

**Чалий О.В.,**

orcid.org/0009-0003-5429-8869,

e-mail: 7769225@stud.nau.edu.ua,

**Сірий Д.Т.,**

orcid.org/0009-0005-6262-6257,

e-mail: dmytro.siryi@npp.nau.edu.ua

## ДОСЛІДЖЕННЯ ЧУТЛИВОСТІ ДАТЧИКА КООРДИНАТНО-ВИМІРЮВАЛЬНОЇ МАШИНИ

Національний авіаційний університет

### **Вступ**

Координатно-вимірювальні машини (КВМ) є важливими інструментами в сучасній промисловості для забезпечення високоточного вимірювання геометричних параметрів об'єктів. Висока точність таких вимірювань є необхідною умовою для гарантування якості продукції в таких галузях, як автомобілебудування, авіаційна техніка, енергетика, медична інженерія тощо. Однак чутливість датчика КВМ до різних зовнішніх факторів, зокрема температурних коливань та вібрацій, може суттєво впливати на точність отриманих результатів. Навіть незначні зміни умов довкілля можуть призвести до виникнення систематичних та випадкових похибок, які спотворюють дані вимірювань.

Дослідження та аналіз чутливості датчика КВМ є важливим кроком для підвищення надійності вимірювань і зниження впливу зовнішніх факторів. У науковій літературі висвітлюється ряд методів компенсації похибок, однак проблема комплексного врахування впливу різних факторів залишається актуальною. Ця стаття спрямована на дослідження чутливості датчика КВМ, аналіз джерел похибок та розробку математичних моделей для мінімізації їхнього впливу на результати вимірювань.

### **Мета**

Метою цієї статті є дослідження чутливості датчика КВМ до зовнішніх чинників, таких як температурні зміни та вібрації, а також розробка математичних моделей для оцінки та мінімізації впливу цих факторів на результати вимірювань. Дослідження має на меті підвищити точність

вимірювань, забезпечуючи автоматичну компенсацію систематичних і випадкових похибок, які виникають під час роботи КВМ в різних умовах.

### **Основна частина**

У ряді наукових праць розглядаються різні аспекти точності і чутливості вимірювальних систем, включаючи дослідження джерел похибок КВМ. Наприклад, у роботах [1, 2] представлено моделі систематичних похибок, що виникають через геометричні та теплові фактори. Також у роботі [3] запропоновано методи компенсації вібраційних впливів на чутливість КВМ. Проте залишаються невирішеними питання, пов'язані з моделями взаємодії різних факторів, що впливають на датчики, а також необхідність детального дослідження впливу випадкових похибок на чутливість вимірювань.

**Математичне моделювання чутливості.** Для оцінки впливу зовнішніх факторів на датчик КВМ необхідно моделювати ці впливи, враховуючи особливості функціонування датчика в тривимірному просторі [4-6]. Систематичні похибки, такі як температурні зміщення або вібрації, можуть значно вплинути на точність вимірювань, тому необхідно розробити моделі, що дозволяють ці похибки оцінити та компенсувати [7].

**Температурна похибка.** Температурні зміни впливають на чутливість датчика через явище теплового розширення матеріалів, з яких виготовлені компоненти датчика [8]. Для опису цього впливу використовується модель температурного розширення:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T, \quad (24)$$

де,  $\Delta L$  – зміна довжини компонента через температурний вплив;  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу;  $L$  – початкова довжина компонента;  $\Delta T$  – зміна температури.

Зміна температури призводить до зміщення координат датчика, що, в свою чергу, викликає похибки у вимірюваннях. Для компенсації цих змін використовується алгоритм корекції на основі вимірних температурних значень. Похибка, яка виникає через температурні зміщення, можна представити як функцію від часу:

$$\Delta X_{temp}(t) = \alpha_X X_0 \Delta T(t), \quad (25)$$

де,  $\Delta X_{temp}(t)$  – температурна похибка по осі  $X$ ,  $\alpha_X$  – коефіцієнт розширення по осі  $X$ ,  $X_0$  – початкова координата,  $\Delta T(t)$  – зміна температури з часом.

