

УДК 681.511.42.037.5(0.45)

2965-016.4+18531.113-922.3

Азарсков В. М. д-р техн. наук

Галагуз Т. А.

Тунік А. А. д-р техн. наук

## СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ РОБАСТНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ПРИ СТОХАСТИЧНИХ ЗБУРЕННЯХ І НЕПОВНИХ ВИМІРАХ ВЕКТОРА СТАНУ СИСТЕМИ

Інститут електроніки та систем управління Національного авіаційного університету

*Вирішена проблема синтезу робастної системи управління при стохастичних збуреннях («кольоровий шум») і неповних вимірах вектора стану системи. Параметрична робастна оптимізація виконується для досягнення стабілізації та придатної номінальної якості. Дослідження виконане на прикладі системи управління польотом маленького БПЛА (безпілотного літального апарату).*

### Постановка задачі

В даній роботі розглядається задача робастного лінійного управління, коли спостереження системи є неповними і неточними, тобто коли виміряти повний вектор стану не можна, а виміри, що доступні містять шум. Крім цього припускається, що на систему діє збурення, що змінюється випадковим чином.

Вирішення цієї задачі складається з двох етапів: перший – синтез оптимальної системи управління при наявності кольорових шумів, що представлені фільтром Драйдена, другий – робастизація отриманого оптимального результату. Також в даній роботі вирішується задача пониження порядку отриманого регулятора за допомогою балансних моделей.

Найбільш відоме рішення задачі синтезу оптимального регулятора з використанням теореми розділення, згідно з якою регулятор складається з оптимального спостерігача (фільтр Калмана) та оптимального регулятора [1]. Але дане рішення не може забезпечити достатньо хороший показник якості і стійкість при зміні параметрів об'єкта, тобто робастність. Для подальшого покращення робастності системи використовується NPRS-підхід (*Nominal Performance-Robust Stability*) [2, 3, 4]. Він базується на використанні  $H_2$ -норми як загальноприйнятої оцінки якості системи [5] як при детермінованих так і при стохастичних збуреннях, а також

$H_\infty$ -норми функції комплементарної чутливості системи як оцінки її робастності [6].

З практичною метою синтезу використовується багатомодельний підхід, що базується на оцінці якості номінальної і збуреної систем при детермінованому і стохастичному впливах, а також оцінку робастності системи з відповідними ваговими коефіцієнтами (множниками Лагранжа) [2, 3, 4].

Забезпечення номінальної якості і робастної стійкості можна досягнути, використовуючи складний критерій оптимізації, що включає (з відповідними ваговими коефіцієнтами)  $H_2$ -норми, що обчислені як для детермінованого так і для стохастичного випадків, а також  $H_\infty$ -норми, до того ж всі ці норми обчислюються як для номінальної так і для параметрично збуреної моделей об'єкта управління [2]. Це дозволяє регулювати частку детермінованої і стохастичної складових в показник якості, що мінімізується, в той час як використовуючи  $H_2$ - і  $H_\infty$ -норми можна досягнути компромісу між вимогами до компенсації зовнішніх (координатних) і внутрішніх (параметричних) збурень [2, 3, 4].

Як правило цей підхід використовувався для багатокритеріальної оптимізації систем управління з наперед заданою відомою структурою [2, 3, 4]. На відміну

від цих робіт в даній статті структура системи наперед не задана і знаходиться у відповідності з відомою теоремою розділення [1], тобто вона шукається як сполучення оптимального спостерігача та оптимального регулятора. Для досягнення робастності використовується процедура, що базується на багато-модельному підході, запропонована в [2, 3].

Дослідження проведені на прикладі повздовжнього каналу малого безпілотно-го літального апарату [3, 5].

### Синтез оптимальної системи

В більшості практичних задач управління (зокрема в задачах управління польотом) на об'єкт управління діють шуми  $w_1$  з матрицею коваріацій  $V_1$ , що збурюють стан  $x$

$$\dot{x} = Ax + Bu + w_1 \quad (1)$$

і можна виміряти лише деяку лінійну комбінацію змінних стану

$$y = Cx + w_2, \quad (2)$$

де  $w_2$  – шуми спостережень з матрицею коваріацій  $V_2$ .

Причому  $A \in R^{n \times n}$ ,  $C \in R^{l \times n}$  де  $l < n$ . Оскільки кількість вимірювань  $l$  менше за кількість фазових координат  $n$ , то необхідно визначити такий оператор  $F$  (оптимальний фільтр):

$$\hat{x} = F(y),$$

який мінімізує норму похибки  $e = x - \hat{x}$ , де  $\hat{x}$  – відновлений стан системи.

В виразах (1), (2)  $x$  – вектор змінних стану системи,  $u$  – вектор змінних управління,  $y$  – вектор змінних, що вимірюються,  $A$  матриця стану системи,  $B$  – матриця управління,  $C$  – матриця спостережень.

