УДК 519.47



**Бухман С. Є.**

# ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗКЛАДУ РУХУ ПОВІТРЯНИХ СУДЕН ЗА УМОВАМИ ПРОТИРІЧ У ЦІЛЬОВИХ ФУНКЦІЯХ

Інститут комп'ютерних технологій Національного авіаційного університету

*В даній статті описане дослідження методів графічного планування авіаліній, що базується на теорії графів. Розглянуті можливості використання цієї теорії при проектуванні оптимального графіку інтенсивності руху повітряного транспорту середніх і великих авіаліній. Обрані та випробовані найбільш прийнятні рішення з точки зору проектування оптимального графіку.*

## Постановка задачі

Задачі побудови розкладу виникають кожного разу, коли існує можливість вибору того чи іншого порядку виконання робіт. Часто такі задачі вирішуються простим розташуванням робіт в порядку їх надходження до системи, а інколи випадково або інтуїтивно. Якщо мова йде про побудову оптимального в тому чи іншому сенсі розкладу, задачі його створення виявляються достатньо складними. Як правило, критерії оптимальності протирічать одне одному. Для розв'язання цих протиріч та знаходження узгодженого оптимального рішення пропонується використовувати метод Парето.

Створення розкладу руху повітряних суден для середньої чи великої авіакомпанії вимагає розробки системи планування, поточної оцінки його якості та можливості автоматичного чи ручного внесення змін у реальному масштабі часу.

## Аналіз досліджень і публікацій

В найбільш загальному формулюванні задачі складання розкладу полягають у наступному – за допомогою деякої множини ресурсів або обслуговуючих пристроїв повинна бути виконана деяка фіксована система завдань. Мета полягає в тому, щоб при заданих властивостях завдань і ресурсів та обмеженнях, що накладені на них, знайти ефективний алгоритм упорядкування завдань, що оптимізує або прагне оптимізувати бажану міру ефективності [1].

В теорії розкладів основна увага приділяється питанням оптимального розподілення кінцевої множини вимог, що обслуговуються детермінованими системами з одним чи декількома приладами, при різних припущеннях щодо характеру їх обслуговування [2]. Вся інформація, на основі якої приймаються рішення про впорядкування завдань системи планування розкладу руху повітряних судів (час, вартість, обмеження у виконанні, необхідні ресурси) відома заздалегідь, тому модель такої системи є детермінованою. Модель процесу побудови розкладу є сукупністю моделей, що описують ресурси, системи завдань, обмежень побудови ті критеріїв оцінки [1].

В якості ресурсів в більшості систем виступають прилади, які в даному випадку є повітряними суднами (ПС), а у якості завдань або вимог – рейси, що ними виконуються.

Обслуговуюча система називається одностадійною (з одним або декількома паралельними приладами), якщо кожна вимога може бути повністю обслугованою кожним із приладів. Тривалості $t_{iL}$ обслуговування кожної вимоги $i \in N$ кожним приладом $1 \leq L \leq M$ передбачаються заданими [2].

У багатостадійних системах процес обслуговування вимоги $i$ включає $r_i \geq 1$ послідовних стадій. При цьому кожній вимозі $i \in N$ кожної стадії $1 \leq q \leq r_i$ його обслуговування зіставляється деяка множина $M_q^{(i)} \subseteq \{1,2,...,M\}$ приладів. Вимога $i$ на стадії $q$ може бути обслугована будь-яким приладом $L \in M_q^{(i)}$ [2].

Незважаючи на те, що обслуговування авіарейсу можна розглядати як певну послідовність процесів (наземне обслуговування ПС, посадка пасажирів, зліт, політ, посадка і т. ін.), в межах планування розкладу варто представляти його як одне ціле. Отже, виконання однієї вимоги здійснюється в цьому випадку одним приладом, і, таким чином, можна стверджувати, що система планування авіаційного розкладу є одностадійною.

В залежності від характеру обслуговуючої системи процес обслуговування вимоги приладом повинен або протікати безупинно, або можуть допускатися переривання з наступним до обслуговуванням вимоги [2]. При складанні розкладів без переривань виконання завдання, раз почавшись, не може бути перервано, тобто виконання завдання завжди доходить до кінця. В іншому випадку - при складанні розкладів з перериваннями - дозволяється переривати завдання і знімати їх із приладу, при цьому вважається, що загальний час, необхідний для виконання завдання, залишається незмінним і при перериваннях відсутні втрати часу обслуговування (тобто виконання перерваного завдання відновляється з того місця, у якому відбулося переривання) [1]. Очевидно, що розклад руху є системою без переривань, тому що кожний конкретний рейс в певний момент часу виконується тільки одним ПС.

