УДК 004.92

Фесенко М. Б. канд. техн. наук

ТРИВИМІРНЕ ОБЕРТАННЯ ОБ'ЄКТУ НАВКОЛО ДОВІЛЬНОЇ ВІСІ

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України

На основі класичного алгоритму запропоновано новий варіант виведення формули для тримірного обертання навколо довільної вісі, який може бути практично застосований для автоматизації розрахунку польотів літаків, ротаційного переміщення роботів, комп'ютерного графічного перетворення об'єктів і обробки зображень.

Вступ

Процедура обертання об'єкту навколо вісі використовується при побудові аксонометричних проекцій комп'ютерної графіки, представленні та обробці зображень, для опису та орієнтації обертаємого твердого тіла навколо точки відносно абсолютної системи координат. Якщо при цьому використовувати одиничні радіуси, то можливо зробити перехід від полярних координат до визначення тригонометричних функцій як направляючих відношень. Так, напрямні косинуси n_1, n_2, n_3 є три складові компоненти одиничного вектора $\bar{n}$ (рис. 1). В авіації для опису руху

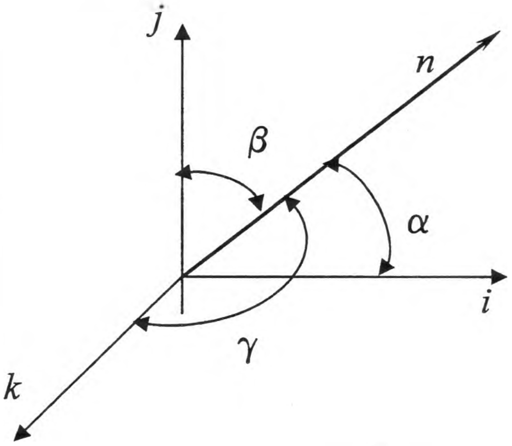

Рис. 1. Одиничний вектор $\bar{n}$

повітряних суден використовується так звана третя система кутів Л.Ейлера (рис.2), якій відповідає наступна послідовність виконання поворотів: рискання, або поворот $R(\Psi)$ на кут Ψ навколо вісі OZ, що співпадає з продольною віссю літального апарату; тангаж, або поворот $R(\Theta)$ на кут Θ навколо вісі OX; та крін, або поворот $R(\phi)$ на кут ϕ навколо вісі OY. Загальна матриця потрійного повороту $R(\Psi, \Theta, \phi)$, утворюється в результаті множення трьох матриць $R(\Psi)$, $R(\Theta)$ та $R(\phi)$. Однак для повного опису довільного графічного об'єкту недостатньо тільки трьох змінних – рискання, тангажу та крену, а необхідно використовувати усі дев'ять елементів матриці повороту. Матриця повороту визначає положення основних вісей обернутої системи координат відносно абсолютної системи координат. Таким чином, матриці повороту дуже часто використовуються на практиці. Основою побудови матриць повороту є процедура обертання навколо довільної вісі, яку можливо використовувати як самостійно, коли положення вісі ще не зорієнтовано відносно інших систем координат, або після орієнтації для автоматизації обчислень. Тобто матриця повороту є приватним випадком обертання об'єкту навколо довільної вісі.

