УДК 512.972:519.6

[1]**Минаев Ю. Н.** д-р техн. наук
[2]**Филимонова О. Ю.** канд. техн. наук

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ФОРМАЛИЗАЦИИ МЯГКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ТЕНЗОРНЫХ МОДЕЛЕЙ

[1]Институт информатики Национального авиационного университета,
[2]Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Рассматриваются вопросы моделирования «мягких» измерений в тензорном базисе. Мягкое измерение представляет собой множество упорядоченных пар, представленных в виде «значение/функция принадлежности». Это множество по законам тензорного анализа может быть превращено без потери общности в новый объект – тензор, который сохраняет, с одной стороны, все свойства нечеткого множества и наделен новыми дополнительными свойствами, в частности, инвариантами. Аппарат тензорной алгебры, примененный к нечетким переменным, которые моделируются тензором, позволяет существенным образом расширить возможности по обработке нечеткой информации. Приводятся примеры, которые иллюстрируют эффективность предложенной модели.

Введение

В последнее время резко усилился интерес к решению прикладных задач управления в сложных системах, в частности, и главным образом, принятию решений в условиях неполной (недостоверной, противоречивой и др.) информации, нередко достаточно зашумленной настолько, что единственным определением условия принятия решения является термин «нечеткие условия», понимаемые достаточно широко и многообразно. Естественно, в таких ситуациях речь не может идти о точности вычислений, считается нормальным при принятии решений использовать не оптимальное решение, а практически допустимое, терпимость к низкой точности вычислений (преобразований) считается альфа и омегой методологии вычислений, называемых «мягкими».

Измерения и вычисления, как известно, связаны неразрывной диалектической связью. Считается, что появление концепции «мягких вичислений» породили «мягкие» измерения (МИ) как результат обратной волны в схеме «*теория нечетких множеств → нечеткие модели → нечеткие системы → нечеткие инструментальные и программные средства → нечеткие аппаратные средства*» [1, 2].

Постановка задачи

Задача состоит в том, чтобы определить «мягкие измерения» как объект измерительного процесса с учетом, с одной стороны, теории измерений с ее мощнейшим математическим аппаратом и возможностями компьютерной техники, в частности, методов и моделей исскуственного интеллекта, с другой стороны. При этом следует признать, что «интеллектуализация» измерения выполнена довольно успешно [3, 4], чего нельзя сказать о теоретической обоснованности «мягкого» измерительного процесса. Поэтому одна из целей работы состоит в том, чтобы совершить «плавный» переход от строгих принципов теории измерений к толерантно-нечетким методам, отвечающим насущным, но лишь сиюминутным требованиям практики. Теоретики измерений (Пфанцагль, Стивенс, Суппес и др. [5-8]) не ставили задачу в виде парадигмы сегодняшнего дня типа «теории должно быть ровно столько, сколько позволяют ресурсы и возможности», но наличие компьютерной техники, мощнейшего программного и математического обеспечения позволяют согласиться с этой парадигмой. Как ни странно, теория измерений предполагала возможность такой постановки задачи именно в силу того, что, как говорят классики, нет ничего более практичного, чем хорошая теория.

Современный уровень исследований

Существует точка зрения (особенно распространенная при измерениях в программном обеспечении), что МИ – это процедуры измерения характеристик, параметров «м'яких» данных. Авторам наиболее близки идеи МИ применительно к программным метрикам (*SoftwareMetrics*), поэтому главная часть ссылок касается именно этого направления МИ. Это наиболее оправдано, т. к. имеющиеся в настоящее время стандарты на МИ посвящены программному обеспечению, хотя возможность их использования для других задач не вызывает сомнения. На приведенных рисунках (рис.1-рис.5)[1)] показаны процедуры представления «твердого» данного «мягким» и формирование способа его формальной интерпретации. На рис. 1 показано представление изображения с использованием априорной структурированной модели (слева) и результат направленного моделирования физического процесса (сейсмика/поток) на ранее выбранной априорной структурированной модели.

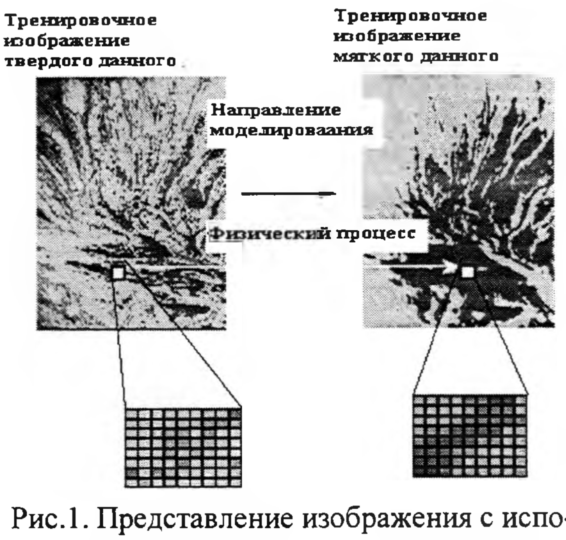

Рис.1. Представление изображения с использованием априорной структурированной модели (слева) и результат направленного моделирования физического процесса

На рис. 2 показан процесс образования многоточечного данного как композиция α-срезов и представлен шаблон, на основании которого эти срезы выполнены.

