

УДК 519.61(045)+52-17

Денисюк В.П., д.ф.-м.,  
Рибачук Л.В., к.ф.-м.,  
Негоденко О.В.

## ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ НЕБЕСНОЇ МЕХАНІКИ У ВИГЛЯДІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СПЛАЙНІВ

Національний авіаційний університет

[kvomden@nau.edu.ua](mailto:kvomden@nau.edu.ua)  
[negodenkoav@rambler.ru](mailto:negodenkoav@rambler.ru)

*Запропоновано метод побудови наближених розв'язків першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами у вигляді тригонометричних сплайнів з використанням методу фантомних вузлів. Невизначені параметри визначаються методом колокацій. Наведено приклад; показано, що відносна похибка розв'язку зменшилася при введенні фантомних вузлів*

**Ключові слова:** тригонометричні сплайни, фантомні вузли, метод колокацій.

### Постановка задачі

Основним завданням небесної механіки вважають задачу покращення вірності прогнозування руху небесних тіл. Сучасний космічний експеримент вимагає великої точності встановлення положень небесних тіл в просторі.

На даний час досить відомо про тіла Сонячної системи. Відкрито закони, які описують взаємодію планет і супутників. Для запису цих законів використовують диференціальні рівняння відносно координат центрів мас тіл і кутів їх обертання.

Інтегрування диференціальних рівнянь руху в даний час є найпоширенішим способом дослідження еволюції елементів орбіт і прогнозу положень небесних тіл Сонячної системи взагалі і астероїдів зокрема [1].

Диференціальні рівняння руху тіл інтегруються в небесній механіці наближено, за допомогою чисельних методів.

Відомі чисельні методи можна поділити на суто чисельні та чисельно-аналітичні. Чисельні методи не передбачають аналітичний вигляд розв'язку і дозволяють знаходити значення шуканого розв'язку при певних значеннях аргументу.

Чисельно-аналітичні розв'язки отримують у припущенні, що шуканий розв'язок має заданий аналітичний ви-

гляд, що залежить від певної кількості невизначених параметрів; знаходження такого розв'язку полягає у визначенні значень цих параметрів.

Переваги чисельних методів у порівнянні з чисельно-аналітичними полягають у відносній простоті їх реалізації. До переваг же чисельно-аналітичних методів слід віднести можливість врахування деяких аналітичних властивостей шуканого розв'язку, які часто бувають відомі апіорі.

До чисельних методів слід віднести однокрокові методи типу Рунге-Кути, Батчера, Еверхарта тощо, та багатокрокові методи Адамса-Мультона-Коуелла тощо.

У цих методів є спільні риси (елементи апроксимації поліномами, оцінка точності обчислень, крок чисельного інтегрування, інтервал надійності розрахунку) і суттєві відмінності (застосування поділених різниць, використання похідних, кількість кроків, наявність невідомих величин в правій частині нелінійних рівнянь) [3].

До чисельно-аналітичних методів слід віднести методи типу Бубнова-Гальоркіна; зрозуміло, що певною модифікацією цього методу є і метод рядів.

Останнім часом в теорії наближень привертають увагу поліноміальні сплайни. Проте складова природа цих сплайнів

значною мірою ускладнює їх застосування в задачах знаходження наближених розв'язків диференціальних рівнянь.

В роботах [4], [5] впроваджено тригонометричні сплайни, які є періодичними. Такі сплайни зручно застосовувати для відшукування періодичних розв'язків. При відшуванні ж неперіодичних розв'язків вплив періодичності можна значно послабити, застосовуючи запропонований в роботі [6] метод фантомних вузлів.

В роботі [2] розглядався метод побудови наближених розв'язків першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами у вигляді тригонометричних многочленів з використанням методу фантомних вузлів.

Оскільки, тригонометричні сплайни мають ряд переваг при наближенні функцій з невисокою гладкістю перед тригонометричними многочленами, доцільно дослідити цей метод для випадку, коли в ролі наближуючої функції використовуються тригонометричні сплайни.

### Мета роботи

Розробка методики знаходження наближеного розв'язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь із використанням методу фантомних вузлів; дослідження похибки наближеного розв'язку на типовому прикладі.