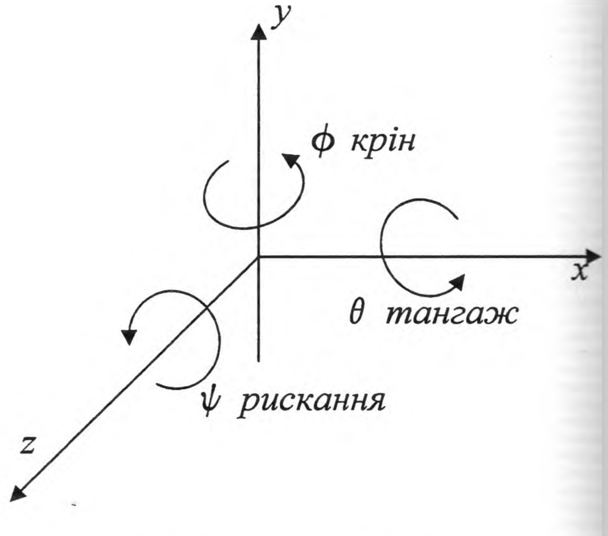

Рис. 2. Третя система кутів Л. Ейлера

x, x^*

Зручним апаратом опису кінцевих поворотів рівномірного кутового руху в тривимірному просторі є представлення обертань за допомогою алгебри кватерніонів, яку створів У. Р. Гамільтон. Коли у кватерніона Q компоненти q_1, q_2, q_3 дорівнюють нулю, то він є скаляром, тобто є звичайним дійсним числом $Q_1=q_0$. Коли ж у кватерніона Q компонента q_0 дорівнює нулю, то він стає вектором $Q_2=q_1i+q_2j+q_3k$, тобто направленим відрізком в тривимірному просторі, проекції якого на координатні вісі O_x, O_y, O_z відповідно дорівнюють q_1, q_2, q_3. При цьому базові компоненти кватерніона i, j, k відобразяться у вигляді направлених відрізків одиничної довжини, що розташовуються відповідно на вісях O_x, O_y, O_z декартової системи координат. Згадаємо, що одиничний вектор будь-якої орієнтації зветься ортом – ця назва є скорочення слова «орієнтація». Отже, в загальному випадку кватерніон Q може бути представлений у вигляді суми своїх скалярної Q_1 та векторної Q_2 частин $Q=Q_1+Q_2$. Позначимо орт вектора Q_2 через $n=\overline{ON}$, де O- початок координат тривимірного простору (рис3). Він має довжину $|Q_2|=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}$.

Для будь-якого довільного вектору $\overline{Q_2}=q_1\bar{i}+q_2\bar{j}+q_3\bar{k}$ цей одиничний вектор визначається співвідношенням $\bar{n}=\frac{\overline{Q_2}}{|Q_2|}$, де $|Q_2|$ є абсолютна величина вектора, а i, j, k – проекції одиничного вектора $\bar{n}$, що відкладені вдовж вісей координат x, y, z відповідно. Звідси випливає, що: $n_1=q_1/|Q_2|=\cos\alpha$, $n_2=q_2/|Q_2|=\cos\beta$, $n_3=q_3/|Q_2|=\cos\gamma$, де: α, β, γ - кути між одиничними векторами $\bar{n}$ та $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, відкладеними по вісям координат x, y, z. Оскільки точка Q_2 є довільна точка на вісі $\overline{0N}$, а не кінець одиничного вектора $\bar{n}$, тобто $Q_2(q_1, q_2, q_3)$, тому напрямні косінуси визначимо по наступним формулам: $\cos\alpha=\frac{q_1}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}=n_1$, $\cos\beta=\frac{q_2}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}=n_2$, $\cos\gamma=\frac{q_3}{\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}}=n_3$. Таким чином, одиничний вектор задається у вигляді: $\bar{n}=n_1\bar{i}+n_2\bar{j}+n_3\bar{k}$, або у матричній формі: $\bar{n}=[n_1\ n_2\ n_3]$.

Відмітимо, що для множення кватеріонів виконується асоціативний закон, але не виконується комутативний закон, як і у алгебри матриць. У загальному випадку додаток двох векторів тривимірного простору, записаних у формі кватерніонів, також уявляє собою кватерніон. Так, коли $Q=[0, q_1, q_2, q_3]$, а $Q^1=[0, q_1, q_2, q_3.]$, то їх додаток в цьому випадку $QQ^1=-Q_2Q_2^1+Q_2\times Q_2^1$, при цьому вектора розглядаються як окремий випадок кватерніонів. Справа у тому, що саме поняття додатка двох векторів запозичене із зчислення кватерніонів. При цьому взяту зі знаком мінус скалярну частину того кватерніону, який отримується в результаті множення двох векторних частин кватерніонів-співмножників в векторному зчисленні прийнято називати скалярним добутком двох векторів, без нагадування, що це є частини кватерніонів, а векторну частину того ж додатку кватерніонів в векторному зчисленні прийнято називати векторним добутком двох векторів.