Після того, як вектор стану відновлено, можна використовувати закони управління (в яких припускається, що повний вектор стану відомо), замінивши дійсний стан відновленим.

Таким чином оптимальний регулятор є комбінацією оптимального спостерігача, в якому відновлюється стан системи, і закону управління, що являє собою миттєву лінійну функцію відновленого

вектора стану. Цей результат відомо як принцип розділення [1].

Розглянемо систему, що описується рівняннями у просторі станів (1), (2).

Нехай задача відновлення є не сингулярною, а шум, що збурює стан системи  $w_1$  і шум спостережень  $w_2$  не корельовано. Запишемо розв'язок задачі оптимального стохастичного управління для регулювання по вихідній змінній [1]. Для вихідної змінної маємо

$$u = -F\hat{x}, \quad (3)$$

де  $F$  – коефіцієнти підсилення для кожної змінної вектора стану,  $\hat{x}$  – лінійна оцінка по мінімуму середнього значення квадрата похибки. Значення цих коефіцієнтів для виразу (3) знаходяться за формулою:

$$F = -R^{-1}B^T P_1, \quad (4)$$

В виразі (4)  $P_1$  – рішення алгебраїчного рівняння Ріккати

$$0 = D^T R_2 D - P_1 B Q^{-1} B^T P_1 + A^T P_1 + P_1 A. \quad (5)$$

де  $R_2$  – симетрична ненульова вагова матриця,  $Q$ ,  $R$ , – діагональні матриці, що враховують вагу кожної змінної в просторі станів ( $Q$ ), управляючих впливів ( $R$ ).

Оцінку  $\hat{x}$  для виразу (3) отримуємо як рішення рівняння

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K[y - C\hat{x}]. \quad (6)$$

Коефіцієнти підсилення  $K$  оптимального спостерігача (фільтра Калмана) в виразі (6) знаходяться за формулою

$$K = P_2 C^T V_2^{-1}. \quad (7)$$

Матриця дисперсій  $P_2$  в виразі (7) є рішенням алгебраїчного рівняння Ріккати

$$0 = V_1 - P_2 C^T V_2^{-1} C P_2 + A P_2 + P_2 A^T. \quad (8)$$

Підставивши вираз (3) для закону управління в рівняння спостерігача (6), отримуємо рівняння регулятора в формі

$$\dot{\hat{x}} = [A - BF - KC]\hat{x} + Ky. \quad (15)$$

Це призводить до структури, що представлена на рис. 1.

Замкнена система, що отримана в результаті з'єднання об'єкта з регулятором, являється лінійною системою розмірності  $2n$  (де  $n$  – розмірність стану  $x$ ), яку можна описати рівнянням

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \hat{\dot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BF \\ KC & A-KC-BF \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{\dot{x}} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

Вектор зовнішніх збурень  $w_1$  (стохастичний вектор турбулентної швидкості вітру) описується стандартною моделлю Драйдена [7], що визначає матрицю спектральних щільностей цього вектора. Для формування процесу  $w_1$  використовується багатомірний формуючий фільтр, вхід якого збурюється векторним білим шумом. Формуючий фільтр представляється

у просторі станів четвіркою матриць  $[A_f, B_f, C_f, D_f]$ . Опис спектральної моделі Драйдена і формуючого фільтра представлено в [7]. Матриця  $Bg0$  на рис.1 об'єднує вхід управління  $u$  і вхід збурень  $w_1$  в один вектор входу; матриця  $A$  - матриця простору станів БПЛА, матриця  $C$  - використовується для спостереження вектора у реальної замкненої системи. Формуючий фільтр використовується для розрахунку показника якості лише в стохастичному випадку.

