УДК 519.218.82(045)

Андреєв О.В., к.т.н.,
Андрєєв В.І., к.т.н.

МЕТОД ДВОПАРАМЕТРИЧНОЇ ОПТИМАЛЬНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИГНАЛІВ НА ТЛІ ЗАВАД ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІЇ ЛАГРАНЖА

Національного авіаційного університету

alexandr_andr@mail.ru

viandr1940@mail.ru

Запропоновано новий метод екстраполяції нестаціонарних випадкових процесів на тлі завад, який базується на використанні функції Лагранжа, і використовує два попередні дискретні значення сигналу, та по їх значенням виконує оптимальну екстраполяцію для третього моменту часу в майбутньому

Ключові слова: екстраполяція, функція Лагранжа, випадкові нестаціонарні процеси

Вступ

Комп'ютерні мережі отримали в наш час широке застосування в різних галузях людської діяльності. Вирішення задач прогнозування, або екстраполяції характеристик трафіку комп'ютерних мереж займають важливе місце в управлінні комп'ютерних мереж та забезпеченні їх працездатності та ефективності роботи.

Вирішення задач екстраполяції випадкових процесів, до яких відноситься і трафік комп'ютерних мереж, займають важливе місце як в теорії випадкових процесів, так і в практичному використанню цієї теорії в рішеннях практичних задач надійності, діагностиці, контролю якості, обробці сигналів на тлі завад та інших задач в різних галузях науки та техніки. На сьогоднішній день найбільш повно вивчені задачі екстраполяції випадкових стаціонарних процесів без завад, також існують практичні результати екстраполяції цих процесів на тлі стаціонарних завад.

Недостатньо вивченими залишаються задачі екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів (ВНС) на тлі стаціонарних та нестаціонарних завад. В той же час саме ці задачі найбільш актуальні в різноманітних галузях науки та техніки, таких як контроль працездатності комп'ютерних мереж, обробка звукових сигналів на тлі завад, та багатьох інших.

Окремі результати по вирішенню цих задач поки що не отримали широкого практичного використання через свою складність.

Для вирішення цієї задачі було запропоновано методи експериментального дослідження та оптимальної екстраполяції характеристик трафіку локальної комп'ютерної мережі з застосуванням методів однопараметричної та двопараметричної оптимальної екстраполяції [1-4]. Як подальший розвиток попередніх методів запропоновано метод оптимальної екстраполяції на базі функцій Лагранжа.

За допомогою методу статистичного імітаційного моделювання (СІМ) [7] розроблено методику дослідження та оптимальної екстраполяції характеристик ВНС на тлі завад. За допомогою експерименту показана ефективність розробленої методики.

Мета статті – подальше вдосконалення запропонованих методів екстраполяції ВНС на тлі завад на базі функцій Лагранжа.

Постановка задачі

Метою даної статті є розробка методу двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад на базі функції Лагранжа по мінімальному набору попередніх спостережень (їх необхідно мати два - Y_1, Y_2).

Для досягнення цієї мети в статті запропоновані основні позначення випадкових величин, шо екстраполюються, їх ймовірностні параметри, набір необхідної апріорної інформації про випадковий нестаціонарний сигнал і отримані математичні вирази для оптимальної екстраполяції наступного значення Y^*_3, та його ймовірностних параметрів.

Слід зазначити, що вирази для визначення параметру оптимізації α_{opt} значно простіші, ніж для двохпараметричного способу екстраполяції [3]. Крім того, цей метод дозволить провести ефективний аналіз того, як ймовірності параметри завади впливають на кількісні та якісні параметри екстраполяції.

Екстраполяція випадкових процесів займає місце як в теорії випадкових процесів, так і в додатках цієї теорії до рішення практичних задач надійності, діагностування, обробки сигналів на тлі завад, контролю працездатності та прогнозування трафіку комп'ютерних мереж та інших задачах.

Окремі відомі результати по екстраполяції ВНС на тлі завад мало застосовуються на практиці через свою складність. Тому мета цієї статті – розробити метод оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завад в зручній для практичного використання формі на основі функцій Лагранжа [5].

В основу методу, що пропонується, поставлено задачу визначення оптимального вагового коефіцієнта α_{opt} за критерієм мінімуму дисперсії $minD_\varepsilon(\alpha_{opt})$ похибки оптимального прогнозного (екстрапольованого) значення випадкового нестаціонарного сигналу на тлі завад.

Постановка задачі оптимізації екстрапольованого випадкового нестаціонарного сигналу (ВНС) на тлі завад має наступний вигляд.