Процедура тривимірного обертання навколо довільної вісі полягає в лінійному переносі зображення, обертанні навколо початку координат та зворотному лінійному переносі в вихідні положення.

Отже, допустимо, що існує довільна вісь обертання $\overline{0N}$, яка зміщена таким чином, щоб вона проходила через початок координат 0 системи координат xyz (рис.3). Нехай точка виконує обертання на зміщеному об'єкті навколо вісі $\overline{0N}$, яка перпендикулярна площині δ, на кут θ по траєкторії кола радіусу R, що розташовано на цій площині. Розглянемо ділянку цієї траєкторії між положеннями цієї точки P та P^*, при цьому перше положення оберемо за початкове, а друге , після виконання точкою операції обертання на кут θ, - за перетворене. Зорієнтируємо довільну вісь обертання за допомогою системи координат з центром 0_{xyz} та направимо вздовж довільної вісі $\overline{0N}$, одиничний вектор $\vec{n}$.

Визначимо скалярний та векторний добутки векторів, які необхідні при висновках векторов $\vec{P}$ і $\vec{P}*$. Оскільки $\vec{P}$ = [*x y z 1*], а $\vec{n}$ = [n_1 n_2 n_3], тому скалярний добуток $P{\cdot}n = xn_1 + yn_2 + zn_3$ може бути вираженій у матричній формі наступним чином:
$P{\cdot}n = [x \quad y \quad z \quad 1]\cdot\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Справедливий також звичайний вираз скалярного добутку: $\overrightarrow{P{\cdot}n} = |P|\cdot|n|\cdot\cos\varphi = |P|\cdot\cos\varphi$, оскільки $|n| = 1$, і де ϕ - кут між векторами $\vec{P}$ та $\vec{n}$.

Векторний добуток представимо співвідношенням:

$$n \times P = [xyz1]\cdot\begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 & 0 \\ -n_3 & 0 & n_1 & 0 \\ n_2 & -n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Справедливий також звичайний вираз векторного добутку:
$\vec{n} \times \vec{P} = |n|\cdot|P|\cdot\sin\varphi = |P|\cdot\sin\varphi$, оскільки $|n| = 1$, і де ϕ – кут між двома векторами $\vec{n}$ та $\vec{P}$.

Перетворена точка $P*$ буде мати координати [$x*y*z*1$] відносно перетвореної системи координат $x*y*z*$, вісі та початок координат якої співпадають з вихідною системою координат *xyz*.

З метою подальшого порівняння розглянемо спочатку окремо традиційний шлях та пропонуємий.

Традиційний [1] шлях виведення формули потребує наступних геометричних побудувань: точки P та $P*$ з'єднаються між собою(цей вектор не використовується при виведенні, але він є на авторському рисунку [1]), з початком координат 0_{xyz} та точкою Q_2 спрямованими векторами та перпендикулярно площині, де розташований векторний трикутник $0PQ_2$, з точки $P*$ опускається перпендикуляр $P*S$ на вектор $\overline{Q_2P}$ у точку S. Із розглядання трикутників $0Q_2P*$, Q_2P*S та $0Q_2P$ складається система наступних равенств:

$$\overline{0Q_2} + \overline{Q_2P^*} = \overline{0P^*} \quad ,$$

$$\overline{Q_2P^*} = \overline{Q_2S} + \overline{SP^*} \quad ,$$

$$\overline{0Q_2} + \overline{Q_2P} = \overline{0P} \quad \text{, або} \quad \overline{Q_2P} = \overline{0P} - \overline{0Q_2}.$$