Існує ще один підхід до формування розкладу – складання його за допомогою списку. Такий спосіб передбачає, підготовку впорядкованого список з $N$ завдань. Цей список часто називають списком пріоритетів [1]. Послідовність, відповідно до якої завдання призначаються на прилади, складається шляхом багаторазового перегляду списку. Зокрема, якщо з'являється прилад, що звільнився, то список починає проглядатися спочатку і проглядається доти, поки не знайдеться перше невиконане завдання $i$, що готове до виконання. Завдання вважається готовим до виконання на даному приладі, якщо виконання всіх попередників $i$ завершене і наявної кількості ресурсів досить для того, щоб забезпечити необхідний об'єм ресурсів для виконання. Це завдання призначається для виконання на вільний процесор. При перегляді списку переривання не розглядаються. Таким чином, розклади, складені за допомогою списку, формують підмножину розкладів без переривань [1].

Формування розкладу за допомогою списку виявляється дуже цікавим засобом у випадку розкладу руху ПС, адже ефективність його функціонування базується на багатьох критеріях, які легко представити у вигляді списку пріоритетів. Серед таких критеріїв є параметри часу (час стоянок і стикувань, час польоту по певному напрямку, переважний час виконання польоту по відношенню до часу доби та до паралельних рейсів у певному напрямі), параметри, пов'язані з типом ПС (кількість пасажирських крісел, дальність польоту, обмеження по рівню шуму для двигунів певних ПС), та ін. Списком таких критеріїв широко оперують комерційні служби авіакомпаній при плануванні рейсів та оцінці їх якості.

Крім дозволу або заборони переривань, до розкладу можуть пред'являтися й інші вимоги, що випливають з постановки конкретної розглянутої задачі. Для кожної вимоги $i \in N$ може бути заданий момент часу $d_i \geq 0$) її надходження в систему (у чергу на обслуговування), починаючи з якого воно може обслуговуватися, і директивний термін $D_i \geq 0$, до якого необхідно або бажано завершити його обслуговування [2]. Існують задачі, в яких директивні задачі не повинні порушуватись. Тоді вони називаються крайніми термінами [1].

В межах системи планування розкладу, директивними і крайніми термінами позначаються часові нормативи стоянок ПС. Наприклад в базовому аеропорті між рейсами час стоянки повинен складати 50 хв. – 1 год. 15 хв. Таким чином, директивний термін в цьому випадку дорівнює 50 хв., а крайній – 1 год. 15 хв.

Кожна вимога не може одночасно обслуговуватися двома і більше приладами і кожен прилад не може одночасно обслуговувати більш однієї вимоги. При цьому припущенні розклад можна розглядати як сукупність $s=\{s_1(t), s_2(t), ..., s_M(t)\}$ кусочно-постійних неперервних зліва функцій $s_L(t)$, $L=\overline{1,M}$, кожна з яких задана на інтервалі $0\leq t<\infty$ і приймає значення 0, 1, ... $n$. Якщо $s_L(t')=i\neq 0$, тј в момент часу $t=t'$ прилад $L$ обслуговує вимогу $i$. Якщо $s_L(t')=0$, то в момент часу $t=t'$ прилад $L$ простоює. Іноді замість функцій $s_L(t)$, $L=\overline{1,M}$, що описують функціонування кожного приладу, використовують аналогічні функції $s_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, що описують процес обслуговування кожної вимоги ($s_i(t')=0$, якщо в момент часу $t=t'$ вимога $i$ не обслуговується, і $s_i(t')=L$. якщо в момент часу $t=t'$ вимога $i$ обслуговується приладом $L$) [2].

Найбільш розповсюджений спосіб оцінки якості розкладів для детермінованих систем обслуговування полягає в наступному. Кожному розкладові s відповідає вектор $\bar{t}(s)=(\bar{t}_1(s),\bar{t}_2(s),...,\bar{t}_n(s))$ моментів завершення обслуговування вимог при цьому розкладі. Задається дійсна неубуваюча функція $n$ змінних $F(x) = F(x_1, x_2,..., x_n)$. Якість розкладу $s$ характеризується значенням цієї функції при $x=\bar{t}(s)$. З двох розкладів кращим вважається той, якому відповідає менше значення $F(x)$. Розклад, якому відповідає найменше значення $F(x)$ (серед усіх припустимих розкладів), називається оптимальним [2].