Для наочності, графік температурної залежності зміщення датчика показано на рис. 1.

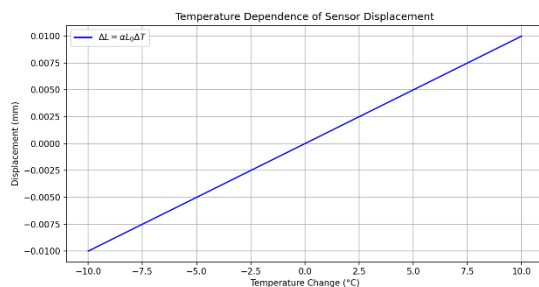


Рис. 1. Графік температурної залежності зміщення датчика

На рисунку представлено графічну залежність зміщення датчика координатно-вимірювальної машини від температурних змін. Графік демонструє нелінійний характер залежності, де по осі абсцис відкладено температуру в градусах Цельсія ( $^{\circ}\text{C}$ ) в діапазоні від  $18^{\circ}\text{C}$  до  $25^{\circ}\text{C}$ , а по осі ординат – величину зміщення датчика в мікрометрах (мкм). Крива має характерний експоненціальний тренд, що відображає зростання величини зміщення при підвищенні температури.

**Вплив вібрацій.** Вібраційні збурення також значно впливають на чутливість датчика КВМ [9]. Вібрації

викликають випадкові коливання, які можуть моделюватися як гармонічні коливання. Це можна виразити такою моделлю:

$$X(t) = X_0 + A \sin(\omega t + \phi), \quad (26)$$

де,  $X(t)$  – зміщення координати у момент часу  $t$ ;  $X_0$  – початкова координата;  $A$  – амплітуда вібрації;  $\omega$  – частота вібрації;  $\phi$  – початкова фаза коливання.

Вібрації викликають коливальні зміщення, які потрібно фільтрувати, щоб не допускати внесення похибок у вимірювання. Для цього використовуються спеціальні алгоритми фільтрації сигналів, такі як фільтри низьких частот або адаптивні фільтри, що дозволяють зменшити вплив високочастотних коливань на кінцевий результат вимірювань.

На рис. 2 представлено графік впливу вібрацій на чутливість датчика, що показує залежність зміщення від частоти вібрацій.

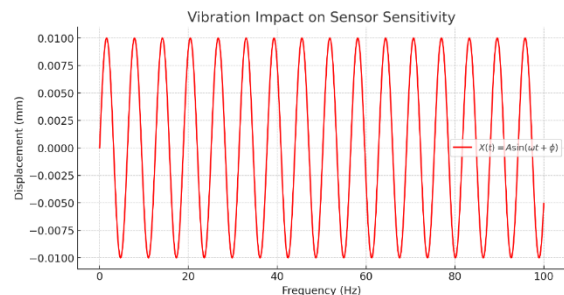


Рис. 2. Графік впливу вібрацій на чутливість датчика, що показує залежність зміщення від частоти вібрацій.

На рисунку представлено графік залежності зміщення датчика координатно-вимірювальної машини від частоти вібрацій. По осі абсцис відкладено частоту вібрацій в герцах (Гц) в діапазоні від 0 до 100 Гц, по осі ординат – амплітуду зміщення датчика в мікрометрах (мкм).

Графік дозволяє визначити оптимальні режими роботи КВМ та встановити необхідні параметри віброізоляції для забезпечення точності вимірювань. Особливу увагу слід приділяти уникненню роботи в діапазоні резонансних частот.

