяції.

Як випливає з наведених формул, для побудови фундаментальних тригонометричних сплайнів немає потреби розв'язувати будь-які системи рівнянь.

В [4] показано, що клас тригонометричних сплайнів є значно ширшим за клас поліноміальних сплайнів; зокрема, клас поліноміальних сплайнів включається у клас тригонометричних сплайнів. Цей факт дозволяє зробити висновок про те, що апроксимативні властивості тригонометричних сплайнів у всякому разі не гірші за апроксимативні властивості поліноміальних сплайнів.

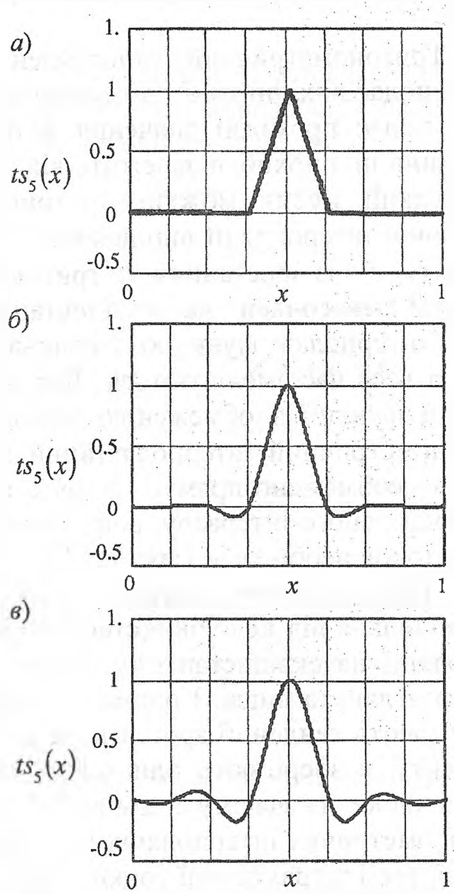

Рис. 3. Фундаментальні тригонометричні сплайни при різних значеннях параметру r: *а)* $r=1$; *б)* $r=2$; *в)* $r=5$

Алгоритми побудови тригонометричних сплайнів не залежать від степеня цих сплайнів, що відрізняє їх у кращий бік у порівнянні з поліноміальними сплайнами.

До недоліків тригонометричних сплайнів слід віднести те, що їх побудова вимагає більших витрат машинного часу, ніж інші розглянуті нами класи функцій; проте у багатьох випадках це недолік не є визначальним.

Наостанок зауважимо, що для фундаментальних тригонометричних сплайнів при будь яких значеннях r виконується умова

$$\sum_{k=0}^{N} ts_k(r,x)=1.$$

Дійсно, розмірковуючи як і раніше, маємо

$$\sum_{k=1}^{N} ts_k(r,x)=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}\times\left\{1+2\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} g_j^{-1}(r,N)\right\}\times$$

$$\times\left[C_j(r,x)\cos(jx_k)+S_j(r,x)\sin(jx_k)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}+2\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} g_j^{-1}(r,N)\times C_j(r,x)\sum_{k=1}^{N}\cos(jx_k)+$$

$$+2\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} g_j^{-1}(r,N)S_j(r,x)\times\sum_{k=1}^{N}\sin(jx_k)=1.$$

Висновки

1. Застосування функцій Шеннона для побудови моделей сигналів, заданих на скінченому інтервалі, не є оптимальним; похибки моделювання оцінити досить складно.

2. Фундаментальні многочлени Лагранжа не спадають монотонно із видаленням від вузла інтерполяції і погано моделюють сигнали на еквідистантних сітках; для оцінки похибки моделювання многочленом Лагранжа $L_N(x)$ необхідно приймати припущення про існування неперервної похідної $N+1$- го порядку, обмеженої деякою константою C_{N+1}. В той же час побудова многочленів Лагранжа вимагає найменшої кількості операцій порівняно з іншими розглядуваними класами функцій.

3. Поліноміальні сплайни, які є вдалою модифікацією многочленних наближень, добре моделюють сигнали на еквідистантних сітках і є оптимальними класами наближуючих функцій для періодичних сигналів; ці сплайни в принципі дозволяють узгоджувати диференціальні властивості досліджуваних сигналів і їх моделей, що у багатьох випадках має неабияке значення. Головним недоліком поліноміальних сплайнів є те, що вони являють собою составну функцію, що значною мірою ускладнює алгоритми обробки сплайнових моделей.

4. Тригонометричні інтерполяційні многочлени добре працюють на еквідистантних сітках і є зручними для побудови алгоритмів подальшої обробки моделей сигналів. Недоліком тригонометричних многочленів слід вважати відсутність зручних оцінок наближення і аналітичність отримуваних моделей.

5. Тригонометричні сплайни дозволяють узгоджувати диференціальні властивості досліджуваних сигналів і їх моделей, і не є составними функціями; отже вони вдало сполучають переваги поліноміальних сплайнів і тригонометричних многочленів. Головним недоліком цих сплайнів слід вважати порівняно велику кількість операцій для побудови моделей сигналів; проте у теперішній час у багатьох випадках цей недолік не є визначальним.

Список літератури

1. *Хургин Я.И., Яковлев В.П.* Финитные функции в физике и технике. – М.: Наука, 1971. – 408 с.

2. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Наука, 1961. – 524 с.

3. *Волков Е.А.* Численные методы – М.: Наука, 1987. – 248 с.

4. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.

5. *Денисюк В.П., Марченко Б.Г.* Сплайны и их приложения в задачах моделирования и обработки измерительных сигналов. Нац. техн. ун-т Украины "КПИ". – К., 1995. – С. 237-242.