Введемо такі основні позначення :

$X(t)$ – випадковий нестаціонарний сигнал, значення якого прогнозуються;

$\xi(t)$ – випадкова завада, що спотворює дані спостережень;

$Y(t)$ – випадковий сигнал, реалізація якого спостерігається,

t_i, $i = 1, n$ – i-й момент спостереження,

$Y(t_i) = Y_i$ – i - e значення $Y(t)$ в момент часу спостереження t_i ,

Y_{n+1} – $Y(t_{n+1})$ – значення $Y(t)$, що прогнозується (екстраполюється),

$\Delta t = t_n - t_1$ – інтервал спостереження,

$\tau = t_{n+1} - t_n$ – інтервал екстраполяції (прогнозу),

$M[Y(t)] = m(t)$ – математичне сподівання $Y(t)$,

$D[Y(t)] = M[Y(t) - m(t)]^2$ – дисперсія $Y(t)$,

$k(t_i, t_j) = M\{[Y(t_i) - m(t_i)][Y(t_j) - m(t_j)]\}$ – кореляційна функція $Y(t)$,

$k_\xi(t_i, t_j) = M\{[\xi(t_i) - m_\xi][\xi(t_j) - m_\xi]\}$ – кореляційна функція завади $\xi(t)$,

$M[\xi(t)] = m_\xi(t)$ – математичне сподівання завади $\xi(t)$.

На рис. 1 показані всі основні характеристики і параметри екстраполяції ВНС. Неважко помітити різницю X_{n+1} від Y_{n+1} , та вплив завади $\xi(t)$ на характеристики Y_{n+1}. Для спрощення на рис.1 показано два спостереження ($n = 2$), в результаті спостереження отримують значення Y_1 , Y_2 замість істинних значень X_1 , X_2 , по яким необхідно визначити за допомогою функції Лагранжа X_3 , але насправді оптимально спрогнозувати значення Y^*_3.

Задача екстраполяції полягає в тому, щоб у найкращий спосіб по значенням Y_1 , Y_2, що екстраполюються, отримати оцінку Y^*_3 майбутнього значення Y_3. З постановки задачі зрозуміло, що найкраща екстраполяція включає не тільки прогнозування Y_3 , а й зменшення похибки спостережень

$$e = Y_3 - Y_3^* .$$

Тому критерієм оптимізації є :

$$\min_{Y_3^*} e^2 = (Y_3 - Y_3^*)^2 ; \qquad (1)$$

$$Y_{3opt}^* = arg \min_{Y_3^*} e^2 (Y_3, -Y_3^*) . \qquad (2)$$

Для коректної постановки задачі вводимо такі припущення :

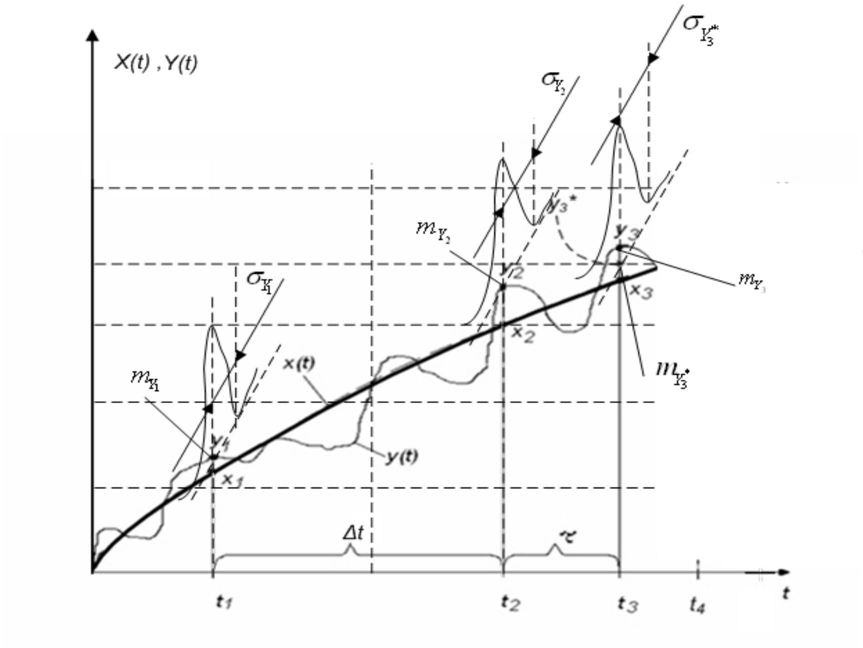

Рис. 1. Основні характеристики і параметри екстраполяції випадкового нестаціонарного процесу для методу, що базується на використанні функції Лагранжа

