УДК 629.733.5

[1]Гусынин В. П. д-р техн. наук
[2]Гусынин А. В.
[3]Баранов В. Л. д-р техн. наук

СПЕКТРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ АЭРОСТАТИЧЕСКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

[1]Национальное космическое агенство Украины
[2]Национальный технический университет Украины «КПИ»
[3]Институт информатики Национального авиационного университета

В статье предложена спектральная модель динамики движения аэростатического летательного аппарата, полученная на основе применения метода дифференциальных преобразований. Предложенный подход позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты по сравнению с традиционными численными методами и допускает возможность проведения аналитического исследования проблемы.

Актуальность. В последнее время во многих странах мира вновь возрос интерес к аэростатическим летательным аппаратам (дирижаблям) [1, 2]. Одной из главных причин нынешнего повышенного внимания к дирижаблям является их высокая экономическая эффективность в областях, где по техническим или экономическим соображениям применение самолетов или вертолетов нерационально или невозможно (например, транспортировка тяжелых негабаритных грузов), а также разработка новых технологий и материалов в сочетании с новейшими методами проектирования.

Среди важнейших проблем эксплуатации современного дирижабля выделяется недостаточная эффективность его управления на малых скоростях полета. В связи с этим, часто возникают трудности при наземном обслуживании и вводятся ограничения для безопасной эксплуатации аппарата при наличии порывов ветра. Для решения этих проблем на дирижаблях последнего поколения применяют силовые установки с отклоняемым вектором тяги, которые дополнительно к своему основному назначению (обеспечение необходимой скорости полета) существенно расширяют летно-технические возможности аппарата и упрощают выполнение взлета и посадки. Традиционно силовая установка с отклоняемым вектором тяги имеет два и более туннельных вентиляторов, установленных в кольцевых насадках по обе стороны дирижабля. Каждый из них может поворачиваться в вертикальной и горизонтальной плоскостях для создания продольной и поперечной составляющих тяги [3].

Направление решения проблемы. Процесс управления взлетом и посадкой дирижабля является сложной процедурой и характеризуется различными режимами одновременной работы туннельных вентиляторов и аэродинамических органов управления – рулей высоты и направления. Может возникнуть целесообразность и в быстром изменении аэростатической подъемной силы аппарата при помощи управления изменением объема воздуха в баллонетах и сброса балласта. Это приводит к необходимости решения многопараметрической задачи по выбору соответствующих алгоритмов управления и их реализации в реальном масштабе времени, что существенно увеличивает объем соответствующих вычислений.

В данной работе предложена спектральная модель динамики движения аэростатического летательного аппарата (АЛА), полученная на основе применения метода дифференциальных преобразований [4-5]. В отличие от известных интегральных преобразований Лапласа и Фурье, метод дифференциальных преобразований основан на переводе оригиналов в область изображений при помощи операции дифференцирования. При математическом моделировании физических процессов и объектов, описываемых дифференциальными и интегральными уравнениями, дифференциальные преобразования позволяют заменить операции интегрирования и дифференцирования эквивалентными алгебраическими операциями.

Применение математического аппарата дифференциальных преобразований позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты по сравнению с традиционными численными методами, определять параметры движения объекта в реальном времени, а также допускает проведение аналитического исследования проблемы.

Дифференциальные преобразования и их основные свойства

Дифференциальные преобразования позволяют заменить в математической модели динамики объекта функции $x(t)$ непрерывного аргумента t их спектральными моделями в форме дискретных функций $X(k)$ целочисленного аргумента $k = 0, 1, 2 \ldots$. Дифференциальными преобразованиями называются функциональные преобразования вида [6]:

$$\underline{x(t)} = X(k) = \frac{h^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0} \bullet x(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{t}{h}\right)^k X(k), \quad (1)$$

где $x(t)$ – оригинал, представляющий собой вещественную аналитическую функцию вещественного аргумента; $\underline{x(t)}$ и $X(k)$ – равноценные обозначения дифференциального изображения оригинала, представляющего собой дискретную функцию целочисленного аргумента k, которая называется дифференциальным спектром функции $x(t)$ в точке $t = t_0$; h – масштабная постоянная, имеющая размерность аргумента t, обычно выбирается равной отрезку $0 \le t \le h$, на котором рассматривается функция $x(t)$; черта снизу – символ преобразования; $\bullet$ – символ соответствия между оригиналом $x(t)$ и его дифференциальным изображением $X(k)$. Выражение слева от символа $\bullet$ в (1) определяет прямое преобразование, позволяющее по оригиналу x(t) найти изображение $X(k)$, а справа – обратное преобразование, которое восстанавливает оригинал $x(t)$ по изображениям $X(k)$ в виде ряда Тейлора с центром в точке $t = 0$.