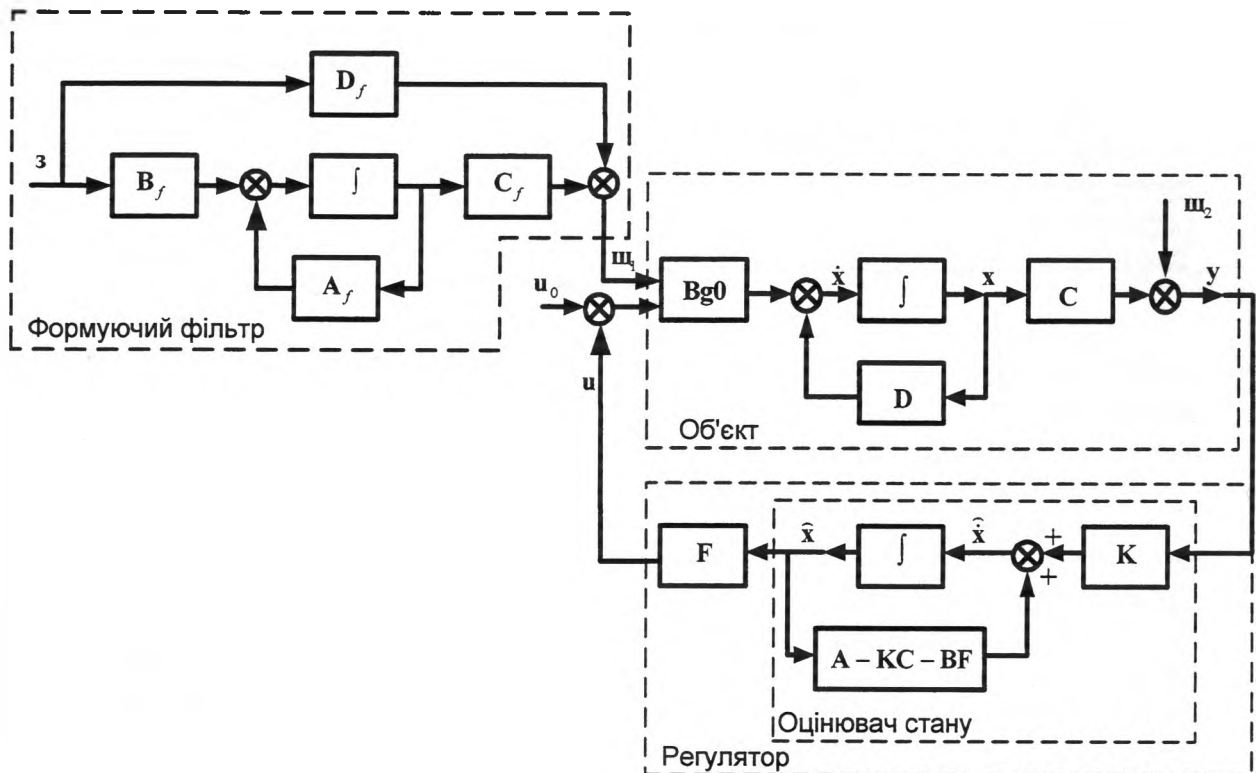


Рис. 1. Оптимальна стохастична система управління

Коефіцієнти  $K$  для оптимального спостерігача, яким є фільтр Калмана [1], і коефіцієнти підсилення оптимального регулятора  $F$  отримуємо в результаті оптимізації, використовуючи вирази (4), (5) та (7), (8). Для синтезу регулятора необхідно визначити четвірки матриць  $[A_{ser}, B_{ser}, C_{ser}, D_{ser}]$  стохастичної системи:

$$\begin{bmatrix} A_{ser} & B_{ser} \\ C_{ser} & D_{ser} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & 0 & B_f & 0 \\ Bg0 & A & Bg0 \cdot D & Bg0 \\ C & & & D \end{bmatrix}$$

Для системи, що представлена на рис. 1 необхідно також визначити четвір-

ки матриць  $[A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}]$ , що описують детерміновані моделі замкненої системи для номінального і параметрично збуреного випадків. Послідовне з'єднання цієї моделі з формуючим фільтром утворює модель для аналізу системи в стохастичному випадку. Отже, в багатомодельному підході використовуються такі четвірки матриць:

- детермінована замкнена система, що отримана в результаті з'єднання об'єкта з регулятором (номінальна і параметрично збурена):

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} A & -BF & B & \\ \hline KC & A-KC-BF & 0 & \\ \hline & C & & D \end{array} \right] \quad i$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{cl}^p & B_{cl}^p \\ \hline C_{cl}^p & D_{cl}^p \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} A^p & -B^p F & B^p & \\ \hline KC^p & A^p - KC^p - B^p F & 0 & \\ \hline & C^p & & D^p \end{array} \right]$$

• стохастична замкнена система, що отримана в результаті з'єднання об'єкта з регулятором (номінальна і параметрично збурена):

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{cls} & B_{cls} \\ \hline C_{cls} & D_{cls} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_f & 0 & 0 & B_f \\ \hline C_f & A & -Bg_0 \cdot D & D_f \\ \hline & 0 & KC & A-KC-BF \\ \hline & & C & D \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{cls}^p & B_{cls}^p \\ \hline C_{cls}^p & D_{cls}^p \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_f & 0 & 0 & B_f \\ \hline C_f & A^p & -Bg_0^p \cdot D^p & D_f \\ \hline & 0 & KC^p & A^p - KC^p - B^p F \\ \hline & & C^p & D^p \end{array} \right]$$

Спрощену структуру регулятора, що описується системою рівнянь (10) в середовищі *MATLAB* можна отримати, використовуючи оператор *'lqgreg'* [8].