1. Математична модель $X(t)$ має вигляд :

$$X\,(t) = \sum_{i=0}^{q} a_i t^{g\,i} \;, \qquad (3)$$

де q = 1, детерміновані параметри задання нелінійності і нестаціонарності сигналу γ_0 , γ_1 задовольняють умовам : $0 \le \gamma_0 \le 1$, $0 \le \gamma_1 \le 2$, а коефіцієнти a_0 , a_1 являють собою випадкові незалежні величини, що мають гаусовський розподіл з такими, відповідно, математичними сподіваннями і дисперсіями :

$$M(a_0) = m_0 \;;\; D(a_0) = s_0 \;;$$

$$M(a_1) = m_1 \;;\; D(a_1) = s_1 \;; \qquad (4)$$

2. Для визначеності припускаємо, що $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \gamma$, тоді числові характеристики НВС приймають такий конкретний вигляд :

$$M[X(t)] = m_0 + m_1 (t)^g = m(t) \;; \qquad (5)$$

$$D[X(t)] = s_0^2 + s_1^2 t^{2g} = s^2(t) \;; \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} k_X(t_i,t_j) &= M\{[X(t_i) - m(t_i)][X(t_j) - m(t_j)]\} = \\ &= M\{[X(t_i)X(t_j) - X(t_j)m(t_i) - X(t_i)m(t_j) + \qquad (7) \\ &+ m(t_i)m(t_j)]\} = M[X(t_i)X(t_j)] - m(t_i)m(t_j) \,, \end{aligned}$$

де через t_i , t_j позначені i *-ий* та j *- ий* моменти спостережень.

$$\begin{aligned} & M[X(t_i)X(t_j)] = M\{[a_0 + a_1 t_j^g][a_0 + a_1 t_i^g]\} = \\ & = M[a_0^2 + a_0 a_1 t_i^g + a_0 a_1 t_j^g + a_1^2 t_i^g t_j^g] = \\ & = m_0^2 + D_0 + m_0 m_1 t_i^g + m_0 m_1 t_j^g + (m_1^2 + D_1)(t_i t_j)^g = \\ & m_0^2 + D_0 + (m_1^2 + D_1)(t_i t_j)^g + m_0 m_1 t_i^g + m_0 m_1 t_j^g \,; \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} & m(t_i)m(t_j) = (m_0 + m_1 t_i^g)(m_0 + m_1 t_j^g)(t_i t_j)^g = \\ & = m_0^2 + m_0 m_1 t_i^g + m_0 m_1 t_j^g + m_1^2 (t_i t_j)^g \,. \end{aligned} \qquad (9)$$

Підставляючи (8) та (9) в (7), отримаємо :

$$k_X(t_i,t_j) = D_0 + D_1 (t_i t_j)^g = s_0^2 + s_1^2 (t_i t_j)^g \,. \qquad (10)$$

3. Сигнал, що спостерігається, розглядається як «адитивна суміш» сигналу $Y(t)$ і завади $\xi(t)$ [6] :

$$Y(t) = X\,(t) + x\,(t)\;, \qquad (11)$$

4. Модель НВС для моменту часу t_3 має такий вигляд :

$$Y(t_3) = Y_3 = a_0 + a_1 t_3^g + x\,(t_3)\,. \qquad (12)$$

5. Оцінку Y_3^* істинного значення X_3 в момент часу t_3 розглядаємо як лінійну комбінацію (функцію) попередніх значень, що спостерігаються :

$$Y_3^* = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 \,. \qquad (13)$$

6. Вважаємо, що параметри α_1 , α_2 задовольняють вимозі нормування

$$\alpha_1+\alpha_2=1\ . \qquad (14)$$

Тоді $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$, а оцінка

$$Y_3^* = Y_2 + \alpha\,(Y_1 - Y_2)\ . \qquad (15)$$

Оцінка Y_3^* по формулі (15) має наглядне фізичне пояснення: Y_2 – опорне значення, $\alpha(Y_1 - Y_2)$ – «добавка», яка є добутком різниці $\Delta Y_{12} = Y_1 - Y_2$ значень сигналу на інтервалі спостереження та параметру екстраполяції α .

7. Припустимо, що завада $\xi(t)$ являє собою випадковий стаціонарний гаусовський сигнал з характеристиками

$$M[\xi(t)] = m_\xi = 0,$$

$$M[\xi(t_1), \xi(t_2)] = k_\xi(\Delta t)\ , \qquad (16)$$

де $k_\xi(\Delta t)$ – кореляційна функція завади, що визначається за формулою

$$k_\xi(\Delta t) = \sigma_\xi^2 r_\xi(\Delta t)\ , \qquad (17)$$

де дисперсія (потужність) завади $\sigma_\xi^2 = D[\xi(t)]$, $r_\xi(\Delta t)$ – нормована кореляційна функція завади, Δt – інтервал часу спостереження $\Delta t = t_2 - t_1$.

