

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ОСНОВНИМИ ТА ЗМІЩЕНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

¹Інститут інформатики Національного авіаційного університету,

²Інститут проблем матеріалознавства НАН України

Виконано порівняння ефективності динамічних методів моделювання процесів бази основних та зміщених диференціальних перетворень. Це показує, що використання зміщених диференціальних перетворень забезпечує зменшення високої оцінки межі похибки.

Постановка проблеми

Для дослідження динамічних процесів, що описуються системами нелінійних диференціальних рівнянь, використовують різноманітні методи, серед яких чільне місце посідають чисельні методи. Але такий підхід не виправдовує себе, наприклад, в задачах оптимізації, де чисельне розв'язання є складним у обчислювальному відношенні і при цьому не гарантує знаходження оптимального значення. Також великий обсяг обчислень перешкоджає розв'язанню задач у реальному і прискореному часі, що є необхідною умовою в системах автоматичного керування.

Аналіз досліджень і публікацій

В [1] для розв'язку нелінійних граничних задач застосовувались основні диференціальні перетворення [2], які дозволяють звести складну задачу синтезу оптимального керування до задачі розв'язку кінцевих рівнянь. В основних диференціальних перетвореннях точка розкладу оригіналу в ряд Тейлора розташовується у початковій точці часового аргументу $t = 0$. Таке розташування точки розкладу оригіналу суттєво обмежує довжину інтервалу часу, на якому розв'язується задача оптимального керування. Зміщені перетворення, на відміну від основних, одержані шляхом переносу центру розкладу оригіналу в степеневий ряд Тейлора із точки $t = 0$ в зміщену точку t_v . При цьому вико-

ристовуються дві моделі в області зміщених перетворень – пряма модель (від зміщеної точки до кінця відрізка) та модель у зворотному напрямку (від зміщеної точки до початку відрізка). Це дозволяє розширити припустимий інтервал розв'язку, обмеження на який визначається радіусом збіжності ряду Тейлора, а також підвищити точність розв'язку.

Мета роботи

Метою даної роботи являється порівняння методів зміщених та основних диференціальних перетворень для моделювання динамічних об'єктів і процесів та аналіз і обґрунтування ефективності зміщених диференціальних перетворень.

Порівняння ефективності основних та зміщених диференціальних перетворень

Нехай $x(t)$ – аналітична функція, яка описує детермінований динамічний процес. Функція $x(t)$ розглядається на відрізку часового аргументу $H \geq t \geq 0$, де H вибирається всередині радіусу R збіжності ряду Тейлора: $R > H \geq 0$. Будемо вважати, що аналітична функція $x(t)$, що диференціюється будь-яку кількість разів в довільній точці $t \in [0, H]$, має похідні m -го порядку, обмежені в сукупності для будь-якого цілого $m \geq 1$ так, що

$$|x^{(m)}(t)| \leq C < +\infty, \quad t \in [0, H]. \quad (1)$$

Застосуємо до функції $x(t)$ основні ДТ-перетворення

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \cdot x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k X(k) \quad (2)$$

і зміщені ДТ-перетворення вигляду

$$X_v^+(k) = \frac{(H-t_v)^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t_v+\tau)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0} \cdot x(t_v+\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{H-t_v} \right)^k X_v^+(k), \quad (3)$$

$$X_v^-(k) = \frac{t_v^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t_v-\tau)}{d\tau^k} \right]_{\tau=0} \cdot x(t_v-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{t_v} \right)^k X_v^-(k),$$

де $X_v^+(k)$ та $X_v^-(k)$ – дискретні функції цілочисельного аргументу $k=0,1,2,\dots$, що є зображеннями функцій $x(t_v+\tau)$ та $x(t_v-\tau)$ відповідно; τ – локальний часовий аргумент; значення якого обирається в межах $H \geq \tau \geq 0$; точка зсуву t_v вибирається в межах $H > t_v > 0$. Величини дискретних функцій $X_v^+(k)$ та $X_v^-(k)$ при цілочисельних значеннях аргументу k називаються дискретами відповідних диференціальних спектрів.

