УДК 62.50

Антонов В.К., д.т.н.

ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯТОРОВ

Национальный авиационный университет

vladimir_antonov_50@mail.ru

Показана возможность применения дробных производных для построения стабилизирующих регуляторов, и их эквивалентность регуляторам с целыми производными

Ключевые слова: дробная производная, регулятор, матрица функций

Тема применения дробных производных в различных областях знания не является исчерпанной. Далее следующим изложением это подтверждается на примере построения регуляторов.

По аналогии с регуляторами, содержащими производные целого порядка, например вида

$$u = a_0 x + a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + a_3 \dddot{x}, \qquad (1)$$

предлагается искать регулятор в виде

$$u = \int_0^4 k(n) \overset{(n)}{x}\, dn. \qquad (2)$$

Выражение (2) переходит в (1) при задании $k(n)$ в виде решетчатой функции, принимающей вдоль порядка дифференцирования n значения коэффициентов из (1).

Дробная производная порядка $0 \le n \le 4$ определяется с помощью интерполяционного полинома Лагранжа интерполяцией производных целого порядка [1].

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dt^n}x(t) &= \frac{1}{24}(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)x(t) - \frac{1}{6}(n^4-9n^3+26n^2-24n)\frac{d}{dx}x(t) + \\ &+ \frac{1}{4}(n^4-8n^3+19n^2-12n)\frac{d^2}{dx^2}x(t) - \frac{1}{6}(n^4-7n^3+14n^2-8n)\frac{d^3}{dx^3}x(t) + \\ &+ \frac{1}{24}(n^4-6n^3+11n^2-6n)\frac{d^4}{dx^4}x(t)\end{aligned} \qquad (3)$$

Следуя (2), запишем интеграл по непрерывному порядку дифференцирования

$$\begin{aligned}\int \frac{d^n}{dt^n}x(t)dn &= \int \frac{1}{24}(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)x(t)dn - \\ &- \int \frac{1}{6}(n^4-9n^3+26n^2-24n)\frac{d}{dt}x(t)dn + \int \frac{1}{4}(n^4-8n^3+19n^2-12n)\frac{d^2}{dx^2}x(t)dn - \\ &- \int \frac{1}{6}(n^4-7n^3+14n^2-8n)\frac{d^3}{dx^3}x(t)dn + \int \frac{1}{24}(n^4-6n^3+11n^2-6n)\frac{d^4}{dx^4}x(t)dn\end{aligned} \qquad (4)$$

Интегралы от степенных функций в скобках запишем в явном виде, и результат представим в векторно-матричной форме.

$$\int \frac{d^n}{dx^n} f(x)dn = \begin{pmatrix} n^5 & n^4 & n^3 & n^2 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{120} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{120} \\ -\frac{5}{48} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{24} & -\frac{1}{16} \\ \frac{35}{72} & -\frac{13}{19} & \frac{19}{12} & -\frac{7}{9} & \frac{11}{72} \\ -\frac{25}{24} & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^0}{dx^0} \\ \frac{d^1}{dx^1} \\ \frac{d^2}{dx^2} \\ \frac{d^3}{dx^3} \\ \frac{d^4}{dx^4} \end{pmatrix} f(x) + C \tag{5}$$

Получили форму, напоминающую квадратичную. Запишем ее в компактном виде

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n}{dx^n} f(x)dn = M \cdot N \times \frac{d^{01234}}{dx^{01234}} f(x) + C = (MN)^T \cdot \frac{d^{01234}}{dx^{01234}} f(x) + C = \\ = N^T M^T \cdot \frac{d^{01234}}{dx^{01234}} f(x) + C \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим управляемую систему размерности k с числом управлений r

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ \ddot{X} &= A\dot{X} + B\dot{u} = A(AX + Bu) + B\dot{u} = AAX + ABu + B\dot{u} \\ \dddot{X} &= A\ddot{X} + B\ddot{u} = A(AAX + ABu + B\dot{u}) + B\ddot{u} = AAAX + AABu + AB\dot{u} + B\ddot{u} \\ \ddddot{X} &= A\dddot{X} + B\dddot{u} = A(AAAX + AABu + AB\dot{u} + B\ddot{u}) + B\dddot{u} = \\ &= AAAAX + AAABu + AAB\dot{u} + AB\ddot{u} + B\dddot{u} \end{aligned} \tag{7}$$

$i = \overline{1...k}$, где k - размерность системы; r - число управлений;