Використання фільтра Калмана для відновлення стану збільшує порядок системи вдвічі. Тому доцільно спробувати понизити порядок спрощеного регулятора. З цією метою пропонується виконати пониження порядку регулятора за допомогою використання її балансної моделі. Як відомо [8] граміан спостережуваності і граміан керованості цієї моделі рівні і являються діагональними матрицями. Враховуючи це, пониження порядку здійснюється досить простими методами. Спочатку обчислюється діагональ  $g$  результуючого граміана, що використовується для пониження порядку моделі. Так як вектор  $g$  характеризує ступінь керованості і спостережуваності мод збалансованої моделі, то можна знехтувати тими модами, яким відповідають малі значення  $g(i)$ , зберігаючи самі важливі властивості початкової системи.

Побудова збалансованої моделі в середовищі *MATLAB* здійснюється за допомогою оператора *'balreal'*, а для пони-

ження порядку призначена функція *'modred'* [8].

Так як необхідно, щоб корні системи при стохастичному впливі не виходили за певні межі, то доцільно провести пониження порядку зі збереженням характеристик перехідного процесу. Це можна зробити за допомогою оператора *'modred(...'del')* в середовищі *MATLAB*.

Для конкретного прикладу, що розглянутий нижче, вдалося понизити порядок регулятора від 9 до 3 при збереженні якості системи ( $H_2$ - та  $H_\infty$ - норм).

Параметри, що були визначені після виконання процедури синтезу оптимальної стохастичної системи для номінальної моделі об'єкта за допомогою теореми розділення є початковими значеннями для наступного етапу: робастної оптимізації. При цьому необхідно переконатися, що оптимальний регулятор, синтезований для номінального об'єкта, забезпечить стійкість замкненої системи із параметрично збуреним об'єктом.

### Робастизація

Наступним етапом після створення оптимального регулятора для збуреної і оптимальної систем є робастна оптимізація, що заключається в мінімізації комплексного показника «робастність-якість». Цей складний критерій оптимізації включає в себе такі компоненти [3, 4]:

1.  $H_2$ -норму для кожної моделі системи управління (номінальної та параметрично збуреної) в детермінованому випадку, що показує чутливість системи до детермінованих збурень:

$$J_d = \sqrt{\int_0^\infty [X^T Q X + U^T R U] dt} \quad (11)$$

2.  $H_2$ -норму кожної моделі в стохастичному випадку:

$$J_d = \sqrt{E_M [X^T Q X + U^T R U]} \quad (12)$$

3.  $H_\infty$ -норму для кожної моделі:

$$\|G\|_\infty = \sup u(G(j\omega)), \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (13)$$

В виразах (11), (12)  $E_M$  - оператор математичного чекання, що обчислюється

по ансамблю. В виразі (13)  $\bar{\sigma}$  - максимальне сингулярне число матриці  $G(j\omega)$  комплементарної функції чутливості в діапазоні частот:  $0 \leq \omega \leq \infty$ .

Таким чином комплексний показник «робастність-якість»  $J_\Sigma$  можна записати так:

$$J_\Sigma = \lambda_{dn} H_2^{dn} + \lambda_{dp} H_2^{dp} + \lambda_{sn} H_2^{sn} + \lambda_{sp} H_2^{sp} + \lambda_\infty H_{inf}^n + \lambda_\infty^p H_{inf}^p + PF, \quad (14)$$

де  $H_2^{dn}$ ,  $H_2^{sn}$  -  $H_2$ -норма для номінальної детермінованої і стохастичної моделей відповідно,

$H_2^{dp}$ ,  $H_2^{sp}$  -  $H_2$ -норма для збуреної детермінованої і стохастичної моделей відповідно,

$H_{inf}^n$ ,  $H_{inf}^p$  -  $H_\infty$ -норма для номінальної і збуреної моделей,

$\lambda_{dn}$ ,  $\lambda_{dp}$ ,  $\lambda_{sn}$ ,  $\lambda_{sp}$ ,  $\lambda_\infty$ ,  $\lambda_\infty^p$  - відповідні вагові коефіцієнти,

$PF$  - штрафна функція.

Збільшуючи чи зменшуючи вагу  $\lambda_\infty$ ,  $\lambda_\infty^p$  відносно ваги складових якості  $\lambda_{dn}$ ,  $\lambda_{dp}$ ,  $\lambda_{sn}$ ,  $\lambda_{sp}$ , можна досягнути компромісу між якістю і робастністю системи. Показник «робастність-якість» (14) є функцією вектора змінних параметрів регулятора (автопілоту)  $F$ , що включають в себе коефіцієнти підсилення всіх вхідних сигналів. Оптимізаційна процедура повинна визначити таку величину вектора  $F$ , при якій комплексний показник «робастність-якість» досягає мінімуму.