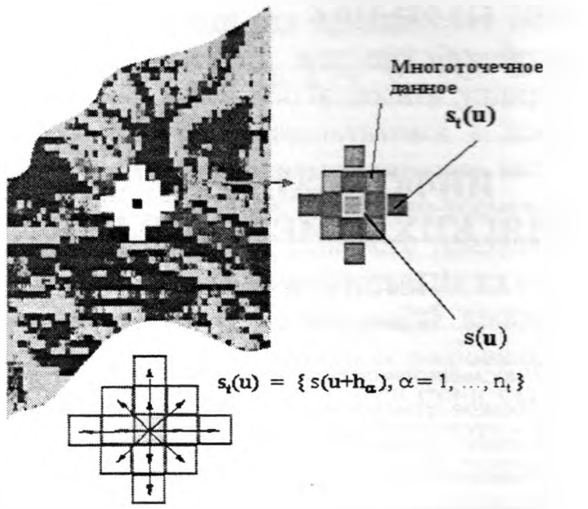

Рис. 2. Сканирование тренировочного изображения и определение геометрического шаблона

На рис. 3. показано непосредственное образование «мягкого» обединенного данного с целью послледующего его представления при помощи нейронной сети. В каждом расположении u левого изображения (твердая инфоромация) передняя грань категории $s(u)$, определенная через шаблон, сохраняется вместе с соседними категориями $s_t(u)$. В таком же расположении u правого изображения (мягкие данные) объединенная мягкая информация $y(u)$ восстанавливается.

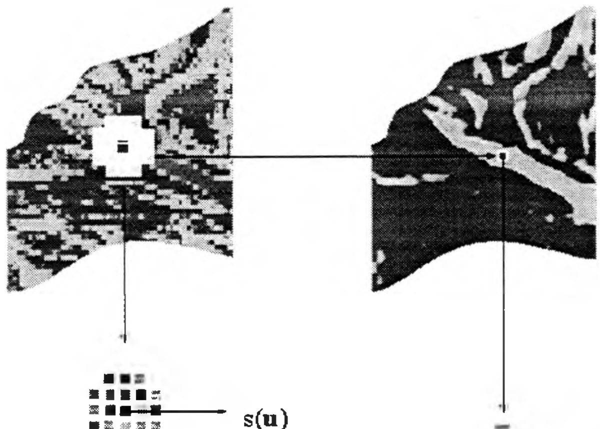

Рис. 3. Процедура, использованная для объединения данных для калибровки мягких данных при помощи нейронных сетей

Последующие процедуры направлены на формирование стандартной формальной модели мягких измерений при помощи нечетких множеств.

[1)] Использованы материалы сайта Стенфордского университета URL://http.stanford.neuralfig.ppt

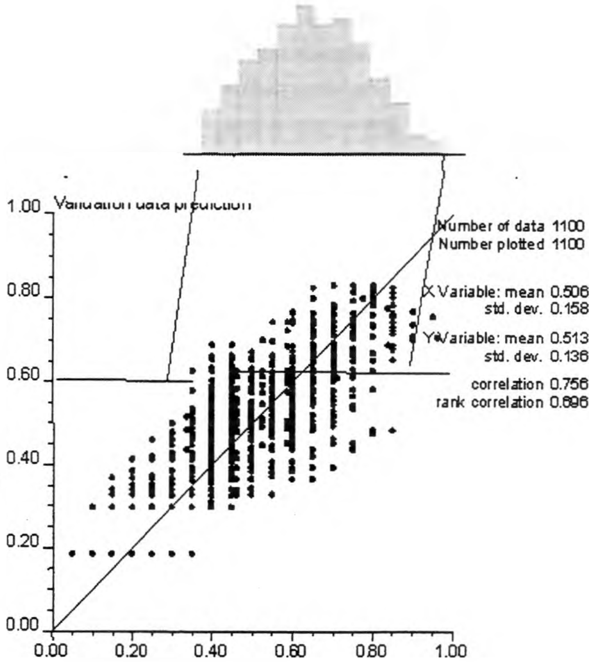

Рис.4. Формирование представления нечетких данных в виде «значение-функция принадлежности»

При этом в зависимости от разрешающей способности (точности измерений) мягкие данные могут быть представлены в различных формах, в частности, в форме, зависящей от шага сетки, которая выбрана для сканирования (рис. 5).

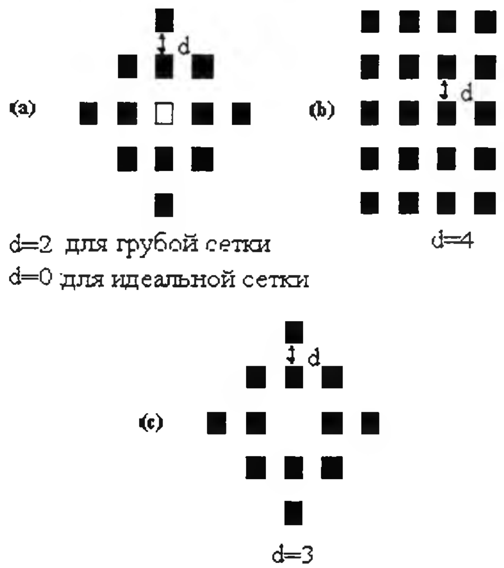

Рис. 5. Геометрия шаблона для (а) сканирования твердых данных тренировочного изображения (а), создание образа (сейсмики) через определение линейного среднего (b), сканирование твердых данных тренировочного изображения для калибровки мягких данных (с)

На рис. 6 приведены способы представления мягких данных при помощи нейронных сетей. Из приведенного рис. видно многообразие способов нейросетевого представления мягких данных.