8. Враховуємо те, що НВС та завада є незалежними сигналами, тоді

$$M\{[X(t_i)-m(t_i)][\xi(t_j)-m_\xi]\}=0. \qquad (18)$$

Якщо характеристики НВС та завади відомі, припущення (3) – (18) виконуються, коректно ставити задачу оптимізації оцінки (13) значення $Y(t)$ в наступний момент часу t_{n+1} шляхом оптимального вибору параметру оптимізації α по відповідному критерію оптимізації.

Цільовою функцією оптимізації візьмемо функцію Лагранжа [5] :

$$L(\vec{\alpha}, \lambda) = [A_0 + A_1 t_3^\gamma + \xi(t_3) - Y_3^*(\vec{\alpha})]^2 + \lambda\Big[\sum_{k=0}^{1} \alpha_k - 1\Big]\ , \qquad (19)$$

де $L(\vec{\alpha}, \lambda)$ – функція Лагранжа;

λ – невизначений множник Лагранжа;

$\vec{\alpha}$ – α_1, α_2 – вектор параметрів оптимізації;

$A_0 = \alpha_0$, $A_1 = \alpha_1$ являють собою випадкові незалежні величини, що мають гаусовські розподіли з математичними сподіваннями і дисперсіями, що визначені в статті [3];

$$\begin{aligned} Y_3^*(\vec{\alpha}) &= \alpha_1[A_0 + A_1 t_1^\gamma + \xi(t_1)] + \\ &+\alpha_2[A_0 + A_1 t_2^\gamma + \xi(t_2)] = (\alpha_1+\alpha_2)A_0 + \\ &+(\alpha_1 t_1^\gamma + \alpha_2 t_2^\gamma)A_1 + \alpha_1 \xi(t_1) + \alpha_2 \xi(t_2)\ . \end{aligned} \qquad (20)$$

Підставимо у формулу (19) значення $Y_3^*(\vec{\alpha})$ з (20) і отримаємо повний вид функції Лагранжа :

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) &= [A_0 + A_1 t_3^\gamma + \xi(t_3) - \\ &-(\alpha_1+\alpha_2)A_0 - (\alpha_1 t_1^\gamma + \alpha_2 t_2^\gamma)A_1 - \\ &-\alpha_1 \xi(t_1) - \alpha_2 \xi(t_2)]^2 + \lambda\Big[\sum_{k=1}^{2} \alpha_k - 1\Big]\ . \end{aligned} \qquad (21)$$

Для розв'язання задачі оптимізації використаємо класичний метод знаходження мінімуму функції $L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda)$. Беремо перші похідні від функції Лагранжа (21) та прирівнюємо їх до нуля. Це є необхідною умовою екстремуму [5]:

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = 0\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} = 0\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0\ ;$$

$$\Delta L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) = 0\ , \qquad (22)$$

де $\partial L = \partial L(\alpha_1, \alpha_2, \lambda)$,

$$\vec{x}_{opt} = (\alpha_{1opt}, \alpha_{2opt}, \lambda_{opt})\ .$$

$$d\Delta L(\vec{x}_{opt}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{L(\vec{x}_{opt} + \alpha \vec{d}) - L(\vec{x}_{opt})}{\alpha}\ . \qquad (23)$$

Визначимо перші похідні від $L(\vec{x}_{opt})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\vec{x}_{opt})}{\partial \alpha_1} &= 2[A_0 + A_1 t_3^\gamma + \xi(t_3) - \\ &-(\alpha_1+\alpha_2)A_0 - (\alpha_1 t_1^\gamma + \alpha_2 t_2^\gamma)A_1 - \\ &-\alpha_1 \xi(t_1) - \alpha_2 \xi(t_2)]\cdot[-A_0 - A_1 t_1^\gamma - \\ &-\xi(t_1)] + \lambda = 0\ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\vec{x}_{opt})}{\partial \alpha_2} &= 2[A_0 + A_1 t_3^\gamma + \xi(t_3) - \\ &-(\alpha_1+\alpha_2)A_0 - (\alpha_1 t_1^\gamma + \alpha_2 t_2^\gamma)A_1 - \\ &-\alpha_1 \xi(t_1) - \alpha_2 \xi(t_2)]\cdot[-A_0 - A_1 t_2^\gamma - \\ &-\xi(t_2)] + \lambda = 0\ ; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L(\vec{x}_{opt})}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{2} \alpha_k - 1 = 0\ . \qquad (24)$$