Обмежимо число використовуваних дискрет диференціальних спектрів $X(k)$ і $X_v(k)$ деяким заданим числом $q > 0$ так, що цілочисельний аргумент $k = 0, 1, 2, \dots, q$. В загальному випадку, при обмеженні числа використовуваних дискрет диференціальних спектрів $X(k)$ і $X_v(k)$ виникає похибка в процесі зворотних перетворень у формі рядів Тейлора вигляду (2) і (3).

Відомо [3], що оцінка зверху похибки $|\varepsilon_0|$ основних зворотних перетворень (2) дається виразом

$$|\varepsilon_0| \leq \frac{H^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{0 < t_j < H} |x^{(q+1)}(t_j)|. \quad (4)$$

З урахуванням обмеження (1) вираз (4) представимо у вигляді

$$|\varepsilon_0| \leq C \frac{H^{q+1}}{(q+1)!} = |\bar{\varepsilon}_0|. \quad (5)$$

Зміщені зворотні перетворення (3) покривають часовий інтервал $[0, H]$ двома відрізками ряду Тейлора на часових інтервалах $[0, t_v]$ і $[t_v, H]$. В результаті похибка апроксимації функції $x(t)$ двома відрізками ряду Тейлора на цих інтервалах має дві складові ε_{1C} і ε_{2C} , які оцінюються зверху таким чином

$$|\varepsilon_{1C}| \leq \frac{t_v^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{0 < t_i < t_v} |x^{(q+1)}(t_i)|, \quad (6)$$

$$|\varepsilon_{2C}| \leq \frac{(H-t_v)^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{t_v < t_j < H} |x^{(q+1)}(t_j)|. \quad (7)$$

На підставі обмеження (1) можна зробити висновок, що

$$C_1 = \sup_{0 < t_i < t_v} |x^{(q+1)}(t_i)| \leq C < +\infty, \quad (8)$$

$$C_2 = \sup_{t_v < t_j < H} |x^{(q+1)}(t_j)| \leq C < +\infty. \quad (9)$$

Дійсно, якщо $(q+1)$ -а похідна функції $x(t)$ досягає максимального значення на інтервалі $(0, t_v)$, то $C_1 = C$, інакше $C_1 < C$.

Аналогічно, якщо $(q+1)$ -а похідна функції $x(t)$ має максимум на інтервалі (t_v, H) , то $C_2 = C$, інакше $C_2 < C$.

Оцінки похибок ε_{1C} (6) і ε_{2C} (7) з урахуванням обмежень (8) і (9) представимо у вигляді

$$|\varepsilon_{1C}| \leq C \frac{t_v^{q+1}}{(q+1)!} \quad (10)$$

$$|\varepsilon_{2C}| \leq C \frac{(H-t_v)^{q+1}}{(q+1)!}. \quad (11)$$

Перетворимо оцінки (10), (11) в оцінки відносних похибок. Виберемо за базу порівняння верхню оцінку похибки (5) для основних перетворень. Оцінки похибок (10), (11) зміщених перетворень по відношенню до верхньої оцінки похибки (5) основних перетворень мають вигляд

$$\frac{|\varepsilon_{1C}|}{|\bar{\varepsilon}_0|} \leq \frac{t_v^{q+1}}{H^{q+1}}, \quad (12)$$

$$\frac{|\varepsilon_{2C}|}{|\bar{\varepsilon}_0|} \leq \frac{(H-t_v)^{q+1}}{H^{q+1}}. \quad (13)$$

З виразів (12), (13) випливає, що при виборі точки зсуву t_v в межах часового інтервалу $[0, H]$ складові відносних похибок змінюються в межах

$$0 \leq \left| \frac{\varepsilon_{iC}}{\bar{\varepsilon}_0} \right| \leq 1, \quad i=1,2. \quad (14)$$

Проте, складові відносних похибок конфліктують між собою. Зменшення однієї складової похибки призводить до збільшення іншої складової і навпаки.

