УДК 519.176

Волков А. А. д-р техн. наук

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИЛЬНО СВЯЗНЫХ ГРАФОВ СЕТЕЙ

Институт информатики Национального авиационного университета

Сильно связный граф сети представляется в виде конечномерного векторного пространства, порожденного его ребрами с определенными на нем базисами взаимно ортогональных подпространств независимых обобщенных узлов и независимых циклов. Используется аппарат линейной алгебры для обоснования методов получения матричных операторов линейных преобразований независимых обобщенных узлов и независимых циклов и определения их взаимозависимости.

Постановка задачи

Любая сеть C однозначно отображается изоморфным ей сильно связным графом G. Граф G назовем изоморфным сети C, если между вершинами графа G и узлами сети C можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что пара вершин графа G в том и только в том случае соединяются ν ребрами, когда соединены ν ветвями соответствующие пары узлов сети.

Матрица инциденций может служить основой для изучения основных структурных характеристик сильно связных графов. Граф G рассматривается как конечномерное векторное пространство, порожденное множеством $V=\{v_i\}(i=\overline{1,m})$ его дуг, в котором выделяются подпространства $Y_j, j \in N$ узловых множеств инциденций дуг, независимых обобщенных узловых множеств дуг и независимых циклов. Исследуются операторы линейных преобразований пространства множества дуг графа в соответствующие подпространства, а также их взаимозависимости.

Анализ публикаций

Обобщаются фундаментальные исследования в области теории графов, в частности, [1]; анализируются способы задания и представления сетей графообразующими множествами, а также использование сильно связных графов для исследования и проектирования сетевых систем [2], [3]; обосновывается возможность использования теории матриц [4] для алгебраического анализа графов сетей.

Цель работы

Целями работы являются: алгебраический анализ сильно связных графов сети как m-мерного векторного пространства V^*, рожденного его дугами, с выделенным в нем n-мерным подпространством Y^* узловых множеств подпространства R^* независимых узловых множеств, а также s-мерного θ^* независимых циклов; исследование линейных операторов, отображающих линейные преобразования пространства V^* в подпространство Y^*, R^* и θ^*, а также матричных представлений этих операторов и их взаимозависимостей.

Линейные операторы пространства множеств инцидентности дуг графа

Графу G можно сопоставить некоторое линейное преобразование, где каждому множеству $Y_j, j \in N$ поставлен в соответствие вектор $\bar{y}_j$, а семейству Y множеств инцидентности дуг – вектор $\bar{y}$.

Это линейное преобразование определяется системой [4]

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_1 \;= a_{11}v_1 \;\; + \; a_{12}v \;\;\; + \ldots + a_{1m}v_m, \\ \bar{y}_2 \;\; = a_{21}v_1 \;\; + a_{22}v_2 \;\;\; + \ldots + a_{2m}v_m, \\ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ \bar{y}_{n+1} = a_{n+1,1}v_1 + a_{n+2,2}v_2 + \ldots + a_{n+1,m}v_m \end{array}\right\}. \quad (1)$$

Коэффициенты a_{ji} преобразования (1) принадлежат подмножеству Φ, состоящему из чисел 0, +1, -1 некоторого числового поля $F \supset \Phi$.

Рассмотрим два векторных пространства над подмножеством Ф числового поля F: m-мерное V^* и $(n+1)$-мерное Y^*. Выберем в пространстве V^* некоторый базис $n \times m$ и в пространстве Y^* некоторый базис $\overline{g_1},...\overline{g_{n+1}}$, в качестве которых можно взять столбцы единичной матрицы m-го и $(n+1)$-го порядков соответственно.

Преобразование (1) относит каждому вектору $\bar{v} = \sum_{i=1}^{m} \overline{v_i} \cdot \overline{e_i}$ из V^*некоторый вектор $\bar{y} = \sum_{j=1}^{n+1} \overline{y_j} \cdot \overline{g_j}$ из Y^*, т. е. преобразование (1) определяет некоторый линейный оператор Ψ_x, относящий вектору $\bar{v}$ из V^* вектор $\bar{y}$ из Y^*.

$$\bar{y} = \Psi_x \bar{v}. \qquad (2)$$

Линейный оператор Ψ_x, отображающий пространство V^*дуг графа в подпространство Y^* семейства множеств инцидентностей дуг (или в пространство вершин X^*) графа назовем оператором инциденций графа.