В рівнянні (24) замінимо з умови нормування (14) $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$, тоді отримаємо :

$$\{A_0 + A_1 t_3^g + x(t_3) - a[A_0 + A_1 t_1^g] -$$
$$-(1-a)(A_0 + A_1 t_2^g) - a\,x(t_1) -$$
$$-(1-a)x(t_2)\}[A_0 + A_1 t_1^g + x(t_1)] -$$
$$- l / 2 = 0 \ ;$$

$$(Y_3 - Y_3^*)Y_1 - l / 2 = 0 \ . \qquad (25)$$

$$\{A_0 + A_1 t_3^g + x(t_3) - a[A_0 + A_1 t_1^g] -$$
$$-(1-a)(A_0 + A_1 t_2^g) - a\,x(t_1) -$$
$$-(1-a)x(t_2)\}[A_0 + A_1 t_2^g + x(t_2)] -$$
$$- l / 2 = 0 \ ;$$

$$(Y_3 - Y_3^*)Y_2 - l / 2 = 0 \ . \qquad (26)$$

В рівняннях (25), (26) замінимо Y^*_3 на $Y^*_3 = \alpha_{opt} Y_1 + (1 - \alpha_{opt})Y_2$, тоді отримаємо таку систему рівнянь :

$$\begin{cases} [Y_3 - a_{opt}Y_1 - (1-a_{opt})Y_2]Y_1 - l_{opt} / 2 = 0 \\ [Y_3 - a_{opt}Y_1 - (1-a_{opt})Y_2]Y_2 - l_{opt} / 2 = 0 \ . \end{cases} \qquad (27)$$

У системі рівнянь (27) необхідно знайти α_{opt} і λ_{opt} . В системі рівнянь (27) розкриємо квадратні дужки :

$$\begin{cases} Y_3Y_1 - a_{opt}Y_1^2 - (1-a_{opt})Y_1Y_2 = l_{opt} / 2 \\ Y_3Y_2 - a_{opt}Y_1Y_2 - (1-a_{opt})Y_2^2 = l_{opt} /2. \end{cases} \qquad (28)$$

Так як в системі рівнянь (28) праві частини рівні, то повинні бути рівними і ліві частини :

$$Y_3Y_1 - a_{opt}Y_1^2 - (1-a_{opt})Y_1Y_2 =$$
$$= Y_2Y_3 - a_{opt}Y_1Y_2 - (1-a_{opt})Y_2^2 \ ;$$

$$a_{opt}Y_1Y_2 - a_{opt}Y_1^2 + a_{opt}Y_1Y_2 - a_{opt}Y_2^2 =$$
$$= Y_2Y_3 - Y_2^2 - Y_1Y_3 + Y_1Y_2 \ . \qquad (29)$$

Помножимо ліву та праву частини рівняння (29) на (-1):

$$a_{opt}(Y_1 - Y_2)^2 = Y_2^2 - Y_1Y_2 + Y_1Y_3 - Y_2Y_3 \ ;$$

$$a_{opt} = \frac{Y_2^2 - Y_1Y_2 + Y_1Y_3 - Y_2Y_3}{(Y_1 - Y_2)^2} =$$
$$= \frac{Y_2(Y_2 - Y_1) + Y_3(Y_1 - Y_2)}{(Y_1 - Y_2)^2} =$$
$$= \frac{-Y_2(Y_1 - Y_2) + Y_3(Y_1 - Y_2)}{(Y_1 - Y_2)^2} = \qquad (30)$$
$$= \frac{Y_3 - Y_2}{Y_1 - Y_2} \ .$$

З першого рівняння системи (28) знаходимо λ_{opt} :

$$l_{opt} = [Y_3 - a_{opt}Y_1 - (1-a_{opt})Y_2]2Y_1 =$$
$$= [Y_3 - Y_2 + a_{opt}(Y_2 - Y_1)]2Y_1 \qquad (31)$$

У рівняння (31) замість α_{opt} підставляємо його значення з (30), тоді отримаємо :

$$l_{opt} = [Y_3 - Y_2 + \frac{Y_3 - Y_2}{Y_1 - Y_2}(Y_2 - Y_1)]2Y_1 = \qquad (32)$$
$$(Y_3 - Y_2 - Y_3 + Y_2)2Y_1 = 0 \ .$$

Розглянемо достатню умову екстремуму [5]. Такою умовою є те, що квадратична форма матриці других похідних $L(\overset{r}{x}_{opt}) > 0$.

$$L(\overset{r}{x}_{opt}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial a_1 \partial l} \\ \frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial a_2^2} & \frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial a_2 \partial l} \\ \frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial l \partial a_1} & \frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial l \partial a_2} & \frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial l^2} \end{vmatrix} \ . \qquad (33)$$

