УДК 629.735.051:681.513.5(045)

Єрмолаєва О.В.,
Сив'юк Д.В.,
Пікалюк Р.В.

СИНТЕЗ ВІНЕРОВСЬКО-ДЕВІСОВСЬКОГО ФІЛЬТРУ

Національний авіаційний університет

roma-1994@ukr.net
syvyuk@ukr.net
olgermol@yandex.ru

Запропоновано алгоритм та результати процедури синтезу Вінеровсько–Девісовського фільтру, який дозволяє знаходити оптимальні структури для широкого класу лінійних систем На аналітичному прикладі досліджено ефективність запропонованого алгоритму синтезу

Ключові слова: Вінерівсько-Девісовський фільтр; алгоритм; показник якості; спектральна щільність; функціонал якості; синтез; передаточна функція

Вступ

Розвиток сучасної авіакосмічної техніки характеризується постійним та різким зростанням вимог до якості (точності) її функціонування в штатних експлуатаційних тривалих режимах роботи. На точність вимірювань суттєво впливають, по-перше, стохастичний характер ряду недостатньо відомих розробникам збурюючих факторів, які діють в реальних експлуатаційних режимах функціонування, по-друге, різні недосконалості конструкцій самих пристроїв, якщо вони створювалися без відповідного урахування характеру перетворення вхідних стохастичних факторів в пристроях, що виникають при конкретному русі їх основи. Існують й інші фактори негативного впливу на якість вимірювань. Очевидно, що перераховані фактори не можуть в визначальній мірі не позначатися на характері та якості первісних процесів перетворення вхідної інформації конкретними пристроями.

Для утримання показника якості [4] в найкращих значеннях та виключення поступових відмов пристроїв необхідно реалізовувати оптимальні структури систем їх стабілізації або корекції, наприклад, фільтрів-спостерігачів. Сучасні методи багатомірної оптимальної фільтрації дають можливість знаходити найкращі за точністю структури обчислювачів для вирішення різних задач вимірювань, в яких отримана стохастична інформація використовується не тільки для формування у подальшому законів управління, а й для безпосереднього її відображення, контролю та відновлення якості управління об'єктом.

Постановка і вирішення задачі

Нехай досліджувана розімкнена система управління рухомим об'єктом ілюструється структурною схемою, яка зображена на рис. 1

Як вектор програмних сигналів розглядається n-вимірний вектор **r**, який вимірюється блоком з матрицею передаточних функцій **К**, а вимірювання супроводжуються завадою (m-вимірний вектор j). Для забезпечення найбільшої близькості **n**-вимірного вектора x системи до бажаного **n**-вимірного сигналу **i=Фr** у тракті управління передбачується регулятор, матриця передаточних функцій **G** якого синтезується оптимальним чином. Міра близькості векторів **x** та **і** описується за допомогою випадкової помилки системи $e = x - i$.

Матриця **Ф** розміру *n* x *n* характеризує бажане перетворення системою вектора програмних сигналів **r**. Вектор впливу **r**, j суть центрований випадковий багатовимірний процес з відомими матрицями спектральних та взаємних спектральних щільностей $S'_{rr}, S'_{jj}, S'_{rj}, S'_{jr}$.

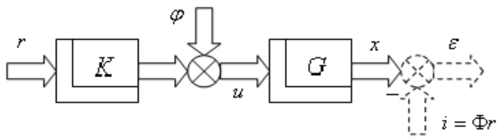


Рис. 6 Структурна схема незамкненої системи, що синтезується

Запишемо функціонал якості системи:

$$e_1 = \frac{1}{\mathrm{j}} \int_{-j\infty}^{+j\infty} tr(S'_{ee} R + \Lambda S'_{re} + S'_{er}\Lambda) dy, \qquad (1)$$

де функція S'_{ee} - матриця спектральної щільності вектора помилки e , **tr** – слід матриці, **R** – вагова матриця.