Этому оператору при некотором базисе соответствует прямоугольная матрица A_x^0 с размерами $(n+1) \times m$:

$A_x^0 = \|a_{ji}\|,\; i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n+1}$,

представляющая собой матрицу инциденций графа. Эта матрица является вполне унимодулярной. Каждый столбец ее имеет два ненулевых элемента: +1 и -1. Справедливо:

<u>Утверждение 1</u>. Если граф G, содержащий $(n+1)$ вершину, связен, то ранг матрицы A_x^0 равен n.

Следствие 1. Ранг каждой матрицы $A_x^{(j)}, (j = 1,2,...,n+1)$, полученной из матрицы инциденций A_x^0 вычеркиванием j-ой строки, равен n. Положим $j = n+1$, соответствующую матрицу $A_x^{(n+1)}$ обозначим через A_x.

Следствие 2. Число линейно независимых столбцов матрицы A_x сильно связного графа G, имеющего $(n+1)$ вершин, равняется n.

<u>Утверждение 2.</u> Ранг r линейного оператора ψ_x, отображающего пространство V^* дуг связного графа G, имеющего $(n+1)$ вершин, в подпространство Y^* его узлов, равен n.

Для выделения базиса оператора ψ_x и удобства оперирования с матрицей A_x, целесообразно вершины (или элементарные узлы) и дуги графа пронумеровать таким образом, чтобы линейно независимые столбцы матрицы инциденций A_x^0 (или матрицы A_x), соответствующие дугам дерева H графа G, составляли бы подматрицу A_{x1} матрицы A_x.

Согласно теореме, доказанной в [1], подграф H представляет собой дерево тогда и только тогда, когда определитель квадратной матрицы $\|a_{ji}\|_1^n$, полученной из матрицы инциденций A_x^0 порядка $(n+1) \times n$ вычеркиванием одной строки, равен 1 или –1. Во всех остальных случаях этот определитель равен нулю.

Используем это утверждение для обоснования более общего утверждения об упорядочивающей нумерации сильно связного графа, позволяющей выделить базис независимых столбцов матрицы A_x, порядка $n \times m$, соответствующей ветвям дерева H графа.

<u>Определение.</u> Матрицу A_x назовем упорядоченной матрицей, если она содержит неособенную подматрицу A_{x1} треугольного вида, ранг r которой соответствует рангу матрицы A_x.

Нумерацию вершин и дуг графа G, приводящую к образованию упорядоченной матрицы A_x из матрицы инциденций A_x^0 вычеркиванием $(n+1)$-й строки, назовем упорядочивающей нумерацией графа.

Утверждение 3. Вершины x_j, $j \in N$, $|N| = n+1$ и дуги v_i, $i \in M$, $|M| = m$ сильно связного графа G всегда можно пронумеровать таким образом, чтобы матрица A_x порядка $n \times m$ содержала бы квадратную подматрицу A_{x1} порядка n треугольного вида, столбцы которой соответствовали бы ветвям одного из деревьев графа.

В результате такой нумерации вершин и дуг графа G матрица A_x может быть представлена в виде двух подматриц $A_x = (A_{x1}, A_{x2})$, первая из которых $A_{x1} = \|a_{ji}\|$, $(j = \overline{1,n};\ i = \overline{1,n})$ представляет собой квадратную неособенную подматрицу n-ого порядка треугольного вида.

Определитель любой треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали. Поскольку на главной диагонали подматрицы A_{x1} находятся единичные элементы, то $Det(A_{x1}) = \pm 1$. Следовательно, столбцы этой подматрицы соответствуют ветвям одного из деревьев графа G.

Подматрица $A_{x2} = \|a_{ji}\|$ $(j = \overline{1,n}; i = \overline{n+1,m})$ образуется столбцами матрицы A_x, являющимися линейными комбинациями столбцов подматрицы A_{x1}. Они соответствуют дугам антидерева (кодерева) графа G.