Преобразования (1) называются дифференциальными тейлоровскими преобразованиями или T-преобразованиями, дифференциальные изображения $X(k)$ – дифференциальными T – спектрами, а значения $X(k)$ при конкретных значениях аргумента – дискретами. Например, $X(0)$ – нулевая дискрета, $X(1)$ – первая дискрета и т. д.

Приведем некоторые основные свойства дифференциальных преобразований [4-6]. Начальное значение оригинала $[x(t)]_{t=0} = x(0)$ равно нулевой дискрете $[X(k)]_{k=0} = X(0)$ основного изображения $X(k)$, т. е. $X(0) = [X(k)]_{K=0} = X(0) = [x(t)]_{t=0}$. Значение оригинала $x(t)$ в точке $t = h$ равно сумме всех дискрет основного изображения $X(k)$:

$$x(t = h) = X(0) + X(1) + X(2) + \ldots = \sum_{k=0}^{k=\infty} X(k). \quad (2)$$

Рассмотрим теперь ряд математических операций над T-функциями. Из выражения (1) следует, что алгебраической сумме оригиналов соответствуют алгебраические суммы их T-изображений:

$$x(t) \pm y(t) \bullet X(k) \pm Y(k),$$

$$x(t_\nu + \tau) \pm y(t_\nu + \tau) \bullet X_\nu(k) \pm Y_\nu(k). \quad (3)$$

Операции умножения оригинала $x(t)$ на постоянную C соответствует умножение на нее изображений $X(k)$ и $X_\nu(k)$:

$$Cx(t) \bullet CX(k); \qquad Cx(t_\nu + \tau) \bullet CX_\nu(k). \quad (4)$$

Произведению двух функций $x(t)$ и $y(t)$ соответствует в области изображений T-произведение, которое обозначается символом $*$.

$$x(t) \cdot y(t) \bullet X(k) * Y(k) = \frac{h^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t) y(t)}{dt^k}\right]_{t=0} = \sum_{l=0}^{l=k} X(k-l) Y(l). \quad (5)$$

Операции дифференцирования в области оригиналов соответствует в области изображений следующее выражение:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \bullet Y(k) = DX(k) = \frac{k+1}{h} X(k+1), \quad (6)$$

где символ D обозначает T-производную.

Аналогичным образом определяются изображения высших производных от $x(t)$ по t:

$$\frac{d^m x(t)}{dt^m} \bullet D^m X(k) = \frac{(k+m)!}{k! h^m} X(k+m). \quad (7)$$

Здесь m – натуральное число; D^m – символ T-производной m-го порядка.

Подставляя степенной ряд

$$x(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} (\frac{t}{h})^k X(k)$$

в выражение определенного интеграла от $x(t)$ по t, получим:

$$\int_{t_a}^{t_b} x(t)dt = \int_{t_a}^{t_b} \left[\sum_{k=0}^{k=\infty} (\frac{t}{h})^k X(k) \right] dt = \\ h \sum_{k=0}^{k=\infty} \left[(\frac{t_b}{h})^{k+1} - (\frac{t_a}{h})^{k+1} \right] \frac{X(k)}{k+1} \quad . \quad (8)$$

В частном случае, когда $t_a = 0$ и $t_b = h$, имеем:

$$\int_0^h x(t)dt = h \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{X(k)}{k+1}. \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) позволяют находить в заданных пределах определенный интеграл от оригинала $x(t)$ по дискретам изображения $X(k)$.

Более полный перечень дифференциальных преобразований функций и математических операций над ними приведен в работе [6].

Математические модели, преобразованные при помощи дифференциальных преобразований, называются спектральными моделями.