### Основна частина

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = f(t), \quad t \in [0, 2p - a] \quad (1)$$

та крайовими умовами

$$\begin{aligned} u(0) &= A, \\ u(2p - a) &= B, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $a$ ,  $0 < a < 2p$ , - параметр стискання, значення якого ми виберемо пізніше.

Наближений розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді тригонометричного сплайна

$$S_r(f, \Delta_N, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(r, N) [a_k^* \Phi_k^c(r, N, t) + b_k^* \Psi_k^s(r, N, t)]$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_k^c(r, N, t) &= \frac{\cos kt}{k^{r+1}} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\cos(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}} + \frac{\cos(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}} \right], \\ \Psi_k^s(r, N, t) &= \frac{\sin kt}{k^{r+1}} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin(mN+k)t}{(mN+k)^{r+1}} - \frac{\sin(mN-k)t}{(mN-k)^{r+1}} \right], \\ [a_k(r, N)]^{-1} &= \frac{1}{k^{r+1}} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(mN+k)^{r+1}} + \frac{1}{(mN-k)^{r+1}} \right], \\ a_0 &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i), \\ a_k^* &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i) \cos kt_i, \end{aligned}$$

$$b_k^* = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N f(t_i) \sin kt_i, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Зрозуміло, що цей розв'язок містить  $2n + 1$  невизначених параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ .

Підставляючи тригонометричний сплайн в (1), (2), отримуємо

$$S_k'' + p(t)S_k'(t) + q(t)S_k(t) = f(t), \quad (4)$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} S_k(0) &= A, \\ S_k(2p - a) &= B. \end{aligned} \quad (5)$$

Нев'язка  $e(t)$  рівняння (4) має вигляд

$$e(t) = S_k'' + p(t)S_k'(t) + q(t)S_k(t) - f(t) \quad (6)$$

Для визначення параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  задамо на відрізку  $[0, 2p]$   $2n + 1$  точок  $t_i$ , ( $i = 1, \dots, 2n + 1$ ) з урахуванням того факту, що тригонометричний сплайн  $S_k(t)$  в силу періодичності приймає однакові значення у точках  $0$  і

2р. Враховуючи це, задамо точки  $t_i$ , ( $i=1, \dots, 2n+1$ ), таким чином

$$t_i = \frac{2p}{2n+1}(i-1), \quad i=1, \dots, 2n+1.$$

Тоді для визначення параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ,  $b_1, \dots, b_n$  маємо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} S_k(t_1) &= A; \\ e(t_i) &= 0, \quad i=2, 3, \dots, 2n; \\ S_k(t_{2n+1}) &= B. \end{aligned} \quad (7)$$

Зрозуміло, що в даному випадку ми покладаємо

$$a = \frac{2p}{2n+1}.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо значення невизначених параметрів  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ,  $b_1, \dots, b_n$ .

В багатьох випадках зручнішим є застосування іншої форми тригонометричного сплайна.

Ця форма має вигляд

$$S_k(t) = \sum_{k=1}^{2n+1} f_k S(k, t), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} S(k, t) = \frac{1}{N} & \left[ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} (c(j, t) \cos(j \cdot x_k)) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} (s(j, t) \sin(j \cdot x_k)) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} c(k, t) &= \frac{\left( \frac{\cos(k, t)}{k^{r+1}} + \sum_{m=1}^p \frac{\cos[(mN+k) \cdot t]}{(mN+k)^{r+1}} + \sum_{m=1}^p \frac{\cos[(mN-k) \cdot t]}{(mN-k)^{r+1}} \right)}{\frac{1}{k^{r+1}} + \sum_{m=1}^p \frac{1}{(mN+k)^{r+1}} + \sum_{m=1}^p \frac{1}{(mN-k)^{r+1}}} \\ s(k, t) &= \frac{\left( \frac{\sin(k, t)}{k^{r+1}} + \sum_{m=1}^p \frac{\sin[(mN+k) \cdot t]}{(mN+k)^{r+1}} + \sum_{m=1}^p \frac{\sin[(mN-k) \cdot t]}{(mN-k)^{r+1}} \right)}{\frac{1}{k^{r+1}} + \sum_{m=1}^p \frac{1}{(mN+k)^{r+1}} + \sum_{m=1}^p \frac{1}{(mN-k)^{r+1}}}, \end{aligned}$$

а  $f_k$ , ( $k=1, 2, \dots, 2n+1$ ) – невизначені параметри.