Тому розв'яжемо задачу оптимального вибору точки зсуву t_v за нелінійною схемою компромісів [4], поставивши задачу двокритеріальної оптимізації. Виберемо за часткові критерії максимально можливі значення складових відносних похибок (12) і (13)

$$I_1(t_v) \leq \frac{t_v^{q+1}}{H^{q+1}}, \quad (15)$$

$$I_2(t_v) \leq \frac{(H-t_v)^{q+1}}{H^{q+1}}. \quad (16)$$

Межі зміни часткових критеріїв (15), (16) визначаються виразом (14)

$$1 \geq I_1 \geq 0, \quad 1 \geq I_2 \geq 0. \quad (17)$$

Ставиться задача векторної оптимізації критерію якості $I = (I_1, I_2)$ за змінною t_v в межах обмежень (17). Цю задачу розв'язуємо за нелінійною згортокою часткових критеріїв [4]

$$\min_{t_v} I(t_v) = \min_{t_v} \left[\frac{1}{1 - \frac{t_v^{q+1}}{H^{q+1}}} + \frac{1}{1 - \frac{(H-t_v)^{q+1}}{H^{q+1}}} \right]. \quad (18)$$

Вираз (18) перетворимо до вигляду

$$\min_{t_v} I(t_v) = \min_{t_v} H^{q+1} \left[\frac{1}{H^{q+1} - t_v^{q+1}} + \frac{1}{H^{q+1} - (H-t_v)^{q+1}} \right]. \quad (19)$$

Необхідна умова екстремуму функції однієї змінної $I(t_v)$

$$\frac{\partial I(t_v)}{\partial t_v} = 0. \quad (20)$$

Підставляючи в (20) вираз (19), маємо рівняння

$$\frac{t_v^q}{(H^{q+1} - t_v^{q+1})^2} + \frac{(H-t_v)^q}{[H^{q+1} - (H-t_v)^{q+1}]^2} = 0. \quad (21)$$

Рівнянню (21) задовольняє корінь $t_v = H/2$.

Відомо, що функція $I(t_v)$ в межах обмежень (17) унімодальна за умови опуклості часткових критеріїв (15), (16) [5]. Отже, точка зсуву $t_v^0 = H/2$ доставляє Парето-оптимальний розв'язок двокритеріальної задачі (15) - (17) при $q \geq 1$. Часткові критерії (15), (16) в точці $t_v^0 = H/2$ приймають значення

$$I_1^0\left(t_v = \frac{H}{2}\right) = I_2^0\left(t_v = \frac{H}{2}\right) = \frac{1}{2^{q+1}}. \quad (22)$$

Розглянемо повну похибку зміщених перетворень $\varepsilon_C = \varepsilon_{1C} + \varepsilon_{2C}$ по відношенню до верхньої оцінки похибки $\bar{\varepsilon}_0$ основних перетворень

$$\left| \frac{\varepsilon_C}{\bar{\varepsilon}_0} \right| = \left| \frac{\varepsilon_{1C}}{\bar{\varepsilon}_0} \right| + \left| \frac{\varepsilon_{2C}}{\bar{\varepsilon}_0} \right|. \quad (23)$$

З врахуванням (12), (13) вираз (23) при виборі точки зсуву $t_v = H/2$ приймає вигляд

$$\left| \frac{\varepsilon_C}{\bar{\varepsilon}_0} \right| \leq \left| \frac{1}{2^{q+1}} \right| + \left| \frac{1}{2^{q+1}} \right| = \frac{1}{2^q} = 2^{-q}. \quad (24)$$

Звідси випливає висновок, що оцінка зверху похибки зміщених перетворень в 2^q раз менше оцінки зверху похибки основних перетворень при $t_v = H/2$, тобто

$$|\varepsilon_C| \leq 2^{-q} |\bar{\varepsilon}_0|, \quad (25)$$

де q - кількість врахованих дискрет диференціальних спектрів $X_\nu(k)$ і $X(k)$ поверх нульових дискрет $X_\nu(0)$ і $X(0)$, тобто число q рівно номеру останніх врахованих дискрет диференціальних спектрів $X_\nu(k)$ і $X(k)$.

Визначимо нижню оцінку похибки зміщених ДТ-перетворень (3). З розгляду зворотних зміщених перетворень (3) випливає, що непарні дискрети диференціального спектру $X_\nu(k)$, помножені на множник $\left(\pm \frac{\tau}{H}\right)^k$, дають добуток з різними знаками, оскільки локальний аргумент $\tau < 0$ на інтервалі $[0, t_v]$ і $\tau > 0$ на інтервалі

$[t_v, H]$. Тому непарні члени рядів Тейлора на інтервалах $[0, t_v]$ і $[t_v, H]$ для довільної аналітичної функції $x(t)$ мають різні знаки при ненульових непарних дискретах диференціального спектру $X_v(k)$.