Розглянемо всі другі часткові похідні, які входять в (33) :

$$\frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial a_1^2} = l_{11} = [-A_0 - A_1 t_1^g - x(t_1)] \cdot$$
$$\cdot [-A_0 - A_1 t_1^g - x(t_1)] = Y_1^2 \ ;$$

$$\frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial a_1 a_2} = l_{12} = [-A_0 - A_1 t_2^g - x(t_2)] \cdot$$
$$\cdot [-A_0 - A_1 t_1^g - x(t_1)] = Y_1 Y_2 \ ;$$

$$\frac{\partial^2 L(\overset{r}{x}_{opt})}{\partial a_1 \partial l} = l_{13} = -0.5 \ ;$$

$$\frac{\partial^2 L(\vec{x}_{opt})}{\partial a_2 \partial a_1} = l_{21} = [-A_0 - A_1 t_2^g - x(t_2)] \cdot$$
$$\cdot [-A_0 - A_1 t_1^g - x(t_1)] = Y_1 Y_2 \ ;$$
$$\frac{\partial^2 L(\vec{x}_{opt})}{\partial a_2^2} = l_{22} = [-A_0 - A_1 t_2^g - x(t_2)] \cdot \tag{34}$$
$$\cdot [-A_0 - A_1 t_2^g - x(t_2)] = Y_2^2 \ ;$$
$$\frac{\partial^2 L(\vec{x}_{opt})}{\partial l \partial a_1} = l_{31} = 0 \ ;$$
$$\frac{\partial^2 L(\vec{x}_{opt})}{\partial l \partial a_2} = l_{32} = 0 \ ;$$
$$\frac{\partial^2 L(\vec{x}_{opt})}{\partial l^2} = l_{33} = 0 \ .$$

Тоді квадратична форма для матриці других часткових похідних $L(\vec{x}_{opt})$ від 3-х дійсних змінних α_1 , α_2 , λ буде мати такий вигляд :

$$\begin{aligned} x' L(\vec{x}_{opt}) x &= l_{11} a_{opt}^2 + l_{12} a_{opt}(1\text{-}a_{opt}) + \\ &+ l_{13} a_{opt} l_{opt} + l_{21} a_{opt}(1\text{-}a_{opt}) + \\ &+ l_{22}(1\text{-}a_{opt})^2 + l_{23}(1\text{-}a_{opt}) l_{opt} + \\ &+ l_{31} l\, a_{opt} + l_{32} l\,(1\text{-}a_{opt}) + l_{33} l_{opt}^2 > 0 \ . \end{aligned} \tag{35}$$

У формулі (35), замінюючи коефіцієнти l_{ik} (35) їх значеннями з (34), отримаємо :

$$\begin{aligned} x' L(\vec{x}_{opt}) x &= Y_1^2 a_{opt}^2 + Y_1 Y_2 a_{opt}\, l_{opt}\ (1 - a_{opt}) - \\ &- a_{opt}\, l_{opt} + Y_1 Y_2 a_{opt}(1 - a_{opt}) + Y_2^2 (1 - a_{opt})^2 - \\ &-(1 - a_{opt})\, l_{opt} + 0 + 0 + 0 = Y_1^2 a_{opt}^2 + \\ &+ 2 Y_1 Y_2 a_{opt}(1 - a_{opt}) + Y_2^2 (1 - a_{opt})^2 - \\ &- l_{opt} + \ l_{opt} a_{opt} > 0 \ . \end{aligned} \tag{36}$$

При оптимальному значенні параметру α_{opt} похибка екстраполяції мінімальна та приймає таке значення :

$$\begin{aligned} D_e(a_{opt})_{\min} &= M[(Y_3 - Y_3^*)^2] = \\ M[Y_3 &- a_{opt} Y_1 - (1 - a_{opt}) Y_2]^2 = \\ &= M[Y_3^2 + a_{opt}^2 Y_1^2 + (1 - a_{opt})^2 Y_2^2 - \\ &- 2 a_{opt} Y_1 Y_3 - 2(1 - a_{opt}) Y_2 Y_3 + \\ &+ 2 a_{opt}(1 - a_{opt}) Y_1 Y_2] = m_{Y_3}^2 + s_{Y_3}^2 + \\ &+ a_{opt}^2 (m_{Y_1}^2 + s_{Y_1}^2) + (1 - a_{opt})^2 \cdot \\ &\cdot (m_{Y_2}^2 + s_{Y_2}^2) - 2 a_{opt} [m_{Y_1} m_{Y_3} + k_Y(t_1, t_3)] - \\ &- 2(1 - a_{opt}) [m_{Y_2} m_{Y_3} + k_Y(t_2, t_3)] + \\ &+ 2 a_{opt}(1 - a_{opt}) [m_{Y_1} m_{Y_2} + k_Y(t_1, t_2)] \ , \end{aligned} \tag{37}$$