Линейные операторы подпространства независимых обобщенных узлов графа

Обобщенным узловым подмножеством дуг (или обобщенным узлом) называется замкнутое очертание, которое может содержать несколько элементарных узлов (узловых подмножеств дуг) графа. Одно узловое подмножество или один узел графа можно рассматривать, как частный случай обобщенного узлового подмножества дуг.

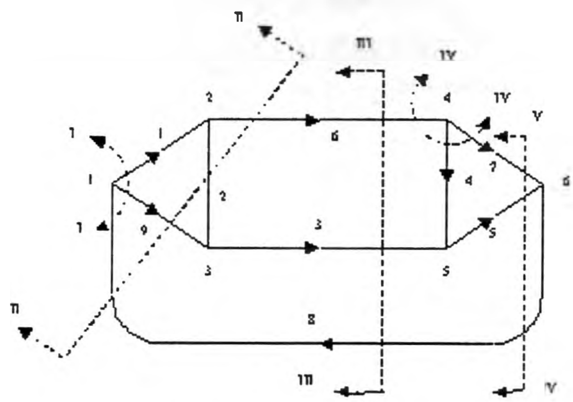
Каждому узловому подмножеству Y_j графа G соответствует вектор $\bar{y}_j$ пространства Y^*. Каждому обобщенному узловому подмножеству Y_{0k} можно также сопоставить вектор $\bar{y}_{0k}$ пространства R^*, если $Y_{0k} = \bigcup Y_j$

Следует подчеркнуть, что обобщенные узлы графа не содержат дуг общих для любой пары узлов, входящих в указанное замкнутое очертание. Существует множество различных обобщенных узлов графа, однако интерес представляют лишь независимые обобщенные узлы.

Независимым обобщенным узлом графа при произвольно выбранном базисе (дереве) назовем такое обобщенное подмножество дуг, которое содержит только одну ветвь (дугу) дерева графа. Число независимых обобщенных узлов Λ равно числу дуг, входящих в дерево графа, т.е. $\Lambda = n$, если $(n+1)$ – число элементарных узлов или вершин сильно связного графа.

Утверждение 4. Матрицу A, соответствующую оператору ψ линейного преобразования пространства V^* дуг графа в подпространство R^* его независимых обобщенных узлов, всегда можно получить путем элементарных преобразований матрицы инциденций A_x^0, или эквивалентных ей матриц $A_x^{(j)}$, соответствующих оператору ψ_x.

На рис. 1 представлен граф с выделенным деревом (базисом независимых обобщенных узлов). Независимые обобщенные узлы (отсечения) обозначены пунктирными линиями. Здесь же пред-



$$A_x = \left\|\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \quad (A_{x1}, A_{x2})$$

$$A = \left\|\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right\| \quad (A_1, A_2)$$

Рис. 1

ставлены упорядоченная матрица A_x и матрица A независимых обобщенных узлов для этого графа. Матрицу A можно представить из двух подматриц $A = (A_1, A_2)$, где $A_1 = E_1^n$ – единичная подматрица, столбцы которой соответствуют ветвям дерева графа, A_2 – прямоугольная подматрица, столбцы которой соответствуют дугам антидерева (кодерева) графа.

Произвольный вектор $\overline{V}$ из пространства V^* связан с вектором $\overline{y}_0$ пространства R^* соотношением

$$\overline{y}_0 = \psi V \qquad (3)$$

Матричное выражение этого соотношения имеет вид: $y_0 = Av$.

Эти соотношения образуют каноническую форму записи системы независимых обобщенных узлов графа.