Математическая модель движения АЛА. В качестве исходной математической модели движения аэростатического летательного аппарата примем систему дифференциальных уравнений, описывающих продольное движение дирижабля в проекциях на оси связанной системы координат, начало которой совпадает с центром газового объема оболочки [7, 8]:

$$(m+\lambda_{11})\dot{V}_X = (my_C - \lambda_{16})\dot{\omega}_Z + (m+\lambda_{22})V_Y\omega_Z + \\ +(mx_C + \lambda_{26})\omega_Z^2 + F_X \quad (10)$$

$$(m+\lambda_{22})\dot{V}_Y = -(mx_C + \lambda_{26})\dot{\omega}_Z - \\ -(m+\lambda_{11})V_X\omega_Z + (my_C - \lambda_{16})\omega_Z^2 + F_Y \quad (11)$$

$$(I_Z + \lambda_{66})\dot{\omega}_Z = (my_C - \lambda_{16})\dot{V}_X - \\ -(mx_C + \lambda_{26})\dot{V}_Y + (\lambda_{22} - \lambda_{11})V_X V_Y - \\ -(mx_C + \lambda_{26})V_X\omega_Z - (my_C - \lambda_{16})V_Y\omega_Z + M_Z; \quad (12)$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_Z; \quad (13)$$

$$\dot{H} = V_X \cdot \sin\vartheta + V_Y \cdot \cos\vartheta; \quad (14)$$

$$\dot{L} = V_X \cdot \cos\vartheta - V_Y \cdot \sin\vartheta; \quad (15)$$

$$\alpha = arctg(-V_Y / V_X); \quad (16)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{V}_X \cdot V_Y - \dot{V}_Y V_X}{V_X^2 + V_Y^2}; \quad (17)$$

$$\theta = \vartheta - \alpha. \quad (18)$$

В уравнениях (10)-(18) приняты следующие обозначения:

V_X, V_Y – проекции скорости полета на связанные оси; H – высота полета; L – дальность полета; m – масса дирижабля; I_Z – момент инерции дирижабля относительно связанной оси OZ; λ_{ij} – присоединенные массы и моменты инерции аппарата; ϑ – угол тангажа; α – угол атаки; θ – угол наклона траектории; ω_Z – проекция вектора угловой скорости на связанную ось OZ; x_C, y_C – координаты центра масс дирижабля относительно его центра газового объема оболочки; F_X, F_Y – проекции суммарной силы, действующей на дирижабль, на связанные оси OX, OY; M_Z – проекция суммарного момента, действующего на дирижабль, на связанную ось OZ.

Силы и моменты, действующие на дирижабль в вертикальной плоскости симметрии, представим в виде:

$$F_X = F_{X\,A} + F_{X\,CT} + F_{X\,DV} + F_{X\,D}; \quad (19)$$

$$F_Y = F_{Y\,A} + F_{Y\,CT} + F_{Y\,DV} + F_{Y\,D}; \quad (20)$$

$$M_Z = M_{Z\,A} + M_{Z\,CT} + M_{Z\,DV} + M_{Z\,D}, \quad (21)$$

где $F_{X\,A}, F_{Y\,A}, M_{Z\,A}$ – аэродинамические силы и моменты;

$F_{X\,CT}, F_{Y\,CT}, M_{Z\,CT}$ – аэростатические силы и моменты;

$F_{X\,DV}, F_{Y\,DV}, M_{Z\,DV}$ – силы и моменты от двигателей;

$F_{X\,D}, F_{Y\,D}, M_{Z\,D}$ – гравитационные силы и моменты.

Аэродинамические силы и моменты:

$$F_{X\,A} = -C_X(\alpha)qU^{2/3}\cos\alpha + [C_Y(\alpha,\delta_B) + C_Y^{\varpi_z}(\alpha)\cdot U^{1/3}/V\cdot\omega_Z]\cdot qU^{2/3}\sin\alpha \; ; \quad (22)$$

$$F_{Y\,A} = C_X(\alpha)qU^{2/3}\cdot\sin\alpha + [C_Y(\alpha,\delta_B) + C_Y^{\varpi}(\alpha)U^{1/3}/V\cdot\omega_Z]\cdot qU^{2/3}\cdot\cos\alpha \; ; \quad (23)$$

$$M_{Z\,A} = [m_Z(\alpha,\delta_B) + m_Z^{\dot\alpha}(\alpha)U^{1/3}/V\cdot\dot\alpha + m_Z^{\varpi}(\alpha)U^{1/3}/V\cdot\omega_Z]qU \, . \quad (24)$$