При завданні функції $F(x)$ кожній вимозі $i$, як правило, зіставляють деяку монотонно зростаючу цільову функцію $\varphi(t)$, що виражає в кількісному відношенні збиток, якщо обслуговування цієї вимоги завершиться в момент часу $t$. Якість розкладу $s$ характеризується сумарними або максимальними витратами, які необхідно зробити при обслуговуванні вимог за цим розкладом.

$$F_\Sigma=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\left(\bar{t}_i(s)\right) \text{ або } F_{\max}(s)=\max_{1\leq i\leq n}\left\{\varphi_i(\bar{t}_i(s))\right\}$$

Зокрема, якщо $\varphi_i(t)=t$, $i=\overline{1,n}$, тобто $F_{\max}(s)=\max\limits_{1\leq i\leq n}\left\{\bar{t}_i(s)\right\}$ — момент завершення обслуговування усіх вимог (загальний час обслуговування). У цьому випадку $F_{max}(s)$ позначають через $\bar{t}_{\max}(s)$, і розклад $s^*$, що доставляє найменше значення $\bar{t}_{\max}(s)$, називають оптимальним по швидкодії розкладом [2]. Часто в якості показників ефективності розкладу виступають довжина розкладу або максимальний (чи середній) час його проходження [1]. У випадку конструювання розкладу руху повітряних суден, критерієм його якості не може бути його довжина, або час проходження, адже його оптимальність досягається, в першу чергу, не через швидке виконання або коротший шлях. Ефективність такого розкладу зумовлена, скоріше, певним розподілом рейсів протягом доби, відповідністю ПС тим задачам, які він повинен виконувати, маніпулюванням часом прильоту та вильоту транзитних рейсів та ін.

Таким чином, оцінка якості розкладу, яка базується на його довжині, чи на часі проходження розкладу не є доцільною, якщо мова йде про розклад руху повітряних суден.

### *Формулювання цілей статті*

Згідно з класичною теорією розкладів, система планування розкладу ПС є одностадійною системою, побудованою без переривань з використанням списку. Оцінювати її якість можна за допомогою штрафних функцій, директивних і крайніх термінів

З іншого боку, процес побудови алгоритму планування такого розкладу за допомогою стандартних алгоритмів теорії розкладів виявляється досить складним, зважаючи на те, що основними критеріями ефективності розкладу, згідно з класичною теорією розкладів є його довжина та час проходження.

Задача побудови розкладу руху ПС зводиться до пошуку оптимального розподілення значень часу вильотів рейсів за умови обмеженості ресурсів (ПС) та мінімізації часу наземного обслуговування, часу очікування транзитного рейсу і т. ін., з урахуванням певних критеріїв, що складають список пріоритетів.

### *Основний матеріал досліджень*

Планування розкладу базується на певних критеріях, серед яких є параметри часу (час стоянок і стикувань, час польоту по певному напрямку, переважний час виконання польоту по відношенню до часу доби та до паралельних рейсів у певному напрямі), параметри, пов'язані з типом ПС (кількість пасажирських крісел, дальність польоту, обмеження по рівню шуму для двигунів певних ПС), та ін.

Критерії планування можна об'єднати в групи та побудувати список їх пріоритетів.

В якості першої групи критеріїв планування розкладу руху ПС, можна виділити кількість рейсів за тиждень $k_w$. Якщо $k_w<7$, тобто рейси відбуваються менш, ніж 7 разів на тиждень, або навпаки, $k_w>7$, в такому разі рейси повинні бути рівномірно розподілені протягом тижня, або протягом доби. Цей критерій складає першу групу – «критерії тижня».

Друга група критеріїв – критерії доби. Політика майже всіх сучасних авіакомпаній щодо розташування рейсів протягом доби, полягає в тому, що перевага віддається польотам в денний час. Отже першим критерієм цієї групи є вищий пріоритет денних рейсів, ніж нічних. Наступним параметром є розподілення за умовними категоріями – ділові рейси, виліт яких повинен припадати на ранок чи день, або туристичні рейси, час вильоту є менш важливим. Дальні (трансконтинентальні) перельоти плануються таким чином, щоб їхнє прибуття приходилося на ранок або день за місцевим часом аеропорту призначення. Окремим критерієм є фіксований час вильоту певних рейсів. Це, як правило, рейси, що виконуються протягом кількох років у той самий час і їх зсув у розкладі є небажаним. Останнім параметром регулюється періодичність технічного обслуговування ПС. Для цього передбачається його повернення один раз на добу до базового аеропорту.

Третя група критеріїв – географічні. Тут враховується той факт, що рейси у певному напрямку відбуваються з аеропортів різних міст, і тому можуть виконуватися по черзі, без повернення в базовий аеропорт.