У випадку ненульових парних дискрет диференціального спектру $X_v(k)$ члени рядів Тейлора $\left(-\frac{\tau}{H}\right)^k X_v(k)$ і $\left(+\frac{\tau}{H}\right)^k X_v(k)$ відповідно на інтервалах $[0, t_v]$ і $[t_v, H]$ мають однакові знаки.

Звідси випливає висновок, що похибки ε_{1C} і ε_{2C} можуть мати різні або однакові знаки. Випадок однакових знаків похибок ε_{1C} і ε_{2C} врахований при висновку оцінки зверху (23) - (25) похибки $\varepsilon_3 = \varepsilon_{1C} + \varepsilon_{2C}$.

У випадку різних знаків похибок ε_{1C} і ε_{2C} і рівності їх абсолютних значень одержуємо нижню межу похибки $\varepsilon_{Cmin} = 0$. З урахуванням нижньої межі оцінки похибки зміщених перетворень $|\varepsilon_C| \geq 0$ і оцінки зверху (25) встановлюємо діапазон зміни похибки зміщених перетворень при $t_v = H/2$

$$0 \leq |\varepsilon_C| \leq 2^{-q} |\bar{\varepsilon}_0|. \quad (26)$$

З виразу (26) випливає висновок про те, що зміщені ДТ-перетворення (3) при обмеженій кількості q дискрет диференціального спектру $X_v(k)$ дають можливість отримати точне значення довільної аналітичної функції $x(t)$ в точці $t = H$ при виконанні умови (1).

Основні ДТ-перетворення (2) дають точне значення аналітичної функції $x(t)$ в точці $t = H$ тільки в окремому випадку, коли $x(t)$ є поліном ступеня $n \leq q$. В інших випадках похибка основних ДТ-перетворень (2) $|\varepsilon_0| > 0$ для обмеженої кількості $q < +\infty$ дискрет диференціального спектру $X(k)$. Похибка $|\varepsilon_0| > 0$ не може бути зведена до нуля розбиттям відрізка $[0, H]$ на будь-яке кінцеве число $N < +\infty$, оскі-

льки нульове значення похибки основні ДТ-перетворення (2) дають в загальному випадку на довільному ненульовому часовому відрізку тільки при врахуванні нескінченної кількості членів ряду Тейлора або дискрет диференціального спектру $X(k)$.

З аналізу виразу (26) випливає, що із збільшенням числа q врахованих дискрет диференціального спектру $X_v(k)$ верхня межа оцінки похибки зміщених ДТ-перетворень (3) зменшується за показниковим законом і в границі при $|\varepsilon_0| > 0$ і $q \rightarrow \infty$ прямує до нижньої границі, рівної нулю.

Звідси випливає, що ефективність застосування зміщених ДТ-перетворень (3) в порівнянні з основними ДТ-перетвореннями (2) зростає за показниковим законом із збільшенням числа q врахованих дискрет диференціального спектру $X_v(k)$. Тому для високоточних обчислень доцільно застосовувати зміщені ДТ-перетворення (3) замість основних перетворень (2).

З виразу (26) випливає, що при $q \rightarrow \infty$ відносна похибка зміщених перетворень

$$\left| \frac{\varepsilon_C}{\bar{\varepsilon}_0} \right| \rightarrow 0 \text{ при } t_v = H/2. \text{ Досягненню нульової похибки } \varepsilon_C = 0 \text{ при } t_v = H/2 \text{ перешкоджає обмеженість розрядної сітки представлення дискрет диференціального спектру } X_v(k).$$

Похибка, викликана обмеженою розрядною сіткою, обмежує зверху число $q < +\infty$. З метою зменшення впливу обмеженої розрядної сітки на точність обчислень слід рекомендувати виконувати обчислення зміщеними ДТ-перетвореннями (3) на подвоєній розрядній сітці по відношенню до розрядної сітки, довжина якої визначається необхідною точністю представлення фізичних величин.