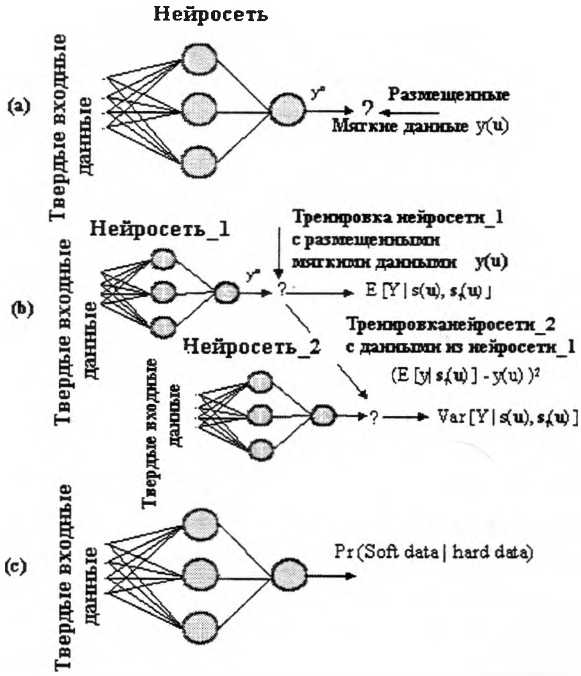

Рис. 6. Представление мягких данных нейронной сетью: вход с твердыми данными = размещенные (сейсмический приемник) фронтальные данные *s*(*u*) + соседние фронтальные данные *st*(*u*); (а) *метод 1*: выход нейросети является условным ожиданием мягкого данного; (b) *метод 2*: две нейронных сети, нейросеть_1 используется для определения условного ожидания, нейросеть_2 – для условной вариации; (с) *метод 3*: нейросеть определяет полное условное распределение

В соответствии с [2)] сложность системы, в которой выполняются измерения, требует перехода от измерения отдельных величин к измерению объектов, состоящих из целого комплекса отдельных величин. Поэтому термины «мера», «измерения» практически не используются, но предлагается использовать выражения: «измерительный метод», «измерительный результат» и «измерительный процесс». При этом измерительный процесс

---

2) 1) J.-P. Jacquet,A.Abran. Iron Software Metrics to Software Measurement Methods: A Process Model.

представляет собой высокоуровневую модель, состоящую из четырех шагов:

1. Конструирование перед началом измерения измерительного метода;
2. Измерительный метод содержит правила измерений, которые применяются как объекту, так и к его частям;
3. Получение результата от применения правил измерительного метода (и интерпретация результатов измерения);
4. Измерительный результат используется в качественной или количественной модели.

Рассмотрим более детально основные этапы измерительного процесса. Конструирование измерительного метода начинается с определения измерительных объектов, в частности, что необходимо и возможно измерить с точки зрения измерительного метода.

Вторым подэтапом здесь является конструирование или выбор метамодели. Дело в том, что многие сложные системы, в которых необходимо выполнить измерения, не являются реально ощутимыми, например, программное обеспечение (ПО), однако их реальность может быть подтверждена многочисленными и многообразными представлениями – множество отчетов, образы экранов и др. Это множество характеристик выделенное для того, чтобы представить объект (ПО, часть ПО и др.), и множество отношений между ними определяют метамодель, предлагаемую для описания объекта, для которого, в свою очередь, создается измерительный метод. Метамодель должна описать сущности всех элементов, которые используют для описания объекта, и правила, которые позволяют идентифицировать сущности.

Особую роль на этом шаге имеет подэтап измерительной концепции. Ясность и прозрачность измерительной концепции определяют возможность построения измерительного метода. Например, если необходимо определить два расстояния (в обобщенном смысле), то необходимо четко определить их равенство, или которое из них больше. Также необходимо выполнить эту процедуру без чисел, т. е. без непосредственного измерения, потому что концепция расстояния между двумя точками ясна и точна.

Определение концепции модели может быть сделано несколькими путями, в зависимости от природы концепции. Когда измеряют бесконечное множество, для объектов единственно об-щим является определение правил, которые характеризуют концепцию. Причем, для некоторых атрибутов эти правила могут быть простыми, для некоторых сложными. Естественно, сложная концепция может быть разделена на подконцепции.

Другая точка зрения, математическая, состоит в том, что необходимо определить *эмпирическую систему отношений*. Чтобы полностью сконструировать измерительный метод, числовая система отношений и гомоморфизм между двумя системами (числовой и эмпирической) должны быть определены.

С учетом изложенного рассмотрим возможность формализации процедур мягких измерений и вычислений. Примем, что основой такого рассмотрения должны быть базовые концепции теории измерений [3)2)]. Главная парадигма в таких исследованиях состоит в том, что управление изначально рассматривается как эмпирическая наука, характерными особенностями которой является специфика измерений, их высокая зашумленность, неопределенность на всех уровнях принятия решений, неполнота информации, трудности определения образцов (*patterns*), на основании которых можно было бы сформулировать систему «*if-then*» правил. Отдельно следует остановиться на том обстоятельстве, что при управлении принятие решений выполняется по данным, именно по данным, а не на основании данных. Управление по данным предпо-

---

[3)] L.Briand, Knaled El Emam, S.Morosco. On the Application of Measurement Theory in Software Engineering.- Int. Software Engineering Research Network technical report # ISERN- 95-04 лагает определение закономерностей, в соответствии с которыми изменяются данные (частный случай – *OLAP*-технологии).