Оскільки

$$S(k, t_j) = \begin{cases} 1, & k=j; \\ 0, & k \neq j, \end{cases} \quad (10)$$

то зрозуміло, що невизначені параметри  $f_k$ , ( $k=1, 2, \dots, 2n+1$ ) являють собою зна-

чення наближеного шуканого розв'язку у вузлових точках  $t_k$ , ( $k=1, \dots, 2n+1$ ).

Підставляючи вирази (8), (9) в рівняння (1) з урахуванням крайових умов (2) та виразу (10), отримуємо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} f_1 &= A; \\ e(t_i) &= 0, \quad i=2, 3, \dots, 2n; \\ f_{2n+1} &= B. \end{aligned} \quad (11)$$

Як ми вже казали раніше, при такому підході у точках 0 і 2р спостерігається явище Гіббса. Для послаблення впливу цього явища застосуємо метод фантомних вузлів покращення збіжності тригонометричних многочленів. Для цього, збільши-мо кількість точок на парне число; значення у цих точках, які ми позначимо  $B_1, B_2, \dots, B_{2m}$ , ( $m=1, 2, \dots$ ), можна вибрати, наприклад, обчислюючи у відповідних точках значення прямої, що з'єднує точки  $B$  та  $A$ . Тоді система рівнянь (11) для двох фантомних вузлів набуває вигляду

$$\begin{aligned} f_1 &= A; \\ e(t_i) &= 0, \quad i=2, 3, \dots, 2n; \\ f_{2n+1} &= B; \\ f_{2n+2} &= B_1; \\ f_{2n+3} &= B_2, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{2p}{2n+3}(i-1), \quad i=1, \dots, 2n+3; \\ a &= \frac{2p \cdot 3}{2n+3}. \end{aligned}$$

Для чотирьох фантомних вузлів система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} f_1 &= A; \\ e(t_i) &= 0, \quad i=2, 3, \dots, 2n; \\ f_{2n+1} &= B; \\ f_{2n+2} &= B_1; \\ f_{2n+3} &= B_2; \\ f_{2n+4} &= B_3; \\ f_{2n+5} &= B_4, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{2p}{2n+5}(i-1), \quad i=1, \dots, 2n+3 \\ a &= \frac{2p \cdot 5}{2n+5}. \end{aligned}$$

Для ілюстрації вищенаведеного розглянемо таку крайову задачу

$$\begin{aligned} u''(t) &= 0; \\ u(0) &= 1; \\ u(2p - a) &= 9. \end{aligned} \quad (14)$$

Будемо шукати наближений розв'язок задачі (14). Покладемо  $n = 4$ ; відповідно,

$$a = \frac{2p}{9}; \quad t_i = \frac{2p}{9}(i-1), \quad i=1, \dots, 9.$$

Нескладно переконатися, що точним розв'язком цієї задачі буде пряма

$$u(t) = \frac{9}{2p}t + 1.$$

Складаючи систему рівнянь типу (11) і розв'язуючи її, отримуємо наближений розв'язок  $S_4(t)$ . Графіки точного і наближеного розв'язків а також графік відносної похибки для випадку без фантомних вузлів наводяться рис. 1, 2.