Каноническая система линейного преобразования пространства V^* дуг графа в подпространство R^*		
$\overline{v}_1 \quad +$	$a_{1,n+1}\overline{v}_{n+1} + \ldots + a_{1m}\overline{v}_m$	$= y_{01}$
$\overline{v}_2 \quad +$	$a_{2,n+1}\overline{v}_{n+1} + \ldots + a_{2m}\overline{v}_m$	$= y_{02}$
. . . .	. . . .	. .
$\overline{v}_n \quad +$	$a_{n,n+1}\overline{v}_{n+1} + \ldots + a_{nm}\overline{v}_m$	$= y_{0n}$
Базисные дуги (ветви дерева графа) $v_1,\ldots,v_n$	Небазисные дуги (ветви антидерева графа) $v_{n+1},\ldots,v_m$	Независимые обобщенные узлы $y_{01},\ldots,y_{0n}$

(4)

Линейные операторы подпространства независимых циклов графа

Топология сильно связного графа определяется также в пространстве (V^*, θ^*), образованном множеством V дуг и множеством θ циклов графа.

Каждому циклу θ_k при заданной его ориентации взаимно однозначно соответствует вектор $\bar{\theta}_k$ из пространства V^*, а всей совокупности векторов соответствует линейное преобразование:

$$\left.\begin{array}{lllllllll} \bar{\theta}_1 & = & b_{11}v_1 & + & b_{12}v_2 & + & \ldots & + & b_{1m}v_m \\ \bar{\theta}_2 & = & b_{21}v_1 & + & b_{22}v_2 & + & \ldots & + & b_{2m}v_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\theta}_s & = & b_{s1}v_1 & + & b_{s2}v_2 & + & \ldots & + & b_{sm}v_m \end{array}\right\} \quad (5)$$

Коэффициенты b_{ki} преобразования (5) принадлежат числовому полю Φ, состоящему из чисел 0, +1, -1 некоторого числового поля $F \supset \Phi$ в следующей зависимости:

$$b_{ki} = \begin{cases} 0, & \text{если } v_i \notin \bar{\theta}_k \\ 1, & \text{если } v_i \in \bar{\theta}_k \text{ и ориентации } v_i \text{ и } \bar{\theta}_k \text{ совпадают} \\ -1, & \text{если } v_i \in \bar{\theta}_k \text{ и ориентации } v_i \text{ и } \bar{\theta}_k \text{ не совпадают} \end{cases}$$

Подпространство θ^* векторного пространства V^*, являющееся линейной оболочкой системы векторов $\bar{\theta}_k$, $k = \overline{1,s}$, назовем подпространством циклов графа G. В сильно связном графе существуют как независимые, так и зависимые циклы. Нас будет интересовать система независимых циклов, являющаяся базисом подпространства θ^* независимых циклов графа.

В графе G существует, вообще говоря, $\Lambda(H)$ вариантов выбора базисов независимых циклов графа, где $\Lambda(H)$ – число деревьев графа. Число независимых циклов графа при выбранном базисе определяется цикломатическим числом, которое равно количеству дуг антидерева сильно связного графа, т. е.

$$s = m - n .$$

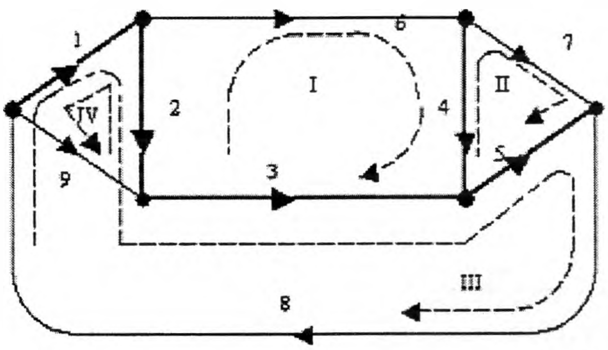
Матрицу B назовем упорядоченной матрицей инциденций независимых циклов графа.

Матрица B при базисе $\bar{\theta}_1,\ldots,\bar{\theta}_s$, состоящем из независимых циклов, соответствует линейному оператору φ, отображающему пространство V^* дуг графа в подпространство θ^*

$$\bar{\theta} = \varphi \bar{v} . \qquad (6)$$

Утверждение 5. Циклы θ_k и дуги v_i сильно связного графа G всегда можно пронумеровать таким образом, чтобы матрица B^* инциденций дуг v_i и циклов θ_k графа представляла собой упорядоченную матрицу $B = (B_1, B_2)$ независимых циклов графа, т.е. содержала бы единичную подматрицу $B_2 = E_1^{(s)}$ порядка $s = m - n$.