Так як граміан керованості, що обчислюється при знаходженні показників якості, можна визначити лише для стійких і повністю керованих систем, то при зміні  $F$  в процесі виконання оптимізаційної процедури необхідно забезпечити стійкість системи. Для зведення задачі умовної оптимізації до задачі безумовної, включаємо в критерій якості штрафну функцію  $PF$ , що обмежує розміщення полюсів всередині деякої області  $M$  на комплексній площині [3]. Ця область представлена на рис. 2, а обмежена чотирима лініями.

Вона може бути охарактеризована трьома параметрами:  $d_0$ ,  $\alpha$  (кут) чи  $K = tg(\alpha)$ , і  $D$ . Ці параметри обмежують відповідно: мінімальну величину дійсної частини полюсів для створення деякого запасу стійкості ситсеми, відхилення якості замкнутої системи, і ширину полоси пропускання замкнутої системи. Таким чином, штрафна функція, що використовується при виході за межі області  $M$ , повинна мати три складові для випадків відхилень від вертикальних та похилих меж. Вона зображена на рис. 2, б. Штрафна функція повинна бути нульовою всередині області, показаної на рис. 2, б і швидко наростати поза її межами. Штрафна функція є функцією мінімальної відстані від полюсів номінальної та збуреної систем до кожної з меж області  $M$ . Сама ж штрафна функція цієї мінімальної відстані  $d_m$  визначається виразом [3, 4]:

$$PF_1(d_m) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } d_m \geq d_{m1} \\ \frac{P}{2} \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi(d_m - d_0)}{d_{m1} - d_0}\right) \right], & \text{якщо } d_0 < d_m < d_{m1} \\ P, & \text{якщо } d_m \leq d_0 \end{cases} \quad (15)$$

Величина  $d_m$  визначається як мінімум всіх відстаней від полюсів замкнутої системи до уявної осі для номінальної та збуреної моделей,  $P$  має досить велике значення (наприклад  $P = 10^4 - 10^6$ ) і призначене для утримання полюсів всередині дозволеної області  $M$ . Ця штрафна функція має значне наростання градієнта при наближенні до межі  $d_0$ . Інші обмеження полюсів не такі критичні для стійкості тому штрафна функція може бути вибрана, наприклад, таким чином:

$$PF_2 = 0, \quad \text{якщо } d_k \geq -D \text{ і} \\ PF_2 = (d_k + D)^2, \quad \text{якщо } d_k < -D, \quad (16)$$

де  $d_k = \min(\text{Re}(P_k))$ . Штрафні функції  $PF_1$  і  $PF_2$  такі, як показано на рис. 2, б.

Штрафна функція (7), (8) має велике значення при виконанні оптимізаційної процедури по таким причинам:

1) якщо система зберігає стійкість під час виконання процедури оптимізації, то показник якості є випуклою функцією,

що забезпечує єдине рішення задачі оптимізаційної процедури [6];

2) розміщення полюсів як номінальної так і збуреної моделей в межах області  $M$  саме по собі гарантує певну робастність системи [9].

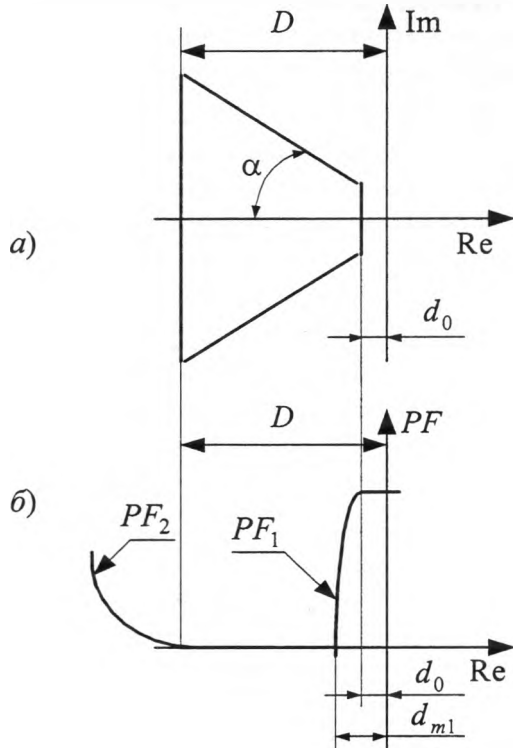


Рис. 2. Штрафна функція: а - розміщення полюсів замкненої системи; б - штрафна функція

Якщо деякі змінні простору стану не задовольняють вимогам до системи управління польотом, необхідно змінити відповідні вагові коефіцієнти в виразі (14) і виконати процедуру оптимізації повторно. Співвідношення між  $H_2$  - та  $H_\infty$  - нормами (співвідношення між якістю і робастністю системи) змінюється за допомогою вагових коефіцієнтів  $\lambda_{dn}$ ,  $\lambda_{dp}$ ,  $\lambda_{sn}$ ,  $\lambda_{sp}$  та  $\lambda_{\infty}$ ,  $\lambda_{\infty}^p$ . Таким чином, виконання процедури робастної оптимізації здійснюється в інтерактивному режимі до тих пір, поки якість і робастність системи не будуть задовольняти певним вимогам (наприклад нормам льотної придатності).