Эмпирическая система с отношениями (ЭСО) A принимается в виде упорядоченного кортежа (A $R_1,..., R_n, O_1,...,O_m$), где A – непустое множество эмпирических объектов, которые должны быть измерены (например, при управлении объектами это могут быть графы сетевых графиков, диаграммы Ганта, в программном обеспечении – тексты программ, данные и др.); R_1 – K-арные эмпирические отношения на A , $i=1, n$ (например, эмпирическое отношение «равно или более сложно чем»); O_j – бинарные операции на эмпирических объектах, которые измеряются (например, конкатенация управляющих графов и др.), $j=1, m$.

Эмпирическая система с отношениями описывает часть действительности, над которой выполняется измерения (через множество объектов) и эмпирические знания атрибутов объектов, которые мы хотим измерить (через коллекцию эмпирических отношений R_i). В свою очередь формальная система с отношениями принимается в виде: $B=(B, S_1,..., S_n, *_j,...,*_m)$, где B – непустое множество формальных объектов, например, чисел или векторов; S_1 – κ-арное отношение на B, такое как «больше чем» или «равно или больше чем»; $*_j$ – закрытая бинарная операция B, такая, как сложение или умножение.

Формальная система с отношениями описывает (через множество B) домены измерений для атрибутов измеряемых объектов. К примеру, они могут быть целыми или реальными числами, векторами целых или действительных чисел и др. Формальная система с отношениями также описывает (через коллекцию отношений S_i) отношения интересов между мерами. Связь между эмпирической и формальной системами и отношениями определяется через *меры* и *шкалы*.

Мера μ, представляемая как μ: $A \to B$, сопоставляет каждому эмпирическому объекту $a \in A$ формальный объект (измеряемая величина) $\mu(a) \in B$. Конечно, это представление может быть произвольным.

Шкала. Пусть $A=(A,R_1,...,R_n,O_1,...,O_m)$ – эмпирическая система с отношениями, $B=(B, S_1,...,S_n,*_j,...,*_m)$ – формальная система. Тройка (A,B,μ) – шкала, если только для всех (i,j) и для всех $(a_1,..., a_k,b,c \in A)$ поддерживается следующее:
$R_i(a_1,..., a_k) \Leftrightarrow S_i(\mu(a_1),...,(\mu(a_k))$
и $\mu(b\ o_j\ c)=\mu(b)\ *_j\ \mu(c)$.

Если $B=R$ является множеством реальных чисел, тройка (A, B, μ) – *реальная шкала*. Каждый объект $a \in A$ отображается в величину B, т.е. измеряется в соответствии с мерой $\mu(a)$. Каждое эмпирическое отношение R_1 представляется формальным отношением S_1. Например, отношение «более сложен чем» между двумя объектами представляется отношением «>» между мерой сложности двух объектов. Формальные отношения должны сохранять значения эмпирических предложений. Например, предположим, что R_1 – эмпирическое отношение «более сложен чем», S_1 –формальное отношение «>» и μ является мерой сложности. Тогда, мы должны полагать, что объект P_1 более сложен, чем объект P_2, если имеем только $\mu(P_1) > \mu(P_2)$.

Измеренные величины немогут быть использованы в общем случае без определенных ограничений. Результат, полученный в одном случае, может не иметь смысла путем применения математической операции к числу, полученному в процессе другого измерения. Эта трансформация используется для классификации измерений в соответствии с *уровнем измерений* для того, чтобы понять какой тип математической операции может быть использован в данном измерении.

Допустимые преобразования. Пусть (A, B, μ) – реальная шкала, отображение $g: \mu(A) \to B$ является допустимым преобразованием если $(A, B, g\ o\ \mu)$ также шкала (где $g\ o\ \mu$ – композиция двух функций g и μ, т.е. $g(\mu(x))$).

Значимость измерений. Предложение является значимым, если их действительные величины инвариантны при всех допустимых преобразованиях.

Уровни измерений определяются типом шкал, используемых для измерения.

Наименование шкалы	Допустимые преобразования
Номинальная шкала	произвольный x – произвольная g
Порядковая шкала	g: строго возрастающая функция
Интервальная шкала	$g(x)=ax+b$
Шкала отношений	$g(x)=ax$
Абсолютная шкала	$g(x)=x$

Сложность объектов управления, многообразие видов неполноты информации и неопределенностей, наличие противоречий при принятии решений не дает возможности ограничиться уровнями измерений, рассмотренными выше. В частности, это касается наиболее распространенных шкал отношений. Предложена *аддитивная шкала отношений* и *расширенная структура*.