Аэростатические силы и моменты:

$$F_{X\,CT} = U(\gamma_B - \gamma_G)\cdot\sin\vartheta; \quad (25)$$

$$F_{Y\,CT} = U(\gamma_B - \gamma_G)\cdot\cos\vartheta; \quad (26)$$

$$M_{Z\,CT} = 0. \quad (27)$$

Гравитационные силы и моменты:

$$F_{X\,G} = -mg\sin\vartheta\,; \quad (28)$$

$$F_{Y\,G} = -mg\cos\vartheta\,; \quad (29)$$

$$M_{Z\,G} = mg(x_C\cos\vartheta - y_C\sin\vartheta)\,. \quad (30)$$

Силы и моменты от двигателей:

$$F_{X\,DV} = P_\Sigma\cos\varphi\,; \quad (31)$$

$$F_{Y\,DV} = P_\Sigma\sin\varphi\,; \quad (32)$$

$$M_{Z\,DV} = P_\Sigma y_{DV}\cos\varphi + P_\Sigma x_{DV}\sin\varphi\,. \quad (33)$$

В выражениях (22)-(33) обозначено: U – объем газа в оболочке; P_Σ – суммарная тяга двигателей дирижабля; C_X – коэффициент лобового сопротивления; C_Y – коэффициент подъемной силы; m_Z – коэффициент продольного момента; C_Y^{ϖ} – производная коэффициента подъемной силы по угловой скорости тангажа; $m_Z^{\varpi}, m_Z^{\dot\alpha}$ – производная коэффициента продольного момента по угловой скорости тангажа и скорости изменения угла атаки соответственно; g – ускорение свободного падения; φ – угол отклонения вектора тяги; x_{DB}, y_{DB} – координаты двигателей относительно центра газового объема оболочки; δ_B – угол отклонения руля высоты; γ_B, γ_G – удельный вес воздуха и газа соответственно; q – скоростной напор, равный $q = \rho V^2/2$; ρ – плотность воздуха; $V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2}$.

Построение спектральной модели динамики движения АЛА

С целью упрощения применения дифференциальных преобразований к построению спектральной модели динамики движения АЛА преобразуем приведенную выше соответствующую математическую модель.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&a_{11} = \frac{my_c - \lambda_{11}}{m + \lambda_{11}}; \quad a_{12} = \frac{m + \lambda_{22}}{m + \lambda_{11}};\\
&a_{13} = \frac{mx_c + \lambda_{26}}{m + \lambda_{11}}; \quad a_{14} = \frac{1}{m + \lambda_{11}};\\
&a_{21} = \frac{mx_c + \lambda_{26}}{m + \lambda_{22}}; \quad a_{22} = \frac{m + \lambda_{11}}{m + \lambda_{22}};\\
&a_{23} = \frac{my_c - \lambda_{16}}{m + \lambda_{22}}; \quad a_{24} = \frac{1}{m + \lambda_{22}};\\
&b_1 = \frac{my_c - \lambda_{16}}{I_z + \lambda_{66}}; \quad b_2 = \frac{mx_c + \lambda_{26}}{I_z + \lambda_{66}};\\
&b_3 = \frac{\lambda_{22} - \lambda_{11}}{I_z + \lambda_{66}}; \quad b_4 = \frac{mx_c + \lambda_{26}}{I_z + \lambda_{66}};\\
&b_5 = \frac{my_c - \lambda_{16}}{I_z + \lambda_{66}}; \quad b_6 = \frac{1}{I_z + \lambda_{66}}.
\end{aligned} \quad (34)$$

$$N_1 = \sin\vartheta\,,\; N_2 = \cos\vartheta\,; \quad (35)$$

$$R_1 = \sin\varphi\,,\; R_2 = \cos\varphi\,; \quad (36)$$

$$W = V^2 = V_x^2 + V_y^2\,. \quad (37)$$

С учетом введенных обозначений математическая модель (11)-(18) примет вид:

$$\begin{aligned}
&\dot V_x = a_{11}\dot\omega_z + a_{12}V_y\omega_z + a_{13}\omega_z^2 + a_{14}F_x\,,\\
&\dot V_y = -a_{21}\dot\omega_z - a_{22}V_x\omega_z + a_{23}\omega_z^2 + a_{24}F_y\,,\\
&\dot\omega_z = b_1\dot V_x - b_2\dot V_y + b_3V_xV_y - b_4V_x\omega_z - b_5V_y\omega_z + b_6M_z\,,\\
&\dot\vartheta = \omega_z\,,\\
&\dot H = V_xN_1 + V_yN_2\,, \quad \dot L = V_xN_2 - V_yN,\\
&\dot\alpha W = \dot V_xV_y - \dot V_yV_x\,, \quad \theta = \vartheta - \alpha
\end{aligned} \quad (38)$$

Применим теперь дифференциальные преобразования к преобразованной математической модели (38). В результате преобразований математическая модель (38) в области изображений примет вид [9]:

$$V_x(k+1)=\frac{H}{k+1}\left[a_{11}\frac{k+1}{H}\omega_z(k+1)+a_{12}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_y(k-\ell)\omega_z(\ell)+a_{13}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\omega_z(k-\ell)\omega_z(\ell)+a_{14}F_x(k);\right]$$

$$V_y(k+1)=\frac{H}{k+1}\left[-a_{21}\frac{k+1}{H}\omega_z(k+1)+a_{22}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_x(k-\ell)\omega_z(\ell)+a_{23}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\omega_z(k-\ell)\omega_z(\ell)+a_{24}F_y(k);\right]$$

$$\omega_z(k+1)=\frac{H}{k+1}\begin{bmatrix}b_1\dfrac{k+1}{H}V_x(k+1)-b_2\dfrac{k+1}{H}V\ (k+1)+b_3\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_x(k-\ell)V_y(\ell)-\\ -b_4\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_x(k-\ell)\omega_z(\ell)-b_5\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_y(k-\ell)\omega_z(\ell)+b_6M_z(k)\end{bmatrix};$$

$$\vartheta(k+1)=\frac{H}{k+1}\omega_z(k); \qquad (39)$$

$$H(k+1)=\frac{H}{k+1}\left[\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_x(k-\ell)N_1(\ell)+\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_y(k-\ell)N_2(\ell)\right];$$

$$L(k+1)=\frac{H}{k+1}\left[\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_x(k-\ell)N_2(\ell)-\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_y(k-\ell)N_1(\ell)\right];$$

$$\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\frac{\ell+1}{H}\alpha(\ell+1)W(k-\ell)=\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\frac{\ell+1}{H}V_x(\ell+1)V_y(k-\ell)-\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\frac{\ell+1}{H}V_y(\ell+1)V_x(k-\ell);$$

$$\theta(k)=\vartheta(k)-\alpha(k).$$

Спектральную модель (39) необходимо дополнить дифференциальными спектрами дополнительных переменных (35)-(37). Для этого предварительно переведем выражения (35), (36) в дифференциальную форму. Дифференцируя (35) и (36) по t получаем эквивалентные дифференциальные уравнения:

$$\frac{dN_1(t)}{dt}=\cos\vartheta\frac{d\vartheta(t)}{dt}=N_2\frac{d\vartheta(t)}{dt};$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt}=-\sin\vartheta\frac{d\vartheta(t)}{dt}=-N_1\frac{d\vartheta(t)}{dt};$$

$$\frac{dR_1(t)}{dt}=\cos\varphi\frac{d\varphi(t)}{dt}=R_2\frac{d\vartheta(t)}{dt}; \quad (40)$$

$$\frac{dR_2(t)}{dt}=-\sin\varphi\frac{d\varphi(t)}{dt}=-R_1\frac{d\vartheta(t)}{dt}.$$