Довжина вектора $\overline{Q_2S}$, що спрямований вздовж вектора $\overline{Q_2P}$, визначається співвідношенням $\overline{Q_2S} = \left|\overline{Q_2P}\right|\cdot\cos\theta$. Оскільки модулі векторів $\left|\overline{Q_2P}\right| = \left|\overline{Q_2P^*}\right|$ як радіуси кола, то замість $\left|\overline{Q_2P}\right|$ підставляється модуль $\left|\overline{Q_2P^*}\right|$. При цьому модуль змінюється на різницю між векторами, тобто: $\overline{Q_2S} = \left|\overline{0P} - \overline{0Q_2}\right|\cdot\cos\theta$. Далі другий вираз підставляється у першу рівність замість $\overline{Q_2P^*}$, а потім $\overline{Q_2S}$, змінюється на останній вираз:

$$\overline{0P^*} = \overline{0Q_2} + \overline{Q_2P^*} = \overline{0Q_2} + \overline{Q_2S} + \overline{SP^*} = \left|\overline{0P} - \overline{0Q_2}\right|\cdot\cos\theta + \overline{SP^*}.$$

Довжина вектора $\overline{SP^*}$ визначається як:

$$\overline{SP^*} = \left|\overline{Q_2P^*}\right|\cdot\sin\theta + \left|\overline{Q_2P}\right|\cdot\sin\theta = \left|\overline{0P} + \overline{0Q_2}\right|\cdot\sin\theta.$$

Оскільки напрямок вектора $\overline{SP^*}$ перпендикулярний площині PQ_2N, то вектор:

$$\overline{SP^*} = \frac{\bar{n} \times \bar{P}}{\left|\overline{0P}\right|\cdot\sin\varphi}\cdot\left|\overline{0P} - \overline{0Q_2}\right|\cdot\sin\theta,$$

де: $\left|\overline{0P}\right|\cdot\sin\varphi = \left|\overline{Q_2P}\right| = \left|\overline{0P} + \overline{0Q_2}\right|$, тобто: $\overline{SP^*} = \left(\bar{n} \times \bar{P}\right)\cdot\sin\theta$. Тоді

$$\overline{0P^*} = \overline{0Q_2} + \left(\overline{0P} - \overline{0Q_2}\right)\cdot\cos\theta + \left(\bar{n} \times \bar{P}\right)\cdot\sin\theta.$$

Оскільки вектор $\overline{0Q_2}$ є проекція вектору $\overline{0P}$ на вісь обертання $\overline{0N}$, то $\overline{0Q_2}$ визначається співвідношенням $\left(\bar{P} \times \bar{n}\right) = |\bar{P}|\cdot\cos\varphi$, а напрямок $\overline{0Q_2}$ співпадає з напрямком одиничного вектора $\bar{n}$.

Використовуючи рівність $\overline{0Q_2} = (\overline{P} \cdot \overline{n}) \cdot \overline{n}$, отримаємо:

$\overline{0P^*} = (\overline{P} \cdot \overline{n}) \cdot \overline{n} \cdot (1 - \cos\theta) + \overline{P} \cdot \cos\theta + (\overline{n} \times \overline{P}) \cdot \sin\vartheta$

Із наведеного виведення зробимо висновок, що його основою є побудова вектора $\overline{Q_2P}$ за допомогою спрямованих вздовж нього векторів $\overline{Q_2S}$ та $\overline{SP}$, а потім зміна побудованого таким шляхом вектора $\overline{Q_2P}$ на вектор $\overline{Q_2P^*}$, тому, що вони обидва є радіуси кола.

Для розглядання пропонуємого варіанту виведення формули повернемось у початок геометричних побудувань та опишемо їх разом. Отже, зробимо допоміжні геометричні побудування: з'єднаємо точки P та P^* з початком координат 0_{xyz} та точкою Q_2 спрямованими векторами та перпендикулярно площині, де розташований векторний трикутник $0PQ_2$, з точки P^* опустимо перпендикуляр P^*S на вектор $\overline{Q_2P}$ у точку S, яку також з'єднаємо векторами $\overrightarrow{0S}$ (додатковий вектор), $\overline{Q_2S}$ та $\overline{SP^*}$ з початком координат 0_{xyz} та точками Q_2 та P^* відповідно.. Нехай вектор $\overrightarrow{0P}$ має з віссю $\overrightarrow{0N}$ кут ϕ. Тоді справедлива система наступних рівностей:

$\overrightarrow{0P} = \overline{0Q_2} + \overline{Q_2P}$,

$\overrightarrow{0S} = \overrightarrow{0Q}_2 + \overline{Q_2S}$, (додаткове рівність)

$\overline{0P^*} = \overline{0S} + \overline{SP^*}$, (додаткове рівність)

$\overline{0P^*} = \overline{0Q_2} + \overline{Q_2P^*}$.