Управления, согласно (2), будем искать в виде

$$u_1(a) = \int \left(f_{11}(a,n) \frac{d^n}{dt^n} x_1(t) + f_{12}(a,n) \frac{d^n}{dt^n} x_2(t) + \cdots + f_{1k}(a,n) \frac{d^n}{dt^n} x_k(t) \right) dn$$

$$u_2(a) = \int \left(f_{21}(a,n) \frac{d^n}{dt^n} x_1(t) + f_{22}(a,n) \frac{d^n}{dt^n} x_2(t) + \cdots + f_{2k}(a,n) \frac{d^n}{dt^n} x_k(t) \right) dn$$

. . . .

$$u_r(a) = \int \left(f_{r1}(a,n) \frac{d^n}{dt^n} x_1(t) + f_{r2}(a,n) \frac{d^n}{dt^n} x_2(t) + \cdots + f_{rk}(a,n) \frac{d^n}{dt^n} x_k(t) \right) dn \tag{8}$$

В компактной записи

$$u(a) = \int F(a,n) \frac{D^n}{Dt^n} X(t) dn, \tag{9}$$

где $F(a,n)=\begin{pmatrix} f_{11}(a,n) & f_{12}(a,n) & \dots & f_{1k}(a,n) \\ f_{21}(a,n) & f_{22}(a,n) & \dots & f_{2k}(a,n) \\ . & . & \dots & . \\ f_{r1}(a,n) & f_{r2}(a,n) & \dots & f_{rk}(a,n) \end{pmatrix}$ -

Матрица функций распределения «весовых коэффициентов» a по порядкам дифференцирования для всех управляемых переменных.

Построим матрицу $\Pi(k+1,5)$ из векторов-столбцов

$$X = EX + 0u + 0\dot{u} + 0\ddot{u} + 0\dddot{u}$$
$$\dot{X} = AX + Bu + 0\dot{u} + 0\ddot{u} + 0\dddot{u}$$
$$\ddot{X} = AAX + ABu + B\dot{u} + 0\ddot{u} + 0\dddot{u}$$
$$\dddot{X} = AAAX + AABu + AB\dot{u} + B\ddot{u} + 0\dddot{u}$$
$$\ddddot{X} = AAAAX + AAABu + AAB\dot{u} + AB\ddot{u} + B\dddot{u},$$

Образованных последовательным дифференцированием

$$\Pi = \begin{pmatrix} X & \dot{X} & \ddot{X} & \dddot{X} & \ddddot{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dot{x}_1 & \ddot{x}_1 & \dddot{x}_1 & \ddddot{x}_1 \\ x_2 & \dot{x}_2 & \ddot{x}_2 & \dddot{x}_2 & \ddddot{x}_2 \\ x_3 & \dot{x}_3 & \ddot{x}_3 & \dddot{x}_3 & \ddddot{x}_3 \\ . & . & . & . & . \\ x_k & \dot{x}_k & \ddot{x}_k & \dddot{x}_k & \ddddot{x}_k \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В компактной записи она имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} (E; A; AA; AAA; AAAA) \\ (0; B; AB; AAB; AAAB) \\ (0;0; B; AB; AAB) \\ (0;0;0; B; AB) \\ (0;0;0;0; B) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X \\ u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \dddot{u} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

С учетом интерполяционного определения дробной производной

$$\frac{d^n}{dt^n} x_i(t) = p_1(n) x_i(t) + p_2(n) \frac{d}{dx} x_i(t) + p_3(n) \frac{d^2}{dx^2} x_i(t) +$$
$$+ p_4(n) \frac{d^3}{dx^3} x_i(t) + p_5(n) \frac{d^4}{dx^4} x_i(t),$$

где

$$p_1(n) = \frac{1}{24}(n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 50n + 24); \quad p_2(n) = -\frac{1}{6}(n^4 - 9n^3 + 26n^2 - 24n);$$

$$p_3(n) = +\frac{1}{4}(n^4 - 8n^3 + 19n^2 - 12n); \quad p_4(n) = -\frac{1}{6}(n^4 - 7n^3 + 14n^2 - 8n);$$

$$p_5(n) = +\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n),$$

переопределим Π домножением на вектор коэффициентов p_i .

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ p_3(n) \\ p_4(n) \\ p_5(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (E; A; AA; AAA; AAAA); (0; B; AB; AAB; AAAB); \\ (0;0; B; AB; AAB); (0;0;0; B; AB); (0;0;0;0; B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \dddot{u} \end{pmatrix} = \tag{12}$$

$$= \begin{pmatrix} (p_1(n)E; p_2(n)A; p_3(n)AA; p_4(n)AAA; p_5(n)AAAA); \\ (0; p_2(n)B; p_3(n)AB; p_4(n)AAB; p_5(n)AAAB); \\ (0;0; p_3(n)B; p_4(n)AB; p_5(n)AAB); \\ (0;0;0; p_4(n)B; p_5(n)AB); \\ (0;0;0;0; p_5(n)B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \\ \dddot{u} \end{pmatrix}$$

Тогда управление имеет вид

$$u(a) = \int K(a, n)\Pi(n, A, B, X, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u})dn \tag{13}$$

Интеграл в (13) является определенным и берется (в пределах подобно (2)) в конечном виде для «коэффициентов усиления» $K(a, n)$ - полиномиальных функций переменной n - полиномов с коэффициентами a .