Четвертою групою критеріїв є залежність часу вильоту ПС від розкладу інших авіакомпаній. Цим критерієм враховується недоцільність одночасного виконання рейсів в одному напрямі різними перевізниками.

У групі «транзитних критеріїв» відображається залежність конкретного рейсу від інших транзитних рейсів. Час між прильотом одного і вильотом іншого транзитного рейса $t_c$ (час стикування) знаходиться в межах $30 \leq t_c \leq 180$ хв. Більші проміжки не вважаються стикуванням, а менші неприпустимі. Окрім того, в залежності від того, до якого умовного типу належить певний рейс (міжнародні рейси, міжнародні рейси, що мають стикування, внутрішні рейси та внутрішні рейси, що мають стикування) йому надається йому надається відповідний пріоритет при плануванні.

У технічних критеріях відображуються основні параметри ПС – дальність його польоту в залежності від напрямку, кількість пасажирських крісел, що залежить від очікуваної кількості пасажирів і тип двигунів. Останній фактор накладає обмеження на використання певних типів ПС у деяких аеропортах.

Група критеріїв оперативного контролю відповідає за дотримання часових норм наземного обслуговування ПС, які складають: в базовому аеропорті $75 \leq t_{gr\ base} \leq 90$ хв, а в транзитному $50 \leq t_{gr\ transit} \leq 60$ хв.

Всі наведені критерії, по-перше, є умовними, а по-друге – можуть вміщувати протиріччя одне одному. Вони залежать від економічної стратегії авіакомпанії та можуть змінюватись в залежності від кроків конкурентів, ситуації на ринку та намірів керівництва. Тому в системі планування розкладу повинна передбачатись можливість зміни ваги пріоритетів та їх порядку.

Як правило, для врахування протиріч у цільових установках один з критеріїв вибирають основним (в нашому випадку – критерій першого пріоритету), а інші у в певному сенсі можна розглядати як деяке обмеження, наприклад, як обмеження по часу, якщо мова йде про критерії доби. В математичному сенсі таке обмеження виражається через нерівності.

Оскільки критерії представляють собою систему обмежуючих нерівностей, для пошуку оптимального рішення досить ефективними є методи оптимізації функцій з обмеженнями [3,4]. При цьому найбільш доцільно використовувати або методи послідовної безумовної оптимізації Фіакко та Мак-Корміка, або двоїсті та прямі методи, пов'язані з функціями Лагранжа [5]. За обома підходами треба будувати штрафну або бар'єрну функцію. Оскільки бар'єрні функції, як відомо, мають суттєві недоліки, що знижують їх практичну цінність [5], будемо використовувати штрафні функції. У припустимій області вони приймають нульові значення, а поза нею – позитивні і швидко зростають при збільшенні нев'язок обмежень. Типова форма завдання штрафних функцій така:

$$\Phi(c(\mathrm{x}),r)=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\psi_i(c_i(\mathrm{x})),$$

де $r$ – позитивне число, функції $\psi_i(t)$ визначені та неперервні при будь-якому $t$ і зростають до $+\infty$ при $t\geq|t_p|$, $t_p$ – деяке граничне значення.

Вид функції та швидкість цього зростання залежать від конкретного критерію, який переведений в розряд обмеження. Звичайно економічні критерії є лінійно зростаючими, енергетичні критерії – квадратично зростаючими [4]. Критерії часу для задач авіаційних перевезень так чи інакше переходять в економічні: затрати ростуть пропорційно витраченому часу, але тільки до певного рубежу. Після цього задача може взагалі втратити сенс, відповідно до чого функція $\psi_i(t)$ стає безкінечною.

Для урахування питомої ваги (пріоритету) того чи іншого критерію застосуємо метод компромісів Парето [6]. Припустимо, що зроблено якийсь вибір множини критеріїв $x^*$. Припустимо, що існує якийсь інший вибір $\bar{x}$, і що для будь-якого критерію $f_i(x)$ мають місце такі нерівності:

$$f_i(\hat{x})\geq f_i(x^*) \qquad i=1,2....,n \qquad (1)$$

Очевидно, що вибір $\bar{x}$ більш привабливий, ніж $x^*$. Тому всі вектори, що задовольняють нерівності (1), повинні бути виключені з розгляду. Має сенс аналізувати тільки ті вектори $x^*$ для яких не існує відповідного вектора $\hat{x}$, для якого за всіма критеріями нерівності (1) є справедливими. Множина таких величин $x^*$ складає множину Парето, а вектор $x^*$ відомий як результуючий вектор Парето, який не можна покращити, якщо з нерівності $f_i(\hat{x})\geq f_i(x^*)$ для будь-якого $i$ витікає $f_i(\hat{x})\geq f_i(x^*)$. Так званий «Принцип Парето» заключається в коректному виборі вектора $x$, який належить до множини Парето.