Оскільки $\overline{Q_2S} = |\overline{Q_2P^*}| \cdot \cos\theta = |R| \cdot \cos\theta = |\overline{Q_2P}| \cdot \cos\theta$, то використуємо новий напрямок:

$\overrightarrow{0P^*} = \overrightarrow{0S} + \overrightarrow{SP^*} = \overline{0Q_2} + \overrightarrow{Q_2S} + \overrightarrow{SP^*} = \overrightarrow{0Q}_2 + |\overline{Q_2P}| \cdot \cos\theta + \overline{SP^*}$,

$\overline{Q_2P} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0Q}_2$, $\overrightarrow{SP^*} = |R| \cdot \sin\theta = |\overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0Q}_2| \cdot \sin\theta$. Тоді $\overrightarrow{0P^*} = \overrightarrow{0Q}_2 + |\overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0Q}_2| \cdot \cos\theta + |\overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0Q}_2| \cdot \sin\theta$. Отже, виведення майже завершено. Залишилось тільки зробити необхідні підстанови.

Врахуємо положення векторів у відповідних площинах та їх напрямки. Довільний вектор $\overrightarrow{Q}_2$ є проекція вектора $\overrightarrow{P}$ на вісь обертання $\overrightarrow{0N}$, величина якої визначається співвідношенням скалярного добутку, а його напрям співпадає з напрямом одиничного вектора $\vec{n}$. Рівняння вектору $\overrightarrow{P^*}$ можливо записати через вираз довільного вектору $\overrightarrow{Q}_2$, скалярний добуток різниці між вектором $\overline{P}$ та довільним вектором $\overrightarrow{Q}_2$, а також векторний добуток одиничного вектору $\vec{n}$ та вектору $\overrightarrow{P}$, тобто:

$\overline{0P^*} = \overrightarrow{0Q}_2 (1 - \cos\theta) + |\overrightarrow{0P}| \cdot \cos\theta + |\overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0Q}_2| \cdot \sin\theta$.

З урахуванням скалярного та векторного добутків векторів отримаємо наступне:

$\overline{0P^*} = (|\overline{0P}| \cdot |\vec{n}|) \cdot \vec{n} \cdot (1 - \cos\theta) + \overline{0P} \cdot \cos\theta + (\vec{n} \times \overrightarrow{0P}) \cdot \sin\theta$

або:

$\overline{P^*} = (P \cdot n) \cdot n \cdot (1 - \cos\theta) + P \cdot \cos\theta + (n \times P) \cdot \sin\theta$.

Це рівняння описує перетворену точку через координати вихідної точки, кут обертання та напрямні косинуси вісі обертання. Далі все виконується за класичним варіантом[1]. Тепер запишемо це рівняння у матричній формі, використовуючи при цьому матричні форми запису скалярного та векторного добутків:

$$\overline{OP^*} = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad 1] \cdot (1 - \cos\theta) +$$

$$+ [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \cos\theta + [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 & 0 \\ -n_3 & 0 & n_1 & 0 \\ n_2 & -n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \sin\theta.$$