Применяя теперь дифференциальные преобразования к выражениям (19) и (33) получим следующие дифференциальные спектры дополнительных переменных:

$$N_1(k+1)=\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\frac{\ell+1}{k+1}\vartheta(\ell+1)N_2(k-\ell);$$

$$N_2(k+1)=-\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\frac{\ell+1}{k+1}\vartheta(\ell+1)N_1(k-\ell);$$

$$R_1(k+1)=\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\frac{\ell+1}{k+1}\varphi(\ell+1)R_2(k-\ell); \quad (41)$$

$$R_2(k+1)=-\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\frac{\ell+1}{k+1}\varphi(\ell+1)R_1(k-\ell);$$

$$W(R)=\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V(k-\ell)V(\ell)=\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_x(k-\ell)\cdot V_x(\ell)+$$

$$+\sum_{\ell=0}^{\ell=k}V_y(k-\ell)V_y(\ell)$$

Спектральную модель (39), (41) следует дополнить дифференциальными спектрами действующих на аппарат сил $F_x(k)$, $F_y(k)$ и момента $M_z(k)$, которые получим, применив дифференциальные преобразования к выражениям (19)-(21).

В области изображений выражения (19)-(21) принимают вид:

$$F_x(k)=F_{XA}(k)+F_{XCT}(k)+F_{XDV}(k)+F_{XD}(k);$$

$$F_y(k)=F_{YA}(k)+F_{YCT}(k)+F_{YDV}(k)+F_{YD}(k); \quad (42)$$

$$M_z(k) = M_{ZA}(k) + M_{ZCT}(k) + \\ + M_{ZDV}(k) + M_{ZD}(k)$$

С целью упрощения перевода выражений аэродинамических сил (22)-(23) и аэродинамического момента (24) в область изображений предварительно введем вспомогательные переменные:

$$Q_1 = C_x(\alpha)q\,; \; Q_2 = C_y(\alpha_1\delta_B)q\,;$$

$$Q_3 = C_y^{\omega_z}(\alpha)\frac{q}{V}\,; \; Q_4 = Q_3\omega_z\,;$$

$$Q_5 = m_z(\alpha_1\delta_B)q\,; \; Q_6 = m_z^{\dot\alpha}(\alpha)\frac{q}{V}\,;$$

$$Q_7 = m_z^{\overline{\omega}_z}(\alpha)\frac{q}{V}\,; \quad S_1 = \sin\alpha\,;$$

$$S_2 = \cos\alpha\,. \qquad (43)$$

С учетом этих вспомогательных переменных выражения (22)-(24) преобразуются к виду:

$$F_{XA} = -U^{2/3}Q_1S_2 + U^{2/3}Q_2S_1 + UQ_4S_1\,;$$
$$F_{YA} = U^{2/3}Q_1S_1 + U^{2/3}Q_2S_2 + UQ_4S_2\,; \qquad (44)$$
$$M_{ZA} = Q_5U + U^{4/3}Q_6\dot\alpha + U^{4/3}Q_7\omega_z\,.$$

Переводя данные выражения в область изображений, получаем следующие дифференциальные спектры аэродинамических сил и момента:

$$F_{XA} = -U^{2/3}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}Q_1(k-\ell)S_2(\ell) + \\ + U^{2/3}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}Q_2(k-\ell)S_1(\ell) + \\ + U\sum_{\ell=0}^{\ell=k}Q_4(k-\ell)S_1(\ell);$$

$$F_{YA} = U^{2/3}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}Q_1(k-\ell)S_1(\ell) + \\ + U^{2/3}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}Q_2(k-\ell)S_2(\ell) + \qquad (45) \\ + U\sum_{\ell=0}^{\ell=k}Q_4(k-\ell)S_2(\ell);$$

$$M_{ZA}(k) = UQ_5(k) + \\ + U^{4/3}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}Q_6(k-\ell)\frac{\ell+1}{H}\alpha(\ell+1) + \\ + U^{4/3}\sum_{\ell=0}^{\ell=k}Q_7(k-\ell)w_z(\ell).$$

Выражение (45) необходимо дополнить дифференциальными спектрами вспомогательных переменных (43). С целью их получения продифференцируем по времени последние два выражения в (43):

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = \cos\alpha\frac{d\alpha(t)}{dt} = S_2\frac{d\alpha(t)}{dt}\,;$$
$$\frac{dS_2(t)}{dt} = -\sin\alpha\frac{d\alpha(t)}{dt} = -S_1\frac{d\alpha(t)}{dt}\,. \qquad (46)$$

Переводя полученные выражения в область изображений, получим дифференциальные спектры вспомогательных переменных:

$$S_1(k+1) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k}\frac{\ell+1}{k+1}\alpha(\ell+1)S_2(k-\ell)\,;$$
$$S_2(k+1) = -\sum_{\ell=0}^{\ell=k}\frac{\ell+1}{k+1}\alpha(\ell+1)S_1(k-\ell)\,. \qquad (47)$$