**Модель датчика в 3D-просторі.** Для повного опису роботи датчика в тривимірному просторі необхідно

враховувати зміщення по всіх трьох координатах:  $X$ ,  $Y$  та  $Z$ . Загальна модель вимірювання в тривимірному просторі виглядає наступним чином:

$$R(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_{\text{сист}}(t) + \Delta X_{\text{вин}}(t) \\ \Delta Y_{\text{сист}}(t) + \Delta Y_{\text{вин}}(t) \\ \Delta Z_{\text{сист}}(t) + \Delta Z_{\text{вин}}(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

де,  $R(t)=[X(t),Y(t),Z(t)]^T$  – поточна позиція датчика у просторі;  $[X_0,Y_0,Z_0]^T$  – початкова (еталонна) позиція;  $\Delta X_{\text{сист}}(t)$ ,  $\Delta Y_{\text{сист}}(t)$ ,  $\Delta Z_{\text{сист}}(t)$  – систематичні зміщення через вплив зовнішніх факторів (температурні зміни, вібрації);  $\Delta X_{\text{вин}}(t)$ ,  $\Delta Y_{\text{вин}}(t)$ ,  $\Delta Z_{\text{вин}}(t)$  – випадкові похибки.

Систематичні похибки включають зміщення через температурні зміни та вібрації. Наприклад, для осі  $X$ :

$$\Delta X_{\text{сист}}(t) = \alpha_X X_0 \Delta T(t) + A_X \sin(\omega_X t + \phi_X) \quad (28)$$

Подібні рівняння можна використовувати для осей  $Y$  та  $Z$ , враховуючи їхні специфічні коефіцієнти температурного розширення та амплітуди вібрацій. Це дозволяє описати роботу датчика в умовах зовнішніх впливів і застосувати методи для компенсації цих похибок.

**Комплексна модель похибок.** Загальна модель, що враховує одночасний вплив температурних змін і вібрацій на датчик, виглядає як суперпозиція похибок:

$$\Delta R(t) = \Delta R_{\text{тем}}(t) + \Delta R_{\text{вибр}}(t), \quad (29)$$

де,  $\Delta R_{\text{тем}}(t)$  – зміщення через температурні зміни;  $\Delta R_{\text{вибр}}(t)$  – зміщення через вібрації.

Для точнішого моделювання похибок датчика в тривимірному просторі необхідно враховувати не лише лінійні зміщення, а й можливі ротаційні похибки, а також їхню динамічну зміну. Тривимірну модель датчика можна описати за допомогою векторів положення та орієнтації.

Координати датчика у просторі описуються вектором положення:

$$R(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Однак, для врахування повної динаміки системи, включаючи обертання датчика, можна використати матрицю обертання  $R_\theta$ :

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (31)$$

де  $\theta$  – кут обертання навколо осі  $Z$ .

Загальна модель вимірювання з урахуванням обертання буде мати вигляд:

$$P(t) = R_\theta \cdot R(t), \quad (32)$$

де,  $P(t)$  – фактична позиція датчика після врахування обертання.

**Оцінка систематичних похибок.** Систематичні похибки можуть виникати через вплив температури, вібрацій або інших зовнішніх факторів. Загальний вплив можна моделювати як функцію часу та простору.

Похибка по осі  $X$ , наприклад, з урахуванням впливу температури і вібрацій може бути представлена через часткові похідні, що враховують часову і просторову залежність:

$$\Delta X(t, T, \omega) = \frac{\partial X}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial X}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial X}{\partial \omega} \Delta \omega \quad (33)$$

де,  $\frac{\partial X}{\partial t}$  – швидкість зміни положення по

часу;  $\frac{\partial X}{\partial T}$  – чутливість до температурних

змін;  $\frac{\partial X}{\partial \omega}$  – чутливість до вібрацій.

Подібні рівняння можна написати для осей  $Y$  і  $Z$ , що дозволяє повністю врахувати динаміку системи.

**Інтегральне моделювання похибок.** Для більш точного урахування похибок протягом певного періоду часу можна