За методом Парето треба виконати такі дії.

1. Відділити значущі параметри від незначущих:

$$x=(\hat{x},x^*),$$

де $x^*$ – незначущі параметри (в нашому випадку – десятки або сотні, в залежності від розміру авіакомпанії), $\hat{x}$ – значущі параметри (одиниці або десятки).

2. Шукати компроміс $\hat{F}(\hat{x})\rightarrow\max$, $F(x)=\hat{F}(\hat{x},x^*,\xi)$, де $\xi$ – малий параметр.

3. Прийняти відповідальне рішення типу $\hat{F}(\hat{x},x^*,\xi)\approx\hat{F}(\hat{x},0)$. Таке рішення приймає, як правило, уповноважена особа (особа, що приймає рішення, ОПР).

4. Ставимо задачу оптимізації:

$$\hat{F}(x)\approx\hat{F}(\hat{x},0)\underset{\hat{x}\in X}{\rightarrow}\max,$$

де $X$ – множина припустимих параметрів; $\hat{x}$ – параметри компромісу.

5. Будуємо нову цільову функцію, яка залежить від векторного параметра $\lambda_i \geq 0$:

$$W(\hat{x},\lambda) = \max_i \lambda_i (\frac{\hat{F}_0 - F_i(\hat{x})}{\hat{F}_0}),$$

де $F_0$ – граничні можливості (бажаний ідеальний розклад);

$F_i$ – реальні можливості, обмежені особою, що приймає рішення

$\lambda_i \geq 0$ – компоненти так званого вектора концепцій розкладу $\vec{\lambda}$. Вони показують, наскільки важливою є для нас $i$ – тий параметр розкладу. На компоненти вектора $\vec{\lambda}$ накладається нормуюче обмеження $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Ясно, що реальний розклад завжди гірше ідеального, тому величина $[\hat{F}_0 - F_i(\hat{x})]/\hat{F}_0$ завжди позитивна та менше одиниці. Вона є індикатором того, наскільки реальний розклад програє ідеальному за показником $F_i$.

6. Знаходимо показник, за яким реальний розклад програє ідеальному:

$$\bar{l} = \max_i \frac{\hat{F}_0 - F_i(\hat{x})}{\hat{F}_0}$$

7. Знаходимо вектор $\hat{x}_* \in \aleph_*$, для якого $\max_i \frac{\hat{F}_0 - F_i(\hat{x})}{\hat{F}_0} \to \min$. Це означає, що для множини $\aleph_*$ параметрів вектора $\hat{x}_*$ реальний розклад найбільш близький до ідеального.

8. Формуємо новий функціонал $W(\hat{x},\vec{\lambda})$, в який входить вектор концепцій.

9. Будуємо функцію $\hat{x}(\hat{\lambda})$ шляхом побудови у просторі $\lambda$ сітки з вузлами $\lambda_k$. Для кожного $\lambda = \lambda_k$ розв'язуємо задачу $W(\hat{x},\lambda) = \max_{x \in X}$.

10. Визначаємо параметри розкладу $\hat{x} = \hat{x}(\hat{\lambda})$, перевіряємо, наскільки вони відхиляються від ідеальних і яка ціна відхилення (величини тих чи інших штрафних функцій).

## Висновки

1. Можливість поєднання методів теорії розкладів та методу компромісів Парето базується, по суті, на природній внутрішній єдності цих методів. Завдяки цьому можливо, по-перше, врахувати формальні та неформальні показники оптимальності, а по-друге, знизити розмірність задачі оптимізації. Це дає можливість модифікації розкладу у поточному масштабі часу.

2. Штрафні функції для задачі, що розглядається, можуть бути як лінійними, так (частіше за все) кусково-лінійними або нелінійними. За такими штрафними функціями можна успішно використовувати стандартні алгоритми послідовності задач безумовної оптимізації. Довжина цієї послідовності залежить від вдалого вибору штрафних функцій.

## Список літератури


1. *Коффман Э. Г.* Теория расписаний и вычислительные машины. – М.: Наука, 1984. – 334 с.

2. *Танаев В. С.* Теория расписаний. – М.: Наука, 1989. – 327 с.

3. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

4. *Реклейтис Г.*, *Рейвиндрон А.*, *Рэгсдел К.* Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 349 с.

5. *Численные* методы условной оптимизации / Под ред. Ф. Гилла и У. Мюррея: Пер. с англ. под ред. А.А. Петрова: М.: Мир, 1977. – 290 с.

6. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.