Для перевода остальных вспомогательных переменных (43) в область изображений необходимо выразить их в виде функций временного аргумента. С этой целью введем приближенные представления функциональных зависимостей, входящих в вспомогательные переменные (43):

$$C_1(t) = C_x(\alpha(t)) \approx C_{X_0} + B_\alpha C_2^2(t)\,;$$
$$C_2(t) = C_y[\alpha(t), \delta_B(t)] \approx C_{Y_0} + C_y^\alpha\alpha(t) + C_y^{\delta_B}\delta_B(t)\,;$$
$$C_3(t) = C_y^{\omega_z}(\alpha(t)) = C_{Y_0}^{\omega} + (C_y^{\omega})^\alpha\alpha(t)\,; \quad (48)$$
$$m_1(t) = m_z[\alpha(t), \delta_B(t)] = m_{10} + m_1^\alpha\alpha(t) + m_1^{\delta_B}\delta_B(t)\,;$$
$$m_2(t) = m_z^{\dot\alpha}(\alpha(t)) = m_{20} + m_2^\alpha\alpha(t)\,;$$
$$m_3(t) = m_z^{\overline{\omega}_z}(\alpha(t)) = m_{30} + m_3^\alpha\alpha(t)\,.$$

Тогда, переводя выражения (43) в область изображений, получим следующие дифференциальные спектры вспомогательных переменных:

$$C_1(k) = C_{X_0}ъ(k) + B_\alpha\sum_{\ell=0}^{\ell=k}C_2(k-\ell)C_2(\ell)\,;$$
$$C_2(k) = C_{Y_0}ъ(k) + C_Y^\alpha\alpha(k) + C_Y^{\delta_B}\delta_B(k)\,;$$
$$C_3(k) = C_{Y_0}^{\omega_z}ъ(k) + (C_X^{\omega_z})^\alpha\alpha(k)\,; \qquad (49)$$
$$m_1(k) = m_{10}ъ(k) + m_1^\alpha\alpha(k) + m_1^{\delta_B}\delta_B(k)\,;$$
$$m_2(k) = m_{20}ъ(k) + m_2^\alpha\alpha(k)\,;$$
$$m_3(k) = m_{30}ъ(k) + m_3^\alpha\alpha(k)\,.$$

Учитывая, что $q = \rho\frac{V^2}{2}$ и $\frac{q}{V} = \frac{\rho}{2}V$, а также соотношения (48), представим оставшиеся вспомогательные переменные (43) в виде функций временного аргумента:

$$Q_1(t) = C_1(t)q(t);\quad Q_2(t) = C_2(t)q(t);$$

$$Q_3(t) = C_3(t)\frac{\rho}{2}V(t);\ Q_4(t) = Q_3(t)\omega_z(t);$$

$$Q_5(t) = m_1(t)q(t);\ Q_6(t) = m_2(t)\frac{\rho}{2}V(t);$$

$$Q_7(t) = m_3(t)\frac{\rho}{2}V(t);\quad q(t) = \frac{\rho}{2}V^2(t).\quad (50)$$

Дифференциальные преобразования выражений (50) дают возможность получить дифференциальные спектры вспомогательных переменных в виде:

$$Q_1(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} C_1(k-\ell)q(\ell);$$

$$Q_2(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} C_2(k-\ell)q(\ell);$$

$$Q_3(k) = \frac{\rho}{2}\sum_{\ell=0}^{\ell=k} C_3(k-\ell)V(\ell);$$

$$Q_4(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} Q_3(k-\ell)\omega_z(\ell);$$

$$Q_5(k) = \sum_{\ell=0}^{\ell=k} m_1(k-\ell)q(\ell);$$

$$Q_6(k) = \frac{\rho}{2}\sum_{\ell=0}^{\ell=k} m_2(k-\ell)V(\ell);\quad (51)$$

$$Q_7(k) = \frac{\rho}{2}\sum_{\ell=0}^{\ell=k} m_3(k-\ell)V(\ell);$$

$$q(k) = \frac{\rho}{2}\sum_{\ell=0}^{\ell=k} V(k-\ell)V(\ell).$$

Переходим к переводу в область изображений аэростатических сил и моментов, описываемых выражениями (25)-(26). Учитывая обозначения (35), выражения (25)-(26) в области изображений дают дифференциальные спектры аэростатических сил и моментов в виде:

$$F_{XCT}(k) = U(\gamma_B - \gamma_G)N_1(k);$$

$$F_{YCT}(k) = U(\gamma_B - \gamma_G)N_2(k);$$

$$M_{ZCT}(k) = 0.\quad (52)$$

Аналогично, переводя выражения (28)-(30) в область изображений с учетом (35), получим дифференциальные спектры гравитационных сил и моментов:

$$F_{XG}(k) = -mgN_1(k);$$

$$F_{YG}(k) = -mgN_2(k);$$

$$M_{ZG}(k) = mg\left[x_c N_2(k) - y_c N_1(k)\right].\quad (53)$$

В завершение, переводя выражения (31)-(33) в область изображений с учетом (36), получим дифференциальные спектры сил и моментов от двигателей:

$$F_{XDV}(k) = P_\Sigma R_2(k);$$

$$F_{YDV}(k) = P_\Sigma R_1(k);$$

$$M_{ZDV}(k) = P_\Sigma Y_{DV}R_2(k) + P_\Sigma X_{DV}R_1(k),\quad (54)$$

при условии, что $P_\Sigma = const$.

Выводы. Полученная выше спектральная модель (39)-(54) позволяет в момент времени $t_0 = 0$ для произвольных начальных условий определять при целочисленных значениях аргумента $k = 0, 1, 2, \ldots$ дифференциальные спектры всех существенных параметров движения дирижабля.

Достоинство спектральной модели (39)-(54) состоит в том, что для определения дискрет дифференциальных спектров переменных, характеризующих движение аэростатического летательного аппарата, достаточно выполнить арифметические операции сложения-вычитания и умножения, последовательно присваивая целочисленному аргументу k значения $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Выполнение вычислений по рекуррентным формулам (39)-(54) не вызывает затруднений. Приведенная выше спектральная модель универсальна и может использоваться для реализации движения не только аэростатических летательных аппаратов, но и самолетов.

Для восстановления временных процессов изменения параметров динамики АЛА по дифференциальным спектрам может быть принят наиболее простой в вычислительном отношении метод восстановления временных процессов в форме рядов Тейлора [10]. В соответствии с данным методом, для получения значений параметров движения объекта в момент времени $t_i = t_{i-1} + h$ достаточно лишь алгебраически просуммировать дискреты дифференциального спектра, вычисленные для момента времени t_{i-1}.

Список литературы

1. *Гусинін А. В.* Тенденції розвитку сучасного дирижаблебудування за кордоном. І. Дирижаблі напівжорсткої і жорсткої схем // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 2002. – № 4. – С. 95-102.

2. *Гусинін А. В.* Тенденції розвитку сучасного дирижаблебудування за кордоном. II. Дирижаблі м'якої схеми // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». – 2002. – № 5. – С. 99-104.

3. *Nagabhushan B. L., Faiss G. D.* Thrust Vector Control of a V/STOL Airship. – Journal of Aircraft, 1984. – v.21. – №6. – P. 408-413.

4. *Пухов Г. Е.* Дифференциальное преобразование функций и уравнений. – К.: Наукова думка, 1980. – 419 с.

5. *Пухов Г. Е.* Дифференциальное преобразование и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наукова думка, 1986. – 160 с.

6. *Пухов Г. Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наукова думка, 1990. – 184 с.

7. *Pretty J. R., Hookway R. O.* A comparison of different forms of dirigible equations of motion. – AIAA Paper 77 – 1179, 1979. – P. 41-47.

8. *Regan F. J., Morrison A. M.* The planar dynamics of airships. – AIAA Paper 75 – 1395, 1975. – P. 15-23.

9. *В. Л. Баранов, В. П. Гусинін, А. В. Гусинін, І. А. Жуков, Л. О. Алексєєва.* Диференціальні перетворення в задачах керування рухом літальних апаратів: Навчальний посібник. – К.: НАУ. – 2003. – 158 с.

10. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* «Прикладная теория оптимального управления», World, 1972.