де

$$M[Y_i] = m_0 + m_1 t_i^g = m_{Y_i} \ ; \tag{38}$$

$$D[Y(t_i)] = s_{Y_i}^2 = s_0^2 + s_i^2 t_i^{2g} + s_x^2 = D_{Y_i} \ ; \tag{39}$$

$$M[Y_i \cdot Y_j] = r_{ij} = m_i m_j + k_Y(t_i, t_j) \ ; \tag{40}$$

$$M[Y_i^2] = m_i^2 + s_{Y_i}^2 \ ; \tag{41}$$

$$k_y(t_i, t_j) = s_0^2 + s_1^2 (t_i t_j)^g + s_x^2 r_x(t_i - t_j) \ , \tag{42}$$

де $r_x(t_i - t_j) = e^{-\frac{t_j - t_i}{\Delta t_x}}$, (43)

Δt_ξ – інтервал кореляції завади.

Дисперсію оцінки $D[Y_3^*]$ отримаємо за наступною формулою :

$$\begin{aligned} D[Y_3^*] &= D[a_{opt} Y_1 + (1 - a_{opt}) Y_2] = \\ &= D[a_{opt} Y_1] + D[(1 - a_{opt}) Y_2] + \\ &+ 2D[(a_{opt} Y_1)][(1 - a_{opt}) Y_2] = \\ &= a_{opt}^2 s_{Y_1}^2 + (1 - a_{opt})^2 s_{Y_2}^2 + \\ &+ 2 a_{opt}(1 - a_{opt}) k_Y(t_1, t_2) \ , \end{aligned} \tag{44}$$

У співвідношення (44) входить значення кореляційної функції суміші ВНС і завади яке має такий вигляд :

$$k_Y(t_i, t_j) = s_0^2 + s_1^2 (t_i t_j)^g + s_x^2 e^{-\frac{t_j - t_i}{\Delta t_x}} \ . \tag{45}$$

Ефективність двопараметричного методу оптимальної екстраполяції можна оцінювати за формулами :

h_1 – відношення сигнал/шум на виході оптимального екстраполятора:

$$h_1 = \frac{D[Y_3]}{D_e(a_{opt}, l_{opt})_{\min}} \ , \tag{46}$$

де $D[Y_3]$ – дисперсія випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3,

$D_e(a_{opt}, l_{opt})_{\min}$ – мінімальна дисперсія похибки екстраполяції.

h_2 – відношення дисперсії випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3, до дисперсії екстрапольованого значення сигналу $D[Y_3*]$

$$h_2 = \frac{D[Y_3]}{D[Y_3^*]} \quad . \tag{47}$$

h_3 – відношення різниці між дисперсією випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_3 , та дисперсією екстрапольованого сигналу $D[Y_3*]$ до мінімальної дисперсії похибки екстраполяції :

$$h_3 = \frac{D[Y_3] - D[Y_3^*]}{D_e(a_{opt}, l_{opt})_{\min}} . \tag{48}$$

Приклад. В цьому прикладі наведені результати експерименту, що був проведений методом цифрового статистичного імітаційного моделювання. Виконуємо оптимальну екстраполяцію значення Y_3^* по двом попереднім значенням Y_1, Y_2. Результати вимірювання X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 моделюємо реалізаціями випадкових величин за допомогою функції (36) системи *MathCAD* [7-9]

$$Y_i = rnorm\{n, M[Y], s\}, \quad i = 1,3 \tag{49}$$

де число n реалізацій для кожної точки вибрано $n = 1$, $M[Y_i]$ – математичне очікування ВНС, s – середньоквадратичне відхилення ВНС, що спостерігається.

Моделювання роботи способу було проведено в системі *MathCAD*. Вона дозволяє використовувати різні вхідні дані експериментів і виконувати статистичні експерименти.

В експерименті були обрані наступні початкові дані :

$$t_1 = 6\text{ с},\ t_2 = 10\text{ с},\ t_3 = 12\text{ с},$$

де t_1, t_2 – моменти часу, в які спостерігаються реалізації Y_1, Y_2 випадкового нестаціонарного сигналу (ВНС), t_3 – момент часу, для якого виконується екстраполяція; γ = 0,5 – коефіцієнт нелінійності, Δt_x = 0,25 с – інтервал кореляції завади;

$$s_x = 0{,}01\text{ В},\ m_0 = 1\text{ В},$$

$$m_1 = 0{,}02\text{ В/с},\ s_0 = 0{,}3\text{ В},$$

$$s_1 = 0{,}002\text{ В},\ s_2 = 0{,}01\text{ В}.$$

Реалізації Y_i утворюють за допомогою функції генерації випадкових чисел з гаусовським розподілом при заданих n, $M[Y_i]$, σ. В експерименті задана точність моделювання “шість знаків після коми”.