Теорема. (Модифицированная расширенная структура μPc). Пусть P – непустое множество, $\geq$ – бинарное отношение на P, o – бинарная операция. Система с отношениями $(P, \geq, o)$ – расширенная структура, если поддерживаются следующие аксиомы для всех $P1,...,P4 \in P$:

$A1$: $(P, \bullet \geq)$ – слабый порядок;

$A2$: $P1°(P2°P3) \approx (P1°P2)°P3$ – аксиома слабой ассоциативности;

$A3$: $P1°P2 \approx P2°P1$ – аксиома слабой коммутативности;

$A4$: $P1 \bullet\geq P2 \Rightarrow P1°\ P3 \bullet\geq P2°\ P3$ – аксиома слабой монотонности;

$A5$: если $P3 \bullet\geq P4$, тогда для любых $P1,P2$ существует натуральное число n, такое, что $P1$ и $P3\ °\geq P2\ o\ n\ P4$ – композиция P само на себя n раз.

В рассматриваемых задачах эмпирическое отношение «>» имеет смысл «объект более сложен чем», эмпирическое отношение «≈» «имеет смисл» «сложен как», «•≥» – «более сложен или сложен как». Бинарная операция между двумя объектами «*o*» является композицией двух объектов.

Смысл аксиом таков:

- аксиома $A1$ утверждает, что существует отношение порядка между объектами, которое является полным, рефлексивным и транзитивным;
- аксиома $A2$ утверждает, что результат серии композиций не зависит от порядка, в котором они рассматриваются;
- аксиома $A3$ утверждает, что полнота композиции двух объектов не зависит от того, какой объект принимается первым и какой вторым в процессе композиции;
- аксиома $A4$ утверждает, что композиция сохраняет порядок между объектами, т.е. если выполняется композиция двух объектов $P1$ и $P2$ с объектом $P3$, то отношение порядка между $P1$ и $P2$ то же, что и между $P1°P2$ и $P2°P3$;
- аксиома $A5$ утверждает, что если для данных двух объектов $P1$ и $P2$ с $P1$ менее сложным чем $P2$, и для двух других объектов $P3$ и $P4$ с $P3$ более сложным, чем $P4$, всегда можно выполнить композицию $P1$ с $P3$ достаточное количество раз (n) и $P2$ с $P4$ n-раз, так, что $P1$ в композиции с $P3$ n-раз является более сложным, чем $P2$ в композиции с $P4$ n-раз.

Исследователь должен знать тип шкалы, которая используется. Проблема в том, что измерительный (физический) менеджмент, подобно другим научным дисциплинам, часто очень труден, чтобы определить тип шкал измерений. Здесь ответ часто является интуитивным или сформулированным неоднозначно.

Преобразования шкал. В процессе анализа данных и построения эмпирической модели очень часто исследователь трансформирует данные. Существует много доводов, почему исследователь трансформирует данные. Например, чтобы сделать нелинейные связи более линейными или сделать данные более подходящими для технического анализа. В этом случае параметры уравнений могут быть легко вычислены, модели могут быть интерпретированы более строго, интерполяция более легко выполняемой. Однако, в соответствии с принципами теории измерений эти требования не могут выполняться произвольно.

Исследования этих преобразований ясно показывают , что нелинейные преобразования не могут быть допустимыми для уравнений интервальных шкал и шкал отношений. В контексте измерительного менеджмента это обстоятельство имеет важное значение.

Тензорные модели мягких измерений. Покажем, каким образом можно использовать в условиях неопределенности тензорные модели, исходя исключительно из положений теории измерений. Ранее, было отмечено, что формальная система с отношениями B включает в качестве обязательного элемента непустое множество формальных объектов, в качестве которых выступают числа или векторы. Таким вектором, это будет показано ниже, может быть вектор, компоненты которого являются инвариантами некоторого тензора.

С одной стороны, тензор – это математический объект, позволяющий адекватно представлять сложные физические или технические объекты, состоящие из некоторого множества компонент (например, тензор первого ранга – три компоненты, второго – девять и т. д., (в общем случае m^n, m=1,2,3, . . ., n=0,1,2,...).

С другой стороны, тензор любого ранга однозначно описывается тремя инвариантами, операции над тензорами могут быть приведены к операциям над его инвариантами с последующим восстановлением компонентов тензора.

В целом ряде случаев измеряемая величина имеет ряд компонентов, рассматривать которые отдельно, по меньшей мере, нелогично, потому что они связаны внутренними невидимыми и практически непознаваемыми связями. Например, трафик вычислительной сети имеет девять компонентов, причем анализ только *всех* компонентов дает возможность определить, является ли данное состояние сети состоянием атаки на компьютерную сеть или это нормальная нагрузка. С точки зрения тензорного анализа этот кортеж из девяти элементов может рассматриваться как тензор, инварианты тензора позволяют однозначно идентифицировать анализ.

Предположим, что формальная система с отношениями в качестве непустого множества формальных объектов использует нечеткие числа (НЧ) или нечеткие вектора, т. е. вектора, компонентами которых являются нечеткие числа. Будем рассматривать случай, когда НЧ (или нечеткая переменная – НП) характеризуется тройкой пар «значение-функция принадлежности» – $\{x_1{}^a/\mu_1{}^x,\ x_2{}^a/\mu_2{}^x,\ x_3{}^a/\mu_3{}^x\}=\tilde{x}$. Представим НЧ как совокупность векторов $\tilde{x}=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ и $\tilde{\mu}=\{\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3\}$. Внешнее произведение векторов $\tilde{x}$ и $\tilde{\mu}$ определяется в виде $T_{ij} = x_i\ \mu_j$, i=1,3; j=1,3; объект T_{ij} в соответствии с правилами тензорного анализа [9 – 13] представляет собой тензор второго ранга, созданный из векторов $\mu_j \in \tilde{\mu}$, $x_i \in \tilde{x}$. В свою очередь, внутреннее произведение тензора T_{ij} на вектор $\tilde{\mu}$, определяемое в виде $x_i=\sum_{j=1}^{3} T_{ij}\,\mu_j$ дает возможность определить другой вектор-компоненту. Важным преимуществом такого представления является то, что тензор имеет обратный элемент, определяемый из выражения $T\,T^{-1} = T_\delta$, где T_δ– тензор Кронеккера.

