УДК 518:512.25

[1]Гамаюн В. П. д-р техн. наук
[2]Яременко К. П.
[2]Плотников Д. Б.
[2]Панасенко Е. О.

ТЕХНОЛОГИЯ ТЕСТИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЭВМ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗРЯДНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АРИФМЕТИКИ

[1]Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
[2]Институт компьютерных технологий Национального авиационного университета

Предложено применять для тестирования математического обеспечения разрядно-логарифмическую компьютерную арифметику. Совместимость с двоичной арифметикой, возможность использования известных языков высокого уровня обеспечивают анализ качества реализации заданий в компьютерной среде на новом уровне.

Введение

Основные показатели качества функционирования ЭВМ оцениваются по точности решения задач и времени решения. Известен ряд подходов для тестирования математического обеспечения, основанных, в частности, на тестах для проверки решений систем линейных алгебраических уравнений и обращения матриц. В основном для квадратной невырожденной матрицы $A=\{a_{ij}\}$, как правило приводятся следующие данные: точная обратная матрица $A^{-1}{}_{n}$; число обусловленности $H=\|A\|\ *\|A\|$. Для повышения точности обработки на ЭВМ разрабатываются специальные компьютерные арифметики, составляющие структурный подход в разрешении проблемы повышения точности.

Разрядно-логарифмическая компьютерная арифметика основывается на специальном кодировании данных – разрядно-логарифмическом (РЛ) [1, 2], при котором данные операнды, представленные в двоичном позиционном коде, заменяются наборами двоичных кодов ненулевых разрядов:

$$N_i = \log_2 a_i \ \ p^{\,i} = i,$$

где p – основание системы счисления.

Операнд B=+1010111, представленный в формате с фиксированной запятой, в РЛ кодах определяется как

$$Sign\ B\ Q\ N_1\ N_2\ N_3\ N_4\ N_5 = 0.5.6.4.2.1.0.,$$

где Q – количество кодов ненулевых разрядов.

Представление данных в РЛ кодах является однозначным, обратное преобразование в двоичный код выполняется с помощью дешифрирования.

В [1, 2] показано, что РЛ представление определяет обобщенную структуру данных для плавающей, фиксированной, естественной запятой.

Диапазон данных при таком кодировании увеличивается при заданной мантиссе в n –разрядов как ($h= 2^n - 2^{-n}$)

$$K= (2^h - 2^{-n}) / (2^n - 2^{-n})$$

При размерности мантиссы в n=8,16 разрядов на ЭВМ реализуется обработка со следующими мантиссами в 511 и $2{\cdot}2^{16}-1$ разрядов.

Такие величины мантисс позволяют реализовать обработку без округления и нормализации и таким образом обеспечить высокоточные вычисления [1, 2].

Постановка задачи

При разработке математического обеспечения ЭВМ применяются различные методы, повышающие достоверность обработки данных. Задача исследований применения разрядно-логарифмической арифметики для тестирования и применения в качестве основы математического обеспечения ЭВМ состоит в определении необходимых и достаточных условий обеспечения точной обработки. Теоретические результаты по использованию РЛ кодов должны быть уточнены и преобразованы в конкретные методики по применению разрядно-логарифмической арифметики. Достоверность решений, время реализации задания в целом и затраты оперативной памяти линейно зависят от величины Q, параметра, определяющего количество кодов ненулевых разрядов в структуре данных, величину мантисс операндов.

Варианты моделей вычислений с разрядно-логарифмической арифметикой

На основании правил поразрядных операций над РЛ кодами разработаны алгоритмы компьютерных операций, которые реализованы в виде дополнительного программного продукта. Программирование обработки с применением РЛ арифметики выполняется в режиме перегрузки операторов в тех языках программирования, которые допускают такой режим. Таким образом, достигается широкое применение разрядно-логарифмической арифметики, другими словами пользователю возможно не изучать РЛ арифметику, а достаточно описать классы соответствующих объектов. Интерфейс пользователя позволяет без дополнительных знаний ввести в программу описания, достаточные для решения задачи.

Реализация задания с применением РЛ арифметики исполняется с автоматическим изменением размерностей мантисс для операндов. Такая варьируемая размерность позволяет достигать различных уровней точности, различного количества достоверных знаков результата.

Однако следует заметить, что отображение рациональных чисел невозможно выполнить точно, без округления и поэтому фиксация параметра Q обязательна. Особенность выполнения операции умножения состоит в обработке массива частичных произведений, количество элементов которого может достигать нескольких тысяч. Операции деления и извлечения корня могут также выполняться с «бесконечными результатами». Поэтому выполнение с «бесконечной разрядностью» представляет несомненный интерес для исследователей компьютеров и тестирования математического обеспечения. Для практических расчетов на ЭВМ следует применять варианты выбора основного параметра, определяющего размерность мантисс, параметра Q – количество значащих единиц в операнде.

Определены два варианта вычислительных моделей:

1) модель вычислений с априорным заданием Q;

2) модель вычислений с оперативным заданием Q.

Первая модель реализуется для задач с этапом предварительного просчета:

- величина Q задается из статистики решения подобных заданий;
- значение Q определяется на основе параметров индуктивных моделей, моделей с самообучением.

Для реализации индуктивной модели выполняется расчет с применением типового математического обеспечения с фиксаций результатов по конечному значению. Затем выполняются расчеты с применением РЛ арифметики с определением достаточного значения Q: при таком значении количества значащих единиц расчетные значения (результаты) должны совпадать. Проверка выполняется на нескольких выборках данных. Перенастройка модели выполняется аналогично после нескольких этапов расчетов.