Останнім етапом процедури синтезу робастної системи управління є моделювання динаміки її нелінійних елементів типу насичення, зони нечутливості і т.д., що властиві реальним законам управління

польотом [7]. Тому кінцевий висновок про якість функціонування системи управління роблять після її моделювання в пакеті *SIMULINK* з використанням відповідних нелінійних функцій.

**Приклад:** Робастна структурна оптимізація неперервної системи управління повздовжнім рухом ЛА

Розглянемо режим стабілізації висоти і кута тангажа для малого БПЛА [9]. Компоненти матриці інерції БПЛА приводяться в зв'язаній системі координат, прийнятій в американській літературі [7], де ось  $x$  є повздовжньою віссю літака, ось  $y$  розташована в горизонтальній площині літака і направлена вздовж правого крила, ось  $z$  направлена вниз. Позначення кута тангажа  $\theta$  (theta) (якому відповідає  $\vartheta$  в вітчизняній літературі) і кутової швидкості тангажа  $q$  (якій відповідає  $\omega_z$  в вітчизняній літературі) також є загальноприйнятим в зарубіжній літературі. Управління в повздовжньому русі здійснюється лише рухом висоти.

Розглядається дві моделі: номінальна (при дійсній повітряній швидкості 250 км/год) і збурена (при дійсній повітряній швидкості 200 км/год). Матриці простору станів  $A$ ,  $A_p$  і управління  $B$ ,  $B_p$  для обох лінійних моделей з вхідним управлінням  $u$ , вектором стану  $x$  і вектором виходу  $y$  мають вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0345 & 5.9942 & -9.7764 & 0 & 0 \\ -0.0041 & -1.7565 & 0 & 0.9860 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0033 & -25.6814 & 0 & -2.1905 & 0 \\ 0 & Vt & Vt & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.0273 & 5.9960 & -9.7764 & 0 & 0 \\ -0.0064 & -1.3927 & 0 & 0.9971 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0036 & -16.1243 & 0 & -1.7339 & 0 \\ 0 & -Vtp & Vtp & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = [0.3576 \quad -0.1628 \quad 0 \quad -31.1037 \quad 0]^T;$$

$$B_p = [0.3581 \quad -0.1303 \quad 0 \quad -19.8857 \quad 0]^T;$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

де матриці збуреної моделі позначаються з індексом  $p$ , а як змінні стану використовуються:  $V_t$  - швидкість,  $b$  - кут атаки,  $u$  - кут тангажа,  $q$  - кутова швидкість тангажа,  $h$  - висота. При дослідженні стохастичного випадку припускалося, що на БПЛА діє турбулентний боковий вітер, с.к.з. миттєвої швидкості якого дорівнює 2,5 м/с.

Виконавчий механізм БПЛА описується четвіркою:

$$\begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T_a & 1/T_a \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

де  $T_a = 0.5$  - постійна стану виконавчого механізму.

На вхід автопілота поступають сигнали від датчиків кута тангажа  $\theta$ , кутової швидкості тангажа  $q$  і висоти  $h$ .

Для синтезу оптимального регулятора (що здійснюється на першому етапі *NPRS*-підходу) необхідно перш за все відновити стан системи, так як синтез оптимального регулятора передбачає, що стан системи повністю вимірюється. Але в зв'язку з тим, що на нашу систему діє турбулентний вітер, с.к.з. якого 2,5 м/сек і доступні неповні та неточні виміри лише трьох параметрів, то нам необхідно спочатку відновити стан системи, тобто синтезувати спостерігач.

Як відомо [1], оптимальним спостерігачем для системи, на яку діють стохастичні збурення, є фільтр Калмана. Система для якої синтезується фільтр Калмана є конкатанацією формуючого фільтра і БПЛА, що дає можливість врахувати стохастичний вплив атмосфери. Крім системи, що описана у просторі станів, для синтезу фільтра Калмана необхідно задати значення матриць коваріацій шумів  $V_1$ ,

збурень, що діють на стан системи, і  $V_2$  шумів спостережень (дивись формули (1), (2), (6)-(8)). Для нашого випадку вони мають такі значення:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}.$$

В результаті синтезу отримали оптимальний спостерігач.