С другой стороны, тензор однозначно определяется своими инвариантами, т. е. три инварианта, компоненты вектора, являются необходимым атрибутом формальной системы. Таким образом, мягкое измерение трансформировано в классическое четкое измерение, для которого справедливы все принципы и парадигмы теории измерений.

При преобразовании осей координат компоненты тензора преобразуются, их численные значения меняются. Они называются инвариантами тензора. Для нахождения инвариантов тензора второго ранга раскрывают определитель матрицы, представляющей тензор, и находят явный вид коэффициентов характеристического уравнения:

$\lambda_3 - \lambda_2(T_{11} + T_{22} + T_{33}) + \lambda = 0$

Корни характеристического уравнения – это числа, значение которых не зависят от выбора системы координат. Поэтому коэффициенты характеристического уравнения – суть инварианты тензора. Они связаны с характеристическими числами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$,

$$I_2 = \begin{bmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{21} & T_{23} \\ T_{31} & T_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Сумма диагональных элементов матрицы называется ее следом. Первый инвариант I_1 равен следу тензора.

Рассмотрим конкретный пример представления результата мягкого измерения его тензорной моделью. Предположим, что НП <примерно 4> представлена в виде:

$a = \{3,\ 4,\ 5\}$, $\mu_a = \{0.1000,\ 1.0000,\ 0.3000\} \Rightarrow \{3/0.1,\ 4/1.0,\ 5/0.3\}$.

Соответствующий НП <примерно 4> тензор – *ta*, для *ta* построены симметричный и асимметричный тензоры – *s* и *a*1 соответственно, девиатор и шаровая часть:

$$ta = \begin{bmatrix} 0.3000 & 3.0000 & 0.9000 \\ 0.4000 & 4.0000 & 1.2000 \\ 0.5000 & 5.0000 & 1.5000 \end{bmatrix},$$

$$s = \begin{bmatrix} 0.3000 & 1.7000 & 0.7000 \\ 1.7000 & 4.0000 & 3.1000 \\ 0.7000 & 3.1000 & 1.5000 \end{bmatrix},$$

$$a1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.3000 & 0.2000 \\ -1.3000 & 0 & -1.9000 \\ -0.2000 & 1.9000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$dev = \begin{bmatrix} -1.6333 & 1.0667 & -1.0333 \\ -1.5333 & 2.0667 & -0.7333 \\ -1.4333 & 3.0667 & -0.4333 \end{bmatrix}.$$

На рис. 6 приведено тензорное (четкое) представление нечеткой переменной <примерно 4>, полученное в среде математического моделирования *MatLab*.