Ефективність зміщених диференціальних перетворень аж до точного розв'язку можна проілюструвати на прикладі.

Нехай задана функція

$$x(t) = \frac{1}{1+t}, \quad t \in [0; 1,5]. \quad (27)$$

Знайдемо значення функції $x(t)$ в кінцевій точці $t = 1,5$ за допомогою основних, а потім змішених диференціальних перетворень, заздалегідь розбивши відрізок $[0; 1,5]$ на два відрізки $[0; 0,75]$ і $[0,75; 1,5]$.

Застосуємо основні диференціальні перетворення (2) до функції $x(t)$. Для цього перетворимо вираз (27) до вигляду $x(t)(1+t) = 1$. В результаті в області диференціальних перетворень отримаємо вираз

$$X(k) + HX(k-1) = \psi(k). \quad (28)$$

Надаючи аргументу k цілочисельні значення $k = 0, 1, 2, \dots$, знайдемо за формулою (28) дискрети диференціального спектру $X(k)$ при $t = 0$: $X(0) = x(0) = 1$, $X(1) = -H$, $X(2) = H^2$, $X(3) = -H^3$ і т. д. Одержуємо формулу: $X(k) = (-H)^k$.

Значення функції $x(t)$ при $t = 1,5$ будемо шукати в два кроки. Спочатку знайдемо значення $x(t)$ в точці $t = t_v = 0,75$ – середині відрізка $[0; 1,5]$, виходячи з властивості диференціальних перетворень, де значення функції в кінцевій точці рівно сумі дискрет диференціального спектру функції в початковій точці відрізка, на якому розглядається функція. Тоді, враховуючи тільки нульову і першу дискрети і вважаючи $H = 0,75$, отримаємо: $x_v = x(t_v) = x(0,75) = x(0) - H = 1 - 0,75 = 0,25$. Аналогічно, в точці $t = 1,5$ при $H = 0,75$ і $X(0) = x_v = 0,25$ значення функції $x(t)$ рівне

$$x(1,5) = x_v - H = 0,25 - 0,75 = -0,5. \quad (29)$$

До функції (27) застосуємо змішені диференціальні перетворення (3), вибравши зміщену точку $t_v = 0,75$ і перетворивши вираз (27) до вигляду

$$x(t_v - \tau) + x(t_v - \tau)(t_v - \tau)$$

на відрізку $[0; 0,75]$ і

$$x(t_v + \tau) + x(t_v + \tau)(t_v + \tau)$$

на відрізку $[0,75; 1,5]$. Тоді в області змішених диференціальних перетворень функція (27) буде мати вигляд:

$$\bar{X}_v(k) + t_v \bar{X}_v(k) - H \bar{X}_v(k-1) = \psi(k), \quad (30)$$

$$X_v(k) + t_v X_v(k) + H X_v(k-1) = \psi(k),$$

$$\bar{X}_v(0) = X_v(0) = x(t_v) = x_v.$$

$$\text{З (30) маємо: } \bar{X}_v(1) = \frac{H x_v}{1+t_v}, \quad \bar{X}_v(2) = \frac{H^2 x_v}{(1+t_v)^2}$$

і т. д., звідки $\bar{X}_v(k) = H^k \frac{x_v}{(1+t_v)^k}$. Аналогічно, $X_v(1) = -\frac{H x_v}{1+t_v}$, $X_v(2) = \frac{H^2 x_v}{(1+t_v)^2}$ і т. д.,

тобто $X_v(k) = (-H)^k \frac{x_v}{(1+t_v)^k}$. Використовуючи формули зворотних змішених диференціальних перетворень, виразимо значення функції $x(t)$ через нульову і першу дискрети її диференціальних спектрів на кінцях відрізка $[0; 1,5]$:

$$x(0) = x_v + \frac{H x_v}{1+t_v}, \quad x(1,5) = x_v - \frac{H x_v}{1+t_v}, \quad (31)$$