В табл. показано результати експерименту. На рис. 2 відображені графіки $X(t)$, $Y(t)$ та $Yopt(t)$, де $Yopt(t)$ відображає Y_3^* на графіку.

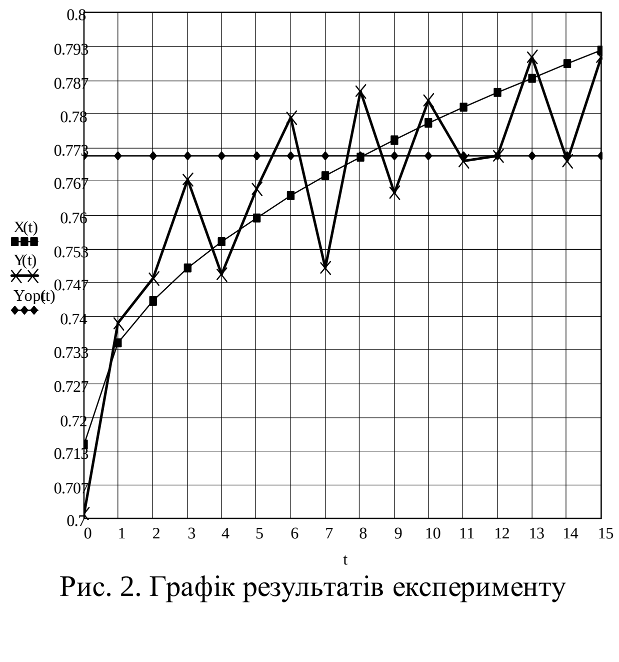

Рис. 2. Графік результатів експерименту

Таблиця. Результати експерименту

X_1	X_2	X_3
0,763763	0,778081	0,784143
Y_1	Y_2	Y_3
0,779228	0,782672	0,771722
Y_3^*	a_{1opt}	a_{2opt}
0,7716	3,17944	-2,17944
ξ_1	ξ_2	ξ_3
0,015465	0,004591	-0,012421
$D_{\varepsilon\ \min}$	$D[Y_3^*]$	h_1
0,004425	0,092122	962,125565

Висновки

Аналіз результатів експерименту показує працездатність і ефективність запропонованого методу екстраполяції навіть при низькому відношенню середньоквадратичних значень сигнал / шум.

За результатами експерименту можна зробити такі висновки:

Показник ефективності оптимальної екстраполяції h_1 (відношення сигнал/шум на виході оптимального екстраполятора) показує, що оптимальна екстраполяція забезпечує достатньо високу точність – дисперсія похибки (шумів) екстраполяції в 21 раз менше дисперсії самого ВНС.

Наведені результати експерименту наглядно ілюструють новизну, корисність та ефективність методу оптимальної екстраполяції, що пропонується в статті. Крім того, запропонований метод має зручну для практичного використання форму.

Список літератури

1. Ігнатов В.О. Метод оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / В.О. Ігнатов, О.В. Андреєв, В.І. Андрєєв // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. праць – К.: НАУ, 2010. – Вип. 2(30).-С. 79-83.

2. Пат. на корисну модель 55212 Україна, МПК(2009) G01S 7/36, G06C 17/00. Спосіб оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / Ігнатов В. О., Андреєв О.В., Гузій М.М., Андрєєв В. І. заявник та патентовласник Національний авіаційний університет - №u201006043 заявл. 19.05.2010, опубл. 10.12.2010, Бюл. №23.-16с.

3. Ігнатов В.О. Метод двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / В.О. Ігнатов, О.В. Андреєв, В.І. Андрєєв // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. праць – К.: НАУ, 2010. – Вип. 4(32).-С.41-46.

4. Пат. на корисну модель 62878 Україна, МПК(2011.01) G06C 3/00, G01S 17/00 Спосіб двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад / В.О. Ігнатов, І.А.Жуков, О.В. Андреєв, В.І. Андрєєв. Заявник та патентовласник Національний авіаційний університет - №u201014719 заявл. 08.12.2010; опубл. 26.09.2011, Бюл. №18 .-16с.

5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн // М.: Наука, 1968. – 720 с.

6. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. / В.А. Игнатов // Учебник для вузов. 2-ое изд. Перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1990. – 280 с.

7. Дьяконов В.П. Энциклопедия *MathCAD* 2001 и *MathCAD* 11 / В.П. Дьяконов // М.: Изд. Солон-пресс. – 2004. – 832 с.

8. Королюк В.С. Справочник по теории вероятности и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Петренко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1985. – 640 с.

9. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель // Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 2006. – 576 с.

Статтю подано до редакції 29.02.2016