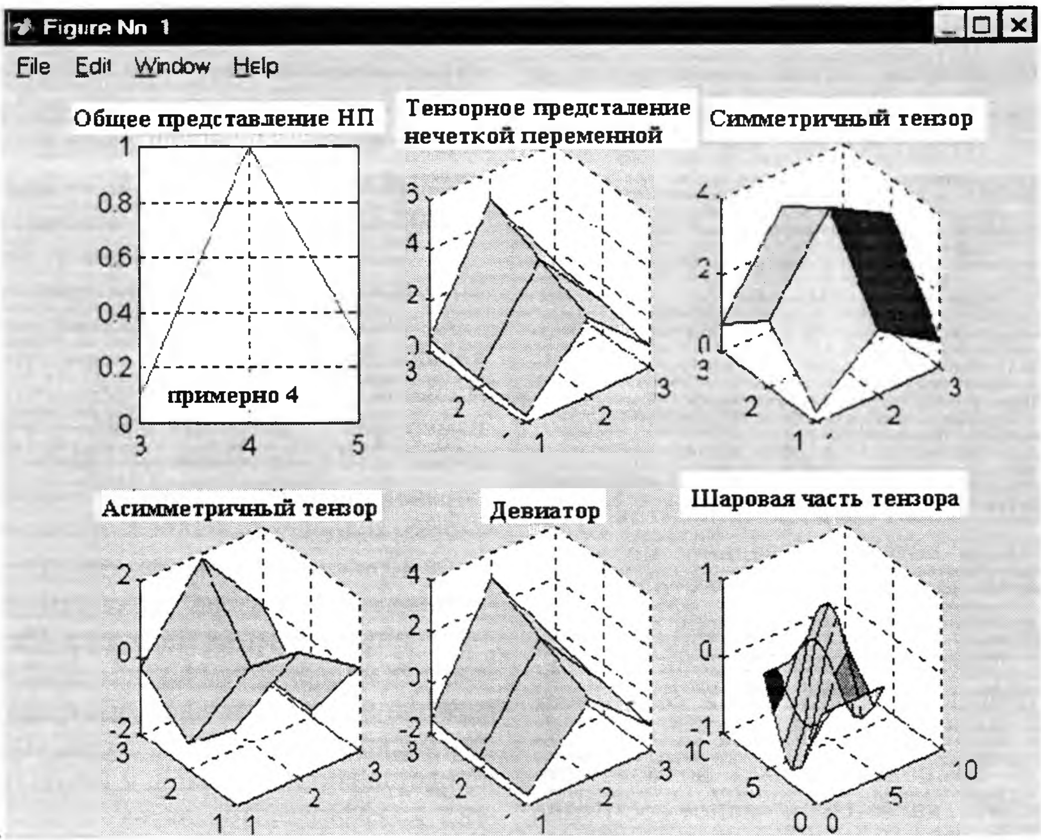

Рис. 6. Тензорное представление НП <примерно 4>

Анализируя рис. 6, нетрудно видеть, насколько эффективно тензорное представление.

Метрологические характеристики тензорных моделей измерений. Поскольку применение понятия «*измерение*» обязательно предполагает использование понятия «*меры*», то в данном случае, учитвая природу объекта, целесообразно вначале применить *нечеткую* меру. После исследования этой меры необходимо оценить возможность использования четкой (аддитивной) меры. *Нечеткую* (неаддитивную) меру ν, которая применяемая в данном случае, определим следующим образом. Пусть 2^x – множество всех подмножеств X. Нечеткая мера ν, определенная на множестве X, является функцией ν: $2^x \to [0,1]$, удовлетворяющей следующим условиям:

1. $\nu(0)=0$ и $\nu(X)=1$;
2. $A \subseteq B \subseteq X$ подразумевает $\nu(A) \leq \nu(B)$;
3. если $\{A_n, n \geq 1\}$ является монотонно увеличивающейся последовательностью измеренных множеств, когда

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Одним из распространеннных методов оценки измерительных характеристик, определенных на нечеткой мере, является интеграл Шоке. Если предположить, что $X=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ – финитное множество и функция $f()$ определена на финитных точках этого множества, то дискретный нечеткий интеграл Шоке определяется в виде:

$$C_\nu(\{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{(k-1)})\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} f(x_0) - f(x_{i-1}))\nu(A_{(i)}),$$

где (x_0), (x_1) … (x_{k-1}) являются перестановками $\{x_0, x_1, x_{(k-1)}\}$, удовлетворяющими условию:

$$f(x_0) \leq f(x_1) \leq \ldots \leq f(x_{(k-1)}),$$
$$A_i = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{(k-1)}\}$$

и $f(x_{(-1)})$ определяется как 0 (нуль).

Интеграл Шоке определен на нечеткой (неаддитивной) мере, т. е.

$$\nu(A \cup B) \neq \nu(A) + \nu(B)$$

для несвязанных множеств A и B. Если принять, что нечеткая мера является аддитивной, то интеграл Шоке совпадает со стандартным интегралом Лебега (как известно, Лебегова мера широко применяется в традиционных (метрологически обоснованных) измерениях). Интеграл Шоке предлагается в качестве естественной меры для моделирования сложных объектов, в частности, для тензорных моделей нечетких чисел или нечетких переменных, общая схема которых показана на рис.2, при этом введены следующие ограничения:

1. $f(x_i)=x_i$;
2. функция принадлежности для каждого столбца принимается постоянной и равной: для первого столбца первый компонент вектора $\mu(A)$, т.е. $\mu'(A)$, для второго – $\mu^2(A)$ и т. д. или равной 1.

Пример. Вычислим интеграл Шоке как нечеткую меру для двух типов одной НП:

а) примерно 4 = {2/0.1, 4/0.9, 6/0.2};
б) примерно 4 = {2/0.2, 4/0.8, 6/0.2} с целью выяснения вопроса, какая из переменных ближе к четкой переменной 4.

а)

Номер компоненты → 8 7 6 5 4 3

$$\{\underbrace{(5.4.\ 3.6.\ 1.8\ )}_{0.9}.\ \underbrace{(1.2.\ 0.8.\ 0.6)}_{0.2}\}\quad 0.1$$

2	4	6

0,2	1,8	0,4
0,4	3,6	0,8
0,6	5,4	1,2
↓	↓	↓
0,11	0,9	0,2

0,1
0,9
0,2

2 1 0

$$\underbrace{\{(0.4,\ 0.4,\ 0.2)\}}_{0.1\quad 0.2\quad 0.1}$$

$$C_\nu() = \sum_{i=0}^{k-1}(f(x_{(i)}) - f(x_{(i--1)})) = 0.2+0.2+0+$$
$$+0.2+0.2+0.4+0.6+1.8+1.8=5.4$$

б)

$$= \overset{8}{4.8}, \overset{7}{3.2}, \overset{6}{1.6}), (\overset{5}{1.2}, \overset{4}{1.8}, \overset{3}{0.8}),$$