Рассмотрим пример управляемой системы

$$\overset{(5)}{x} + a_1\ddddot{x} + a_2\dddot{x} + a_3\ddot{x} + a_4\dot{x} + a_5 x = bu; \tag{14}$$

Запишем ее в нормальной форме

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = x_3; \quad \dot{x}_3 = x_4; \quad \dot{x}_4 = x_5;$$

$$\dot{x}_5 = -a_5x_1 - a_4x_2 - a_3x_3 - a_2x_4 - a_1x_5 + bu; \tag{15}$$

Коэффициент b зададим единичным, а остальные:

$$a_1 = 15{,}0; \quad a_2 = 85{,}0; \quad a_3 = 225{,}0; \quad a_4 = 274{,}0; \quad a_5 = 120{,}0;$$

- из условия следующих значений собственных чисел:

$$p_1 = \text{-}1{,}0; \quad p_2 = \text{-}2{,}0; \quad p_3 = \text{-}3{,}0; \quad p_4 = \text{-}4{,}0; \quad p_5 = -5{,}0.$$

Зададим функцию распределения весов по порядку дифференцирования в виде таблицы 1.

Таблица 1. Функцию распределения весов по порядку дифференцирования

n	0	1	2	3	4
$a(n)$	8	4	2	1	0,5

Между целыми значениями показателя дифференцирования функция $a(n)$ определяется линейным интерполированием.

Управление имеет вид

$$u = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 + k_5x_5 , \tag{16}$$

где

$$k_1 = \frac{1}{24}\int_0^4 a(n)(n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 50n + 24)dn;$$

$$k_2 = -\frac{1}{6}\int_0^4 a(n)(n^4 - 9n^3 + 26n^2 - 24n)dn;$$

$$k_3 = \frac{1}{4}\int_0^4 a(n)(n^4 - 8n^3 + 19n^2 - 12n)dn;$$

$$k_4 = -\frac{1}{6}\int_0^4 a(n)(n^4 - 7n^3 + 14n^2 - 8n)dn.$$

Коэффициенты принимают следующие значения

$$k_1 = 27{,}542; k_2 = 66{,}220; k_3 = 27{,}814;$$
$$k_4 = 19{,}180; k_5 = -22{,}750. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и затем (16) в (14), численно интегрируем замкнутую систему (14) в течении 5 секунд при единичном начальном условии для регулируемой переменной и равными нулю производными. Качество переходного процесса оцениваем интегралом от функции Ляпунова, определяемой суммой квадратов фазовых координат. Для данного случая получаем

$$\int_0^5 V(t)dt = 11{,}617. \qquad (18)$$

Для сравнения весовые коэффициенты задаем как для обычного регулятора с целыми производными, равными значениям функции $a(n)$ при целых n, т.е

$$k_1 = 8{,}0; k_2 = 4{,}0; k_3 = 2{,}0; k_4 = 1{,}0; k_5 = 0{,}5. \qquad (19)$$

Повторяя интегрирование (14) получаем оценку

$$\int_0^5 V(t)dt = 12{,}587. \qquad (20)$$

Интегрирование (14) в отсутствие управления дает

$$\int_0^5 V(t)dt = 13{,}632\,. \qquad (21)$$

Сравнение интегралов (19-21) показывает возможность улучшать переходные процессы, получаемые с использованием обычных регуляторов.

Интересен случай использования при построении регуляторов отрицательных непрерывных порядков дифференцирования, что эквивалентно законам управления с интегралами от фазовых координат. В этом случае возникает необходимость обнуления интегралов в отсутствие отклонений по координатам. Реализовать это условие можно, домножая в законе управления совокупность членов с интегралами на функцию Ляпунова для координат системы. Получаем дополнительную обратную связь, работающую «внутри» закона управления. Возможно также подобное дифференциальное действие на члены с интегралами, применение систем сравнения. Системы с такого рода связями образуют отдельный новый класс, требующий исследования.

Список літератури

1. Застосування похідних дробного порядку в задачах структурної ідентифікації і механіки. Вісник НАУ. -2009.- №2. – С. 178-183.

Стаття надано до редакції 15.04.2016