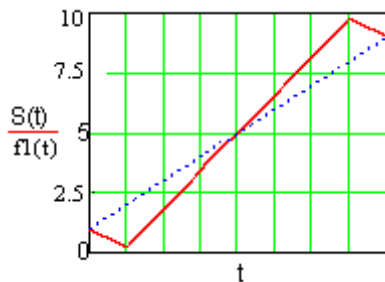


Рис. 1 Графіки точного  $f1(t)$  і наближеного  $S_4(t)$  розв'язків на відрізку  $\left[0, \frac{8}{9} \cdot 2p\right]$

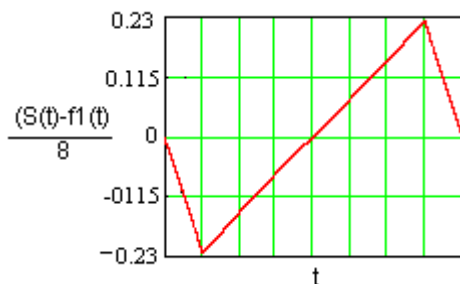


Рис. 2 Графік відносної похибки наближеного розв'язку на відрізку  $\left[0, \frac{8}{9} \cdot 2p\right]$ .

Додамо тепер два фантомних вузли. У випадку, якщо відсутні відомості про похідні шуканого розв'язку, застосовують лінійну інтерполяцію для обчислення

значень у цих вузлах. Якщо ж є оцінки першої або першої та другої похідних шуканого розв'язку, то значення у фантомних вузлах вибираються з використанням цих оцінок. Інколи вдається підібрати такі значення у фантомних точках, при яких досягається аномальне зменшення похибки наближеного розв'язку.

Для даного прикладу використаємо підібрані значення фантомних вузлів.

Тепер

$$a = \frac{2p \cdot 3}{11}; \quad t_i = \frac{2p}{11}(i-1), \quad i=1, \dots, 11.$$

Точним розв'язком стає пряма

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{8}{2p - a}t + 1 = \frac{11}{2p}t + 1, \\ t &\in \left[0, \frac{8}{11} \cdot 2p\right]. \end{aligned}$$

Складаючи систему рівнянь типу (12), де

$$f_{2n+2} = 7.5, \quad f_{2n+3} = 2.5$$

отримуємо наближений розв'язок  $S_5(t)$ .

Графіки точного і наближеного розв'язків, а також графік відносної похибки для випадку з 2-ма фантомними вузлами наводяться на рис. 3, 4.

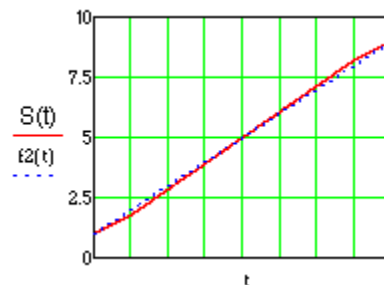


Рис. 3. Графіки точного  $f2(t)$  і наближеного  $S_5(t)$  розв'язків на відрізку  $\left[0, \frac{8}{11} \cdot 2p\right]$

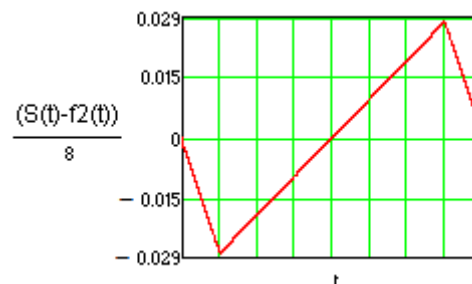


Рис. 4. Графік відносної похибки наближеного розв'язку на відрізку  $\left[0, \frac{8}{11} \cdot 2p\right]$

Відносна похибка зменшилася в 8 разів.

Додамо тепер чотири фантомних вузли; значення у цих вузлах підбираємо. Тепер

$$a = \frac{2p \cdot 5}{13}; t_i = \frac{2p}{13}(i-1), i=1, \dots, 13.$$

Точним розв'язком стає пряма

$$u(t) = \frac{8}{2p-a}t + 1 = \frac{13}{2p}t + 1,$$

$$t \in \left[0, \frac{8}{13}2p\right].$$

Складаючи систему рівнянь типу (13), де

$$f_{2n+2} = 9.435, f_{2n+3} = 7.22, f_{2n+4} = 2.88, \\ f_{2n+5} = 0.589,$$

отримуємо наближений розв'язок  $S_6(t)$ .

Графіки точного і наближеного розв'язків, а також графік відносної похибки для випадку з 4-ма фантомними вузлами наводяться на рис. 5, 6.