звідки з першого рівняння при $t_v = H = 0,75$ знаходимо

$$x_v = \frac{1}{1+H/(1+t_v)} = \frac{1}{1+0,75/1,75} = 0,7. \quad \text{Під-}$$

ставивши знайдене значення x_v в друге рівняння (31), отримаємо

$$x(1,5) = 0,7 - \frac{0,75 \cdot 0,7}{1+0,75} = 0,4. \quad (32)$$

За виразом (27) можна знайти точне значення функції $x(t)$ в точці $t = 1,5$:

$$x(1,5) = \frac{1}{1+1,5} = 0,4, \quad \text{що в точності відпо-}$$

відає значенню $x(1,5) = 0,4$, знайденому змішеними диференціальними перетвореннями, тоді як значення $x(1,5)$ (29), знайдене основними диференціальними перетвореннями за два кроки, тобто $x(1,5) = -0,5$, має грубу похибку (рис. 1). Даний приклад яскраво ілюструє відмінність основних диференціальних перетворень, де похибка нагромаджується на кожному інтервалі розбиття, від змішених диференціальних перетворень, де похибка може компенсуватися аж до точного розв'язку, якщо знаки складових похибки протилежні, а абсолютні величини рівні.

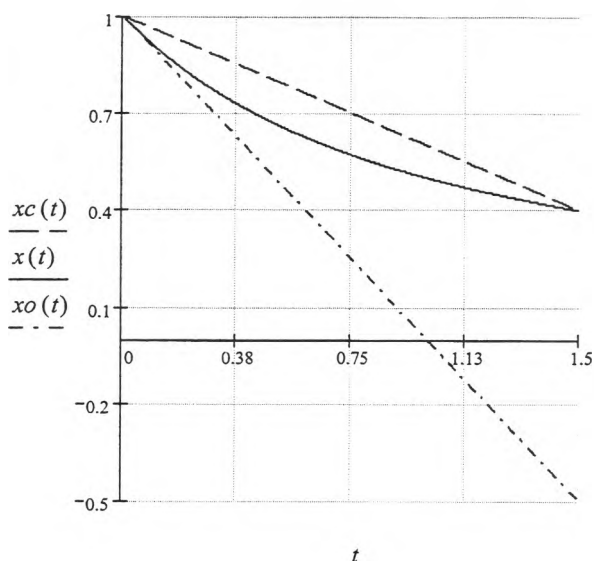


Рис. 1. Значення функції $x(t) = \frac{1}{1+t}$ в точці

$t = 1,5$, визначене за допомогою: $x_c(t)$ – зміщених диференціальних перетворень; $x_o(t)$ – основних диференціальних перетворень

Висновки та перспективи подальших досліджень у даному напрямку

У роботі було проведено порівняння математичного апарату зміщених диференціальних перетворень з математичним апаратом основних диференціальних перетворень, що використовуються для моделювання динамічних процесів, які описуються аналітичними функціями. Було доведено, що верхня границя оцінки похибки зміщених диференціальних перетворень у порівнянні з основними диференціальними перетвореннями знижується в 2^q разів, де q – кількість дискрет диференціального спектру, що враховуються, при умові розташування зміщеної точ-

ки в центрі інтервалу. Також зміщені диференціальні перетворення дають принципову можливість отримати точне значення довільної аналітичної функції $x(t)$ на кінці інтервалу при обмеженій кількості дискрет диференціального спектру.

Подальші дослідження у даному напрямку можуть бути пов'язані з використанням зміщених диференціальних перетворень на великих інтервалах часу, де розглядається динамічний процес. При цьому часовий інтервал розбивається на меншу кількість підінтервалів, ніж для основних диференціальних перетворень.

Список літератури

1. Баранов В. Л. Дифференциально-тейлоровская модель нелинейных краевых задач // Электронное моделирование. – 2000. – 22, № 5. – С. 25-31.
2. Пухов Г. Е. Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – К.: Наук. думка, 1988. – 216 с.
3. Трухаев Р. И. Методы инфлюентного анализа высоких порядков. – Ленинград: Наука, 1987. – 257 с.
4. Векторная оптимизация динамических систем / А. Н. Воронин, Ю. К. Зитдинов, А. И. Козлов, В. С. Чабанюк / Под ред. А. Н. Воронина. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.
5. Воронин А. Н. Нелинейная схема компромиссов в векторной оптимизации эргатических систем // Кибернетика и вычислительная техника. – 1986. – Вып. 72. – С. 9 – 13.