Так як стан системи тепер повністю відновлено, можна застосувати процедуру синтезу оптимального регулятора. Для неї ми задаємо матриці вагових коефіцієнтів  $Q$ ,  $R$ , що враховують вплив кожної змінної простору станів і управління відповідно (дивись формули (9)-(11)). Для нашої системи вони мають такі значення:

$$R1 = [0.1 \ 1 \ 1 \ 5 \ 0.1 \ 1 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01]; \\ Q = \text{diag}(R1); R = 1;$$

Результатом обчислень є коефіцієнти підсилення  $F$  для кожної змінної стану системи:

$$F = [-0.0055 \ 23.1277 \ -27.5729 \ -1.6705 \\ -0.5607 \ 1.6444 \ -0.0191 \ -0.0017 \ -0.0564]$$

Ці коефіцієнти є початковими даними для процедури робастної оптимізації з використанням комплексного показника «робастність-якість».

Таким чином у нас тепер є всі дані для синтезу спрощеного оптимального регулятора, що описується рівнянням (10).

Порядок оптимального регулятора дорівнює порядку системи. Це призводить до того, що порядок замкненої системи дорівнює  $2n$  [1], де  $n$  - це порядок системи, що описує динаміку БПЛА.

Доцільно спробувати понизити порядок регулятора. Для цього використовується процедура, описана вище. Згідно з нею будується збалансована модель спрощеного оптимального регулятора і обчислюється діагональ граміана керованості чи спостережуваності (для балансної моделі вони рівні). Для нашого прикладу вона дорівнює:

$$g = [0.0418 \ 0.0391 \ 0.0154 \ 0.0082 \\ 0.0065 \ 0.0007 \ 0.0003 \ 0.0002 \ 0.0000]'$$

В отриманому векторі  $g$  моди 4 – 9 мають значення значно менші, ніж інші, тому ними можна знехтувати. Видаливши ці моди за допомогою оператора  $modred(...'del')$  ми понизили порядок спрощеного оптимального регулятора до трьох. Робастну оптимізацію проведено для системи з повним порядком. Після підстановки в регулятор знайдених в процедурі робастної оптимізації коефіцієнтів підсилення, порядок регулятора понижено до третього. При цьому норми робаст-

ної системи з пониженим порядком менші ніж оптимальної.

Значення  $H_2$ - та  $H_\infty$ - норми для оптимальної систем з повним та пониженим порядками, а також для робастної системи з пониженим порядком занесено в таблицю 1.

З метою визначення значень вагових коефіцієнтів  $\lambda(i)$  було виконано кілька «прогонів» процедури оптимізації. Оптимальні значення всіх параметрів було отримано при таких значеннях коефіцієнтів:  $\lambda_{sn} = \lambda_{sp} = 1.8$ ,  $\lambda_{dn} = \lambda_{dp} = 0.6$ ,  $\lambda_\infty = \lambda_\infty = 0.7$ .

Табл. 1. Показники якості номінальної та збуреної моделей з повним і пониженим порядками

		Оптим. сист. з повним пор.	Оптим. сист. з 3-м пор.	Робастна сист. з 3-м пор.
$H_2$ стох. випадок	номін.	0,6796	0,6994	0,6890
	збурена	0,5344	0,5596	0,5488
$H_2$ дет. випадок	номін.	1,1732	1,1954	1,1349
	збурена	1,9975	1,0185	0,9868
$H_\infty$ дет. випадок	номін.	1,6943	1,8257	1,4062
	збурена	1,7227	1,8794	1,4323

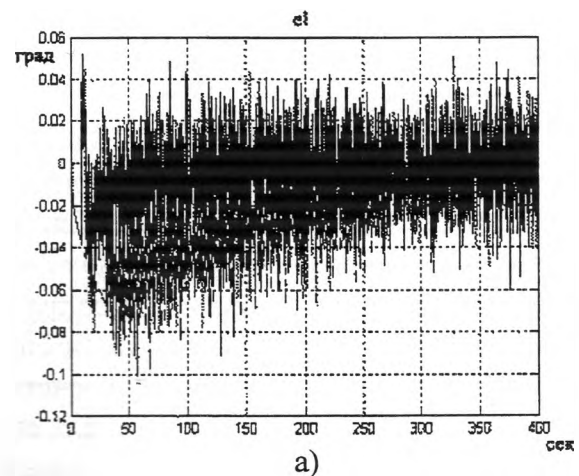
Таким чином оптимізація з використанням комплексного показника «робастність-якість» дозволяє збільшити робастність оптимальної системи, що отримана з використанням теореми розділення. Крім цього оптимальна система з точки зору  $H_2/H_\infty$ - норм дозволяє провести пониження порядку системи (див. табл. 1) не погіршуючи якість системи, що значно спрощує структуру регулятора (коли система просто оптимальна, таке пониження порядку призводить до погіршення показників якості).