На рис. 2 представлен граф, нумерация и ориентация дуг которого такие же, как и у графа, приведенного на рис. 1.



$$B = \left\| \begin{array}{ccccc|cccc} \multicolumn{5}{c|}{\overbrace{\hspace{5em}}^{B_1}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hspace{4em}}^{B_2}} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Рис. 2

Нумерация циклов графа произведена в соответствии с утверждением 5. Матрица B инциденций дуг графа и независимых циклов этого графа приведена на этом же рисунке.

Каноническая система линейного преобразования пространства V^* дуг графа в подпространство θ^* независимых циклов имеет вид:

Каноническая система линейного преобразования пространства V^* дуг графа в подпространство θ^* независимых циклов		
$b_{11}\bar{\nu}_1 + b_{12}\bar{\nu}_2 + \ldots + b_{1n}\bar{\nu}_n +$ $b_{21}\bar{\nu}_1 + b_{22}\bar{\nu}_2 + \ldots + b_{2n}\bar{\nu}_n +$ $\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$ $b_{s1}\bar{\nu}_1 + b_{s2}\bar{\nu}_2 + \ldots + b_{sn}\bar{\nu}_n +$	$\bar{\nu}_{n+1}$ $\ldots \quad \bar{\nu}_{n+2}$ $\cdot \quad \cdot \quad \cdot$ $\ldots \quad \bar{\nu}_m$	$= \bar{\theta}_1$ $= \bar{\theta}_2$ $\cdot \quad \cdot$ $= \bar{\theta}_s$
Небазисные дуги (ветви дерева графа) $\nu_1,\ldots,\nu_n$	Базисные дуги (ветви антидерева графа) $\nu_{n+1},\ldots,\nu_m$	Вектора – независимые циклы $\bar{\theta}_1,\ldots,\bar{\theta}_s$

(7)

Связь между линейными операторами независимых обобщенных узлов и независимых циклов сильно связного графа

При топологическом анализе графов сетевых систем возникает необходимость определения операторов независимых циклов графа по операторам независимых обобщенных узлов или наоборот. Конкретно это выражается в необходимости определения матрицы B независимых циклов графа по матрице A независимых обобщенных узлов. Существует аналитический метод определения матрицы циклов графа по матрице его инциденций. Этот метод опирается на одну из основных теорем топологии сетей, впервые сформулированной еще Анри Пуанкаре в 1899 г., а затем в различных ее интерпретациях и другими авторами. Доказательство этой теоремы приводится во многих источниках и, в частности, в [1].

Пользуясь нашими обозначениями, суть этой теоремы можно выразить зависимостью $A_x^0\bar{\theta} = 0$, т. е. произведение матрицы инциденций A_x^0 на вектор-цикл $\bar{\theta}$ равняется нулю.

Область применения данной теоремы, следовательно, ограничена только матрицей инциденций дуг и элементарных узлов графа и не распространяется в данной ее трактовке на матрицу независимых обобщенных узлов.

Рассмотрим этот вопрос с более общих позиций. Как было выяснено ранее, множество V дуг графа порождает m-мерное пространство V^*, в котором определены два подпространства: n-мерное подпространство Y^* узловых подмножеств дуг (узлов) и s-мерное подпространство θ^* циклов графа. Справедливо

<u>Утверждение 6.</u> Подпространство Y^* узлов сильно связного графа G и подпространство θ^* его циклов являются взаимно ортогональными.

Подпространство θ^* является ортогональным дополнением к Y^* (или наоборот). Суммарная размерность этих подпространств равна размерности всего пространства V^*.

Если n – размерность R^*, а s – размерность θ^*, то размерность всего пространства V^* равна $m = n + s$. Заметим, что ортонормированными базисами подпространств R^* и θ^* являются дуги дерева и антидерева (кодерева) графа соответственно.

Следствие. Если $A = \|a_{ji}\|$ $(j = \overline{1,n}; i = \overline{1,m})$ – упорядоченная матрица независимых обобщенных узлов, а $B = \|b_{ki}\|_s$ $(k = \overline{1,s}; i = \overline{1,m})$ – упорядоченная матрица независимых циклов, то справедливо соотношение

$$AB' = BA' = 0, \qquad (8)$$

где B' и A' – транспонированные матрицы B и A соответственно.