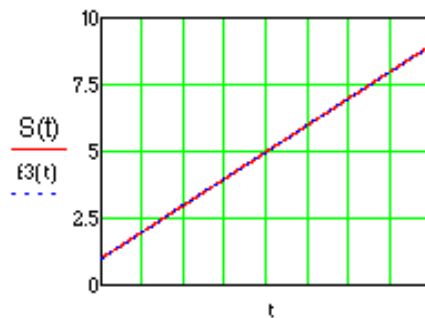


Рис. 5. Графіки точного  $f_3(t)$

і наближеного  $S_6(t)$  розв'язків на відрізку  $\left[0, \frac{8}{13}2p\right]$

Зрозуміло, що відносна похибка наближених розв'язків, отриманих таким

чином, залежить від кількості фантомних точок та від способу вибору значень у цих фантомних точках.



Рис.6. Графік відносної похибки наближеного розв'язку на відрізку  $\left[0, \frac{8}{13}2p\right]$

Відносна похибка зменшилася в 250 разів.

Ми обмежились розглядом випадку, коли кількість фантомних точок є невели-

кою (2 та 4 фантомні точки); значення ж у цих фантомних точках вибиралися використовуючи різні способи. Результати обчислень наводяться в Таблиці 1.

Таблиця 1. Відношення відносних похибок розв'язків диференціального рівняння без фантомних вузлів до відносної похибки з фантомними вузлами

| Кількість вузлових точок | Кількість фантомних вузлів | Лінійна інтерполяція | З урахування I похідної | З урахування I та II похідних | Значення підібрані |
|--------------------------|----------------------------|----------------------|-------------------------|-------------------------------|--------------------|
| 5                        | 2                          | 2.5                  | 2.8                     | 4.2                           | 5.2                |
|                          | 4                          | 3.2                  | 6.4                     | 12.3                          | 25.7               |
| 9                        | 2                          | 2.95                 | 4.79                    | 8.52                          | 8                  |
|                          | 4                          | 4.12                 | 8.85                    | 17.69                         | 250                |

### Висновки

Запропоновано метод знаходження наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь для випадків, коли цей розв'язок наближується тригонометричними сплайнами.

Для послаблення впливу періодичності тригонометричних сплайнів було застосовано метод фантомних вузлів. При застосуванні цього методу не збільшується розмірність системи рівнянь для знаходження невизначених параметрів.

Проведені тестові розрахунки ілюструють достатньо високу ефективність запропонованого методу знаходження наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

Способи вибору значень у фантомних вузлах відкривають можливість використовувати більший обсяг інформації при відшукуванні наближеного розв'язку; інакше кажучи, через значення у фантомних вузлах ми непрямим чином використовуємо додаткові відомості про шуканий розв'язок.

Безумовно, запропонований метод знаходження наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь потребує подальших досліджень, а також для ефективного впровадження для задач небесної механіки.

### Список літератури

1. Баканас Е.С., Барабанов С.И., Болгова Г.Т., Микиша А.М., Рыхлова Л.В., Смирнов М.А., *Астрономический аспект проблемы космической защиты*

Земли. 2003. Труды конференции «Околоземная астрономия», том 1, с.16-37.

2. Побудова наближених розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь у вигляді тригонометричних многочленів / В. П. Денисюк, Л. В. Рибачук, О. В. Негоденко // *Проблеми інформатизації та упр.*: зб. наук. пр. - 2014. - 1, вип. 45. - С. 37-41.

3. Бордовицына Т.В. *Современные численные методы в задачах небесной механики.* – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984 г. – 136с.

4. Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни: Монографія/ В.П. Денисюк.- К: ПАТ «Віпол», 2015. – 296с.

5. Денисюк В.П. *Сплайни та сигнали: Монографія.*-ЗАТ «Віпол», 2007.- 228с.

6. Денисюк В.П. О некоторых методах улучшения сходимости тригонометрических рядов Фурье и интерполяционных тригонометрических многочленов//*Journal of Qafqaz University, Mathematics and Computer Science*, Number 33 (2012), <http://journal.qu.edu.az>.

Статтю подано до редакції 10.06.2016