2	4	6

$$(\overset{2}{0.8}, \overset{1}{0.4}, \overset{0}{0.4})$$

0.4	1.6	0.4
0.8	3.2	0.8
1.2	4.8	0.2

0.2
0.8
0.2

$$C_v() = \sum_{i=0}^{k-1} (f(x_{(i)}) - f(x_{(i--1)})) = 0.4+0+0.4+0+$$

$$+0.4+0+0.4+1.6+1.6 = 4.8$$

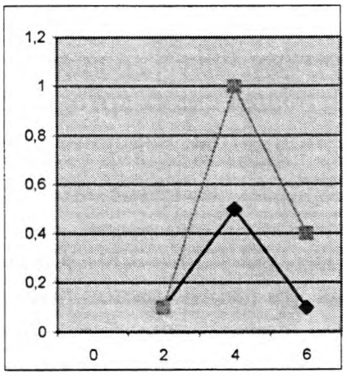

Рис.7. Графическое изображение возможных типов НП примерно *А*

Интуитивно и из графика видно, первое НП примерно 4 ближе к реальному числу 4, чем второе. Значение интеграла Шоке убедительно подчеркивает это обстоятельство $C_v^1 > C_v^2$.

Таким образом, нечеткая мера в виде интеграла Шоке достаточно эффективно описывает метрологические характеристики тензорного объекта, моделирующего результат мягких измерений.

Рассмотрим применение *четкой* меры, использовав в качестве такой меры первую инварианту тензора:

а) $I_1^{а)} = 0.2+3.6+1.2=5$,

б) $I_1^{б)} = 0.4+3.2+0.2=3.8$, т.е $I_1^{а)} > I_1^{б)}$.

Этот же результат получен выше, при использовании нечеткой меры. Близость результатов (5.4 ~ 5, 3.8 ~ 4.8) подтверждает правильность выводов.

В [14-18] приводятся результаты теоретических и ы прикладных исследований по этому направлению научных знаний.

Выводы

1. Базовая концепция теории измерений, состоящая в сопоставлении двух систем с отношением – эмпирической и формальной систем с отношениями, позволяет формализовать измерительный процесс мягких измерений путем включения в формальные множества объектов, представляющих собой тензора – функции мягких данных, представленных в форме «значение-функция принадлежности». Представление нечеткого числа (переменной) в виде тензора позволяет анализировать мягкое измерение на уровне традиционного измерения.

2. Допустимое преобразование шкал при тензорном представлении объекта измерения определяются наличием тензора преобразования. Тензорные преобразования позволяют получить принципиально новые типы шкал, соединить в одном тензоре разнородные величины и таким образом существенно повысить роль и значимость измерений, особенно в условиях неопределенности и неполной информации.

Список литературы

1. *Прокопчина С. В.* Организация измерительных процессов в условиях неопределенности. // Новости искусственного интеллекта. – М.: №2, 1997.– С.7-56.

2. *Регуляризующий* байесовский подход. – С.Пб. Сборник докладов Международной конференции по мягким измерениям и вычислением. – SCM'98. – 22-28 июня 1998. – Т.1. – С. 30-44.

3. *Аверкин А. Н., Прокопчина С. В.* Мягкие вычисления и измерения. – Новости искусственного интеллекта, №9, 2002. -- С. 93-119.

4. *Недосекин Д. Д., Прокопчина С. В., Чернявский Е. А.* Информационные технологии интеллектуализации измерительных процессов. – С.Пб.: Энергоатомиздат, 1995. – 187 с.

5. *Прокопчина С. И.* Концепция байсовской интеллектуализации измерений в задачах мониторинга сложных объектов // Новости искусственного интеллекта. – М.: №3, 1997.– С.7-56.

6. *Пфанцагль И.* Теория измерений. – М.: Мир, 1986. – 264 с.

7. *Берка К.* Измерения, понятия, теории, проблемы. – М.: Прогресс, 1987. – 319 с.

8. *Лебег А.* Об измерении величин. – М.: Учпедгиз, 1960. – 154 с.

9. *Стивенс С.* Экспериментальная психология. – М., 1960. – Т. 1, 2.

10. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. – М.: Сов.Радио, 1978. – 720 с.

11. *Петров А. Е.* Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 152 с.

12. *Нестеров А. В.* Тензорный подход к анализу и синтезу систем // НТТИ. Сер. 2, 1995, №9. – С. 26-32.

13. *Акивис М., Гольдберг В.В.* Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

14. *Курс* лекций И. М. Гельфанда по линейной алгебре.
URL: http://www.nature.ru/db/msg.html

15. *Минаев Ю. Н.* Измерения в программном обеспечении // Измерения, контроль, автоматизация. – №2. 1988. – С. 27-32.

16. *Філімонова О. Ю., Мінаєв Ю. М.* Універсальні алгоритми екологічного моніторингу в інтелектуальних системах на підставі методів нечіткої математики в тензорному логічному базисі. – Містобудування та територіальне планування, 13, 2002, К.: КНУБА. – С.221-235.

17. *Минаев Ю. Н., Філімонова О. Ю.* Тензорный базис как основа «мягких» вычислений в условиях неопредеоленности. – Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції «АВІА-2003», Київ, 22-25 квітня 2003 р. – С.154-159.

18. *Тензорный* базис как основа новых алгоритмов решения задач управления в условиях неопределенности. – IV-ая Всероссийская научно-техническая конференция «Новые информационные технологии» // Сборник научных трудов, Москва, 23-24 апреля 2003 г. – С.142-147.

19. *Тензорный* базис как основа формализации мягких измерений и мягких вычислений. – Доклады II-го Международного научно-практического семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте», 15-17 июня 2003 г., Коломна. – С.72 – 78.