Модель с оперативным заданием реализуется в процессе применения РЛ арифметики.

Корректировка Q выполняется на любом этапе решения задачи: начальном, промежуточном, конечном.

Примером конечного варианта является расчет обратных матриц A^{-1} : результат расчета обратной матрицы умножается на прямую матрицу A – произведение составляет единичную диагональную матрицу. При отклонениях от единичных значений корректируется значение Q и расчет обратной матрицы повторяется до получения точных значений произведения прямой и обратной матрицы.

Например, при вычислении обратной матрицы Гильберта n-го порядка

1 1/2 1/3 1/4 ……..$1/n$
1/2 1/3 1/4 1/5 ……..$1/n$–1
1/3 1/4 1/5 1/6 ……..$1/n$–2
………………………………
$1/n$ $1/n$–1 ……………………….

при различных значениях Q получаем значения диагональной матрицы:

(10) –2.2445656666
1.54678867989
3.66667899465
……………
0.99965434566
(20) 1.24774888929
1.39000388990
0.96799699555
……………
1.00059599444
(30) 1.01010095769
1.01233310000
1.00033111112
………………
1.0000700007
(40) 1.0000000000
1.0000000000
1.0000000000
……………..
1.0000000000

Такие подходы корректировки применяются также при расчетах с невязками, итеративными вычислениями.

Особенностью применения такого корректирования являются условия неограниченного времени решения и достаточно больших ресурсов, а также невозможность решения такой задачи другими известными методами.

Модель корректировки на других этапах решения задачи определяется правилами изменения размерностей мантисс согласно арифметико-алгоритмическому базису разрядно-логарифмической арифметики и структуре данных РЛ кодов.

При сложении РЛ операндов с Q_1 и Q_2 возможны варианты:

а) сложение с увеличением Q результата на +1;
0.4.6.4.2.1 + 0.4.7.4.2.1.= 0.5.7.6.5.3.1.

б) сложение со срединным увеличением Q результата;
0.6.8.5.3.2.1.0. + 0.4.6.3.–1.–3. =
= 0.9 .8.6.5.4.2.1.0.–1.–3.

в) сложение с суммированием Q_1 и Q_2;
0.6.7.4.3.1.–4.–5. + 0.4.-6.–7.–9.–12.=
= 0.10.7.4.3.1.–4.–5.–6.–7.–9.–12.

г) уменьшение Q результата.
0.4.7.6.5.4. + 0.2.8.4.=0.1.9.

При вычитании также возможны разные варианты изменения Q:

а) нулевое значение Q
0.4.5.3.1.-4. – 0.4.5.3.1.–4.= 0.0.

б) усредненное уменьшение Q
0.5.6.3.1.–1.–7. – 0.4.5.3.1.= 0.3.5.–1.–7.

в) увеличение значения Q
0.2.4.2. – 0.1.–8.=
=0.11.4.1.0.–1.–2.–3.–4.–5.–6.–7.–8.

При умножении и делении ограничение по Q не выполняется только при малых значениях этого параметра и при точном результате определения частного. Во всех других случаях результат корректируется в соответствии с фиксированным значением параметром Q.

Точность представления РЛ данных при фиксированном параметре количества значащих единиц зависит от величины, определяемой разностью

$$M = N_1 - N_Q,$$

где M – мантисса, N_1 – код первой значащей единицы (старшей), N_Q – код младшей значащей единицы.

Вес младшего разряда N_Q является тем граничным значением, по которому определяются оценки по точности [3, 4, 5, 6].

Основным тезисом при выборе модели вычислений с оперативной корректировкой Q является исключение погрешностей при реализации обработки. Другими словами не увеличение погрешности, которая есть во входных данных.

Этапы реализации модели состоят в следующем:

1) зафиксировав параметр Q, равный двойному формату по точности для заданной ЭВМ, выполняется перевод данных в РЛ форму;

2) в массиве данных определяется $M = N_1 - N_Q$, значение которой и определяет Q при расчетах на начальном этапе;

3) корректировка значений Q выполняется после реализаций операций сложения и вычитания, в случае когда изменен вес младшего разряда (код младшей значащей единицы). При этом вычисляется $M = N_1 - N_Q$ по результату последней операции и новое значение Q определяет последующие вычисления.

Выводы

Разрядно-логарифмическая арифметика является реализацией нового подхода к увеличению точности обработки на компьютерах. Такой подход также определяет уровень интеллектуализации компьютерных средств, так как имитируется среда, настраиваемая на условия задачи без управления со стороны пользователя.

Список литературы

1. Гамаюн В. П. Макрооператорные методы вычисления многоместных произведений // Микропроцессорные системы и их применение. – Киев: Ин-т кибернетики, 1990. – С. 23–28.

2. Гамаюн В. П. Применение разрядно-логарифмического представления данных для реализации операций умножения, возведения в степень и извлечения корня // Электронное моделирование, 1997. – №5. – т.19. – С. 70–79.

3. Кнут Д. Искусство программирования на ЭВМ. Получисленные алгоритмы. – М.: Мир, 1990 – 724 с.

4. Матов В. И и др. Бортовые вычислительные машины и системы/ – М.: Высшая школа, 1988. – 216 с.

5. Карцев М. А. Арифметика цифровых машин / – М.: Наука, 1969. – 576 с.

6. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.