Також було проведено моделювання перехідних процесів в номінальній та параметрично збуреній системах в середовищі *SIMULINK*. Результат зображено на рис. 3.

Для прикладу взято відхилення руля висот ( $eI$ ), перехідні процеси по куту тангажа ( $th$ ), висоти ( $h$ ) і куту атаки ( $al$ ) для номінальної (неперервна лінія) та параметрично збуреної (штрих-пунктирна лінія) моделей.

Моделювання проведено з урахуванням всіх нелінійних функцій, які притаманні реальному автопілоту, і при наявності турбулентного бокового вітру ( $\sigma_w = 2,5$  м/с).

Про близькість динамічних характеристик замкненої номінальної і збуреної систем свідчать логарифмічні характеристики.





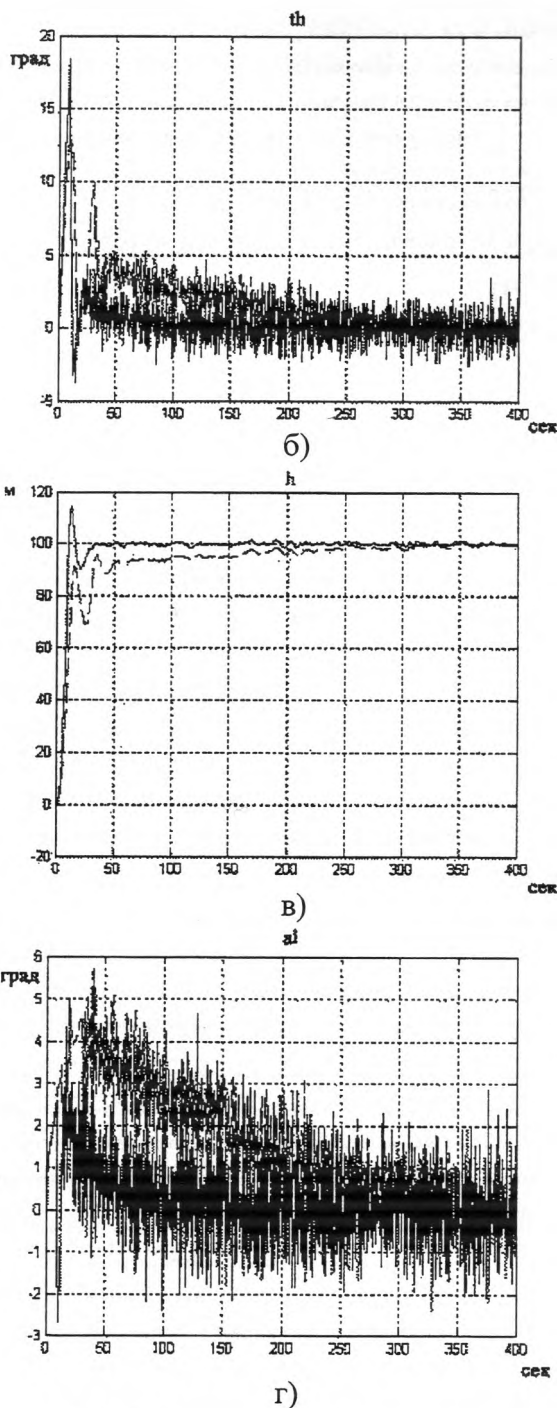


Рис. 3. Результати моделювання

### Список літератури

1. Х. Квакернаак, Р. Сиван. Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 464 с.
2. E. Schoemig, M. Sznajder. Mixed  $H_2/H_\infty$  Control of Multi-model Plants. Journal of Guidance, Control and Dynamics, No.3, May-June, 1995. – p.p. 525-531.
3. Anatol A. Tunik, Hyeok Ryu and Hae-Chang Lee. Parametric Optimization Procedure for Robust Flight Control System Design. KSAS International Journal. Vol. 2, № 2, November 2001.
4. A. A. Tunik and E. A. Abramovich. Parametric Robust Optimization of digital Flight Control Systems // Вісник НАУ. – №2. – 2003. – С. 31-37.
5. J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, B. Francis. State-Space Solution to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol.34, No.8, Aug. 1989. – p.p. 831-847.
6. H. Kwakernaak. Robust Control and  $H_\infty$ -Optimization. – Tutorial Paper. Automatica, vol. 29, No.2, 1993. – pp. 255-273.
7. D. McLean. Automatic Flight Control Systems. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1990. – 593 p.
8. В. С. Медведев, В. Г. Потемкин. Control System Toolbox. – М.: Диалог - МИФИ, 1999. – 287 с.
9. S. Skogestad, I. Postlethwaite. Multivariable Feedback Control. Analysis and Design. John Wiley & Sons, 1997. – 559 p.