Имея в виду, что $A = \|A_1, A_2\|$, $B = \|B_1, B_2\|$, получим:

$$\|A_1, A_2\| \cdot \begin{Vmatrix} B_1' \\ B_2' \end{Vmatrix} = 0, \quad \|B_1, B_2\| \cdot \begin{Vmatrix} A_1' \\ A_2' \end{Vmatrix} = 0,$$

откуда

$$B_1 = -B_2 A_2' \left(A_1'\right)^{-1}, \qquad A_2 = -A_1 B_1' \left(B_2'\right)^{-1}.$$

Поскольку $A_1 = E_1^n$, $B_2 = E_1^s$ и $\left(E'\right)^{-1} = E$, получим

$$B_1 = -E_1^s A_2' E^n, \qquad A_2 = -E_1^n B_1' E^s.$$

Зная, что $A_2' = \left\|a_{ij}\right\|$ $\left(i = \overline{n+1, m}; j = \overline{1, n}\right)$; $B_1' = \left\|b_{ik}\right\|$ $\left(i = \overline{1, n}; k = \overline{1, s}\right)$ имеем

$$B_1 = -A_2', \qquad A_2 = -B_1'. \qquad (9)$$

Эти выражения позволяют получить подматрицу B_1 независимых циклов графа по подматрице A_2 независимых обобщенных его узлов и наоборот.

Выражения (9) показывают, что достаточно знать только один из операторов Ψ или φ, представленных в виде соответствующих им матриц A или B, чтобы определить как вектор $\bar{y}_0$ независимых узловых подмножеств дуг графа, так и вектор $\bar{\theta}$ независимых циклов графа.

Матричные уравнения $y = A \cdot v$, $\theta = B \cdot v$ можно записать в виде

$$y = A_1 v_I + A_2 v_{II}, \qquad \theta = B_1 v_I + B_2 v_{II}, \quad (10)$$

где v_I – матрица-столбец, соответствующая дугам дерева графа; v_{II} – матрица-столбец, соответствующая дугам антидерева графа. С учетом (9), и имея в виду, что $A_1 = E_1^n$; $B_2 = E_1^s$, уравнения (10) можно записать:

$$y = v_I + A_2 v_{II}, \qquad \theta = A_2' v_I + v_{II} \qquad (11)$$

или в виде

$$y = v_I - B_1' v_{II}, \qquad \theta = B_1 v_I + v_{II}. \qquad (12)$$

Эти системы уравнений позволяют выразить столбцевые матрицы y и θ только через подматрицу A_2 или только через подматрицу B_1.

Выводы

1. Сильно связный граф сети представляется в виде конечномерного векторного пространства V^*, порожденного его дугами с определенными на нем подпространствами Y^* узлов (вершин), R^* независимых обобщенных узлов и θ^* независимых циклов, базисами которых являются деревья и кодеревья графа соответственно.

2. Рассматриваются линейные операторы, отображающие пространство V^* в подпространство Y^*, в подпространство R^* и в подпространство θ^*. Исследуются взаимосвязи между этими операторами. Матричные представление этих операторов позволяют использовать аппарат линейной алгебры для обоснования алгоритмов получения матрицы A независимых обобщенных узлов и матрицы B независимых циклов графа сети.

3. Векторное пространство R^* и θ^* являются взаимно ортогональными, что позволяет установить взаимосвязь между матрицами A и B.

4. Результаты анализа графа алгебраическими методами позволяют автоматизировать процесс определения матриц A и B, используемых при моделировании, исследовании и расчете сетевых систем.

Список литературы

1. *Берж К.* Теория графов и ее применение. –М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 320 с.

2. *Волков А. А.* Моделирование систем графами// Вісн. КМУЦА, 1998. – №1. – С. 268-279.

3. *Волков А. А.* Построение и структура моделирующих графов сложных систем // Системні дослідження та інформаційні технології. – К.: 2000. – №2. – С. 118-132.

4. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.