Винесення за лапки рівняння точки у матричній формі дозволить отримати іскомий вираз для матриці обертання навколо довільної вісі:

$$R = \begin{bmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2)\cos\theta & \begin{matrix} n_1 n_2 (1-\cos\theta) + \\ + n_3 \sin\theta \end{matrix} & \begin{matrix} n_1 n_3 (1-\cos\theta) - \\ - n_2 \sin\theta \end{matrix} & 0 \\ \begin{matrix} n_1 n_2 (1-\cos\theta) - \\ - n_3 \sin\theta \end{matrix} & n_2^2 + (1 - n_2^2)\cos\theta & \begin{matrix} n_2 n_3 (1-\cos\theta) + \\ + n_1 \sin\theta \end{matrix} & 0 \\ \begin{matrix} n_1 n_3 (1-\cos\theta) + \\ + n_2 \sin\theta \end{matrix} & \begin{matrix} n_2 n_3 (1-\cos\theta) - \\ - n_1 \sin\theta \end{matrix} & n_3^2 + (1 - n_3^2)\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, виходить, що для виконання довільного обертання точки P необхідно знати координати цієї точки, напрямні косинуси вісі обертання $[n_1, n_2, n_3]$ та кут повороту θ.

Якщо вісь, навколо якої виконується обертання, проходить через точку $[t_{41}, t_{42}, t_{43}, 1]$, то рівняння перетворень у матричній формі визначається наступним виразом:

$$[X \;\; Y \;\; Z \;\; H] = [x \;\; y \;\; z \;\; 1]\cdot T_{-(lmn)} \cdot R \cdot T_{lmn} = [x \;\; y \;\; z \;\; 1]\cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -t_{41} & -t_{42} & -t_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

Введемо наступні умовні позначення для елементів матриці обертання R : $r_{11} = n_1^2 + (1 - n_1^2)\cdot\cos\theta$; $r_{12} = n_1 \cdot n_2 \cdot (1 - \cos\theta) + n_3 \cdot \sin\theta$;

$r_{13} = n_1 \cdot n_3 \cdot (1 - \cos\theta) - n_2 \cdot \sin\theta$; $r_{21} = n_1 \cdot n_2 \cdot (1 - \cos\theta) - n_3 \cdot \sin\theta$;

$r_{22} = n_2^2 + (1 - n_2^2)\cdot\cos\theta$; $r_{23} = n\, n_3 \cdot (1 - \cos\theta) + n_1 \cdot \sin\theta$;

$r_{31} = n_1 \cdot n_3 \cdot (1 - \cos\theta) + n_2 \cdot \sin\theta$; $r_{31} = n_2 \cdot n_3 \cdot (1 - \cos\theta) - n_1 \cdot \sin\theta$;

$r_{33} = n_3^2 + (1 - n_3^2)\cdot\cos\theta$;

де: n_1, n_2, n_3 – складові одиничного вектору – напрямні косинуси вісі обертання ; θ - кут обертання;

$\bar{n} = n_1 \bar{i} + n_2 \bar{j} + n_3 \bar{k}$ - одиничний базис.

У якості прикладу розглянемо обертання точки P на кут ϕ навколо вісі ординат y. У цьому випадку $n_1 = 0$; $n_3 = 0$; $n_2 = 1$ та матриця R прийме вигляд:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

що співпадає з матрицею, яка використовується для обертання площини xz- відносно вісі y.

Висновок

Таким чином, замість побудування рівності суми складових компонент вектора $\overline{Q_2 P}$ з векторів $\overline{Q_2 S}$ та $\overline{SP}$ запропонований інший шлях – через допоміжний вектор $\overline{0S}$. Існування ще одного варіанту виведення та отримання формули тривимірного обертання навколо довільної вісі, яка використовується на практиці для автоматизації обчислень польоту повітряних суден, переміщень роботів, аксонометричних перетворень графічних об'єктів в комп'ютерній графіці, обробці зображень та багатьох інших випадках, дозволяє мати запасний шлях можливих розрахунків, коли то тим чи іншим умовам яка–небудь із складових компонент стає невідомою (тобто зникає), а також для контролю та резервування систем обчислень з метою підвищення їх життєздатності.

Список літератури

1. *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики. – М.: Машиностроение, 1980. – 240 с.

2. *Фоли Дж., ВэнДэм А.* Основы интерактивной машинной графики: В 2-х кн. Кн.1. – М.: Мир, 1985. – 367 с.

3. *Шикин Е.В., Боресков А.В.* Компьютерная графика. – М.: ДИАЛОГ - МИФИ, 1996. – 288 с.