Із структурної схеми (рис. 1) видно, що для вирішення поставленої задачі синтезу спочатку необхідно записати вирази для векторів вихідних сигналів x і сигналів помилки системи e :

$$x = Gu = G(Kr + j);, \qquad (2)$$

$$\varepsilon = x - i = G(Kr + \varphi) - \Phi r = (GK - \Phi)r + G\varphi \qquad (3)$$

За допомогою теореми Вінера-Хінчіна при врахуванні виразів (2) і (3) й умов некорельованості векторів r і j запишемо транспоновані матриці спектральної щільності S'_{ee} та взаємних спектральних щільностей між програмним сигналом та помилкою $S'_{r\varepsilon}$, $S'_{\varepsilon r}$:

$$\begin{aligned} &S'_{\varepsilon\varepsilon} = <\varepsilon\varepsilon_*> = <[(GK - \Phi)r + G\varphi]\cdot \\ &[r_*(K_*G_* - \Phi_*) + \varphi_* G_*]> = \\ &= (GK - \Phi)S'_{rr}(K_*G_* - \Phi_*) + \\ &+ (GK - \Phi)S'_{\varphi r}G_* + GS'_{r\varphi}(K_*G_* - \Phi_*) + \\ &+ GS'_{\varphi\varphi}G_* \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} &S'_{r\varepsilon} = <\varepsilon r_*> = <[(GK - \Phi)r + G\varphi]r_*> = \\ &= (GK - \Phi)S'_{rr} + GS'_{r\varphi} \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} &S'_{\varepsilon r} = S'_{rr}(K_*G_* - \Phi_*) + (K_*G_* - \Phi_*) + \\ &+ S'_{\varphi r}G_* \end{aligned} \qquad (6)$$

Першу варіацію функціонала запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \delta e_1 = \frac{1}{j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} & tr\{[RG(KS'_{rr}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{r\varphi}K_* + S'_{\varphi\varphi}) - \\ & - R(\Phi - R^{-1}\Lambda)(S'_{rr}K_* + S'_{\varphi r})]\delta G_* + \\ & + \delta G[(KS'_{rr}K_* + S'_{r\varphi}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{\varphi\varphi})RG_* - \\ & - (KS'_{rr} + S'_{r\varphi})(\Phi - \Lambda R^{-1})R]\}ds \end{aligned} \qquad (7)$$

Тут треба ввести наступні позначення:

$$\begin{aligned} &\Gamma_*\Gamma = R; \\ &DD_* = KS'_{rr}K_* + KS'_{\varphi r} + S'_{r\varphi}K_* + S'_{\varphi\varphi}, \end{aligned} \qquad (8)$$

де матриця Г і D – результат вінеровської факторизації виразів R і DD_*, відповідно

$$\begin{aligned} &T = T_0 + T_+ + T_- = \\ &= \Gamma(\Phi - R^{-1}\Lambda)(S'_{rr}K_* + S'_{\varphi r})D_*^{-1}; \end{aligned} \qquad (9)$$

де T_0 – матриця тільки з поліномів або чисел, T_+ – матриця, усі елементи якої є правильні дроби з полюсами тільки в ЛПП комплексної змінної s, T_- – матриця, усі елементи якої є правильні дроби з полюсами тільки в ППП (вінеровська операція сепарації), $T_0 + T_+$ - результат вінеровської операції сепарації матриці (9), запишемо умову, при виконанні якої варіація (7) тотожно дорівнює нулю, як

$$G_0 = T_0 + T_+ \qquad (10)$$

або $G = \Gamma^{-1}(T_0 + T_+)D^{-1}$

Підставивши умову (10) в функціонал, отримаємо його мінімальне значення

$$\delta e_1 = \frac{1}{j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \begin{aligned} & tr\{\Gamma_*[\Gamma GD + T]D_*\delta G_* + \\ & + \delta GD[D_*G_*\Gamma_* + T_*]\Gamma\}ds \end{aligned} \qquad (11)$$

Результати вирішення аналітичного прикладу процедури синтезу та дослідження його ефективності

Вхідні дані:

Передаточна функція вимірювача

$$K(s) = \frac{k}{Ts + 1} \qquad (12)$$

Спектральна щільність програмного сигналу

$$S'_{rr}=\frac{s_r^{\,2}}{p}\frac{1}{\left|ts+1\right|^2} \qquad (13)$$

Спектральна щільність завади

$$S'_{jj}=\frac{s_j^{\,2}}{p}\frac{1}{\left|t_1 s+1\right|^2} \qquad (14)$$

Взаємна спектральна щільність завада-програмний сигнал

$$S'_{\varphi r}=\mu\frac{\sigma_r\sigma_\varphi}{\pi}\frac{1}{(\tau s+1)(-\tau_1 s+1)} \qquad (15)$$

Взаємна спектральна щільність програмний сигнал-завада

$$S'_{rj}=m\frac{s_r s_j}{p}\frac{1}{(-ts+1)(t_1 s+1)} \qquad (16)$$

Бажане перетворення вхідних сигналів:

$\mathit{\Phi}=1{,}0$

Ваговий коефіцієнт

$R=1{,}0$, $R^{-1}\Lambda=z^{\,2}$

Підставивши необхідні дані з виразів (12-16) в формули (8), отримаємо

$$\mathit{\Gamma}_*\mathit{\Gamma}=1{,}0\,;\ \mathit{\Gamma}=\mathit{\Gamma}_*=1{,}0 \qquad (17)$$

Виконаємо факторизацію DD_*

$$\begin{aligned}DD_*=&\frac{k}{Ts+1}\frac{\sigma_r^2}{\pi}\cdot\frac{1}{\left|\tau s+1\right|^2}\frac{k}{-Ts+1}+\\&+\frac{k}{Ts+1}\mu\frac{\sigma_r\sigma_\varphi}{\pi}\cdot\frac{1}{(\tau s+1)(-\tau_1 s+1)}+\\&+\mu\frac{\sigma_r\sigma_\varphi}{\pi}\cdot\frac{1}{(-\tau s+1)(\tau_1 s+1)}\frac{k}{-Ts+1}+\\&+\frac{\sigma_\varphi^2}{\pi}\cdot\frac{1}{\left|\tau_1 s+1\right|^2}\end{aligned} \qquad (18)$$

Зробимо заміну(18):

$$\begin{aligned}&\gamma^2T^2\tau^2s^4-(k^2\tau_1^2+2\mu\gamma kT\tau_1+2\mu\gamma k\tau\\&-2\mu\gamma kT\tau+\gamma^2\tau^2+\gamma^2T^2)s^2+\\&+(\gamma^2+2\mu\gamma k+k^2)=\\&=A_4s^4-A_2s^2+A_0=\left|a_2s^2+a_1s+a_0\right.\\&=(a_2s^2+a_1s+a_0)(a_2s^2-a_1s+a_0)=\\&=a_2^2s^4-(a_1^2-2a_0a_2)s+a_0^2\end{aligned}$$

$$DD_*=\frac{s_r^{\,2}}{p}\left|\frac{a_2s^2+a_1s+a_0}{(ts+1)(t_1s+1)(Ts+1)}\right|^2 \qquad (19)$$

Знайдемо чому дорівнює a з виразу (19)

$$a_2=\sqrt{A_4}=\sqrt{\gamma^2T^2\tau^2}$$

$$\begin{aligned}&a_0=\sqrt{k^2+2k\mu\gamma+\gamma^2}\\&2a_2a_0-a_1^2=2\mu k\gamma(T\tau-\tau_1(T+\tau))-\\&-k^2\tau_1^2-\gamma^2T^2-\gamma^2\tau^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\gamma T\tau\sqrt{k^2+2k\mu\gamma+\gamma^2}-a_1^2=\\&=2\mu k\gamma(T\tau-\tau_1(T+\tau))-k^2\tau_1^2-\gamma^2T^2-\gamma^2\tau^2\\&a_1=\sqrt{A_2+2a_0a_2}=\\&=\sqrt{\begin{aligned}&k^2\tau_1^2+2\mu\gamma kT\tau_1+2\mu\gamma k\tau\tau_1-\\&-2\mu\lambda kT\tau+\gamma^2\tau^2+\gamma^2T^2+2\sqrt{(\gamma^2)}\end{aligned}}\end{aligned}$$

Підставивши необхідні дані з виразів (12–16), (17), (19) у вираз (9), отримаємо таке

$$\begin{aligned}&T=\mathit{\Gamma}(\mathit{\Phi}-R\Lambda^{-1})(S'_{rr}K_*+S'_{\varphi r})D_*^{-1}=\\&=\zeta^2\left(\frac{\sigma_r^2}{\pi}\frac{1}{\left|\tau s+1\right|^2}\frac{K}{(-Ts+1)}+\frac{\mu\varphi\sigma_r\sigma_\varphi}{\pi}\frac{1}{(-\tau_1s+1)(\tau s+1)}\right)\times\\&\times\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_r}\frac{(-Ts+1)(-\tau s+1)(-\tau_1s+1)}{a_2s^2-a_1s+a_0}=\zeta^2\frac{\sigma_r}{\sqrt{\pi}}\cdot\\&\cdot\left(\frac{(Aa_2+B\tau)s^2-(-B-C\tau+Aa_1)s+Aa_0+C}{(\tau s+1)(a_2s^2-a_1s+a_0)}\right)\end{aligned} \qquad (20)$$

Визначаємо чому дорівнює A в виразі (20)

$$\begin{cases}Aa_0+C=K+mg\\Aa_1-B-Ct=Kt_1+mg\,(t+T)\\Aa_2+Bt=mg\,Tt\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&C=K+\mu\gamma-Aa_0\\&B=Aa_1-(K\tau_1+\mu\gamma(\tau+T))-\\&-\tau(K+\mu\gamma-Aa_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Aa_2+\tau Aa_1-\tau(K\tau_1+\mu\gamma(\tau+T))-\\&-\tau^2(K+\mu\gamma-Aa_0)=\mu\gamma T\tau\end{aligned}$$

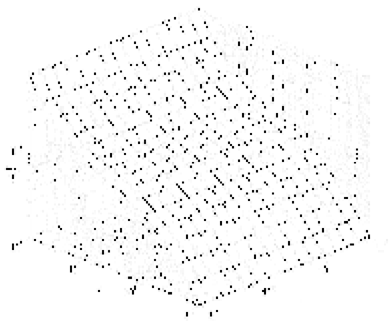
$$A(a_2 + \tau a_1 + \tau^2 a_0) =$$
$$= \mu\gamma T\tau + \tau(K\tau_1 + \mu\gamma(\tau + T)) +$$
$$+ \tau^2 K + \tau^2\mu\gamma$$

$$A = \frac{\tau(\mu\gamma T + (K\tau_1 + \mu\gamma(\tau + T)) + \tau K + \tau\mu\gamma)}{a_2 + \tau a_1 + \tau^2 a_0}$$

Підставивши необхідні дані з виразів (19) та (20) у формулу (10), визначимо оптимальну структуру фільтра G

$$G = \Gamma(T_0 + T_+)D^{-1} = = \zeta^2 \frac{A(Ts + 1)(\tau_1 s + 1)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (21)$$

Графічна залежність зміни показників якості неоптимальної і оптимальної системи



а)

б)

Рис. 2. Залежність відносної дисперсії помилки від експлуатаційних параметрів: а) без фільтра, б) з фільтром

Важливим критерієм ефективності виконаного синтезу є дослідження зміни помилки оптимальної і неоптимальної систем з перебігом часу під час наростання параметра g (шум/сигнал).

Проведемо розрахунок значень помилок системи в залежності від зміни параметру g (таблиця 1).

Таблиця 1.

γ	*e*, без фільтра	*e*, з фільтром
10^{-2}	1,3988	0.0175
10^{-1}	1,3986	0.0172
10^{0}	1,3970	0.0147
10^{1}	1,3824	0,0053

Проаналізувавши рис.2 відзначимо, що якість системи покращилась на 2 порядки.

Висновки

Проведений над системою синтез оптимальної структури, показав доцільність уведення в контур досліджуваної системи фільтра. Розглядаючи результати аналізу якості та стійкості математичної моделі системи з оптимальною структурою.

Розроблена в ході роботи “гнучка” комп‘ютерна модель синтезу фільтрів дозволяє знаходити оптимальні структури для широкого класу лінійних систем.

Список літератури

1. Блохін Л. М. Нові ідеї щодо вінеровської оптимальної фільтрації, які суттєво підвищують її ефективність / Л.М. Блохін // Матеріали IV МНК “Авіа – 2002”. – 2002. – Т 2, – С. 23.5 – 23.9.

2. Блохин Л. Н. Активизированная оптимальная фильтрация в задачах высокоточного управления и биомедицинской діагностики / Л.Н. Блохин // Кибернетика и вычислительная техника. – 2001. – № 130, – С. 39-48.

3. Блохин Л.Н. Модернизированная многомерная винеровская фильтрация / Л.Н. Блохин // Кибернетика и вычислительная техника. – 2002. – № 136. – С. 77-78.

4. Блохін Л.М. Статистична динаміка систем управління: підруч. / Л.Н. Блохин, М.Ю. Буриченко. – К.: НАУ, 2003. – 208 с.

Статтю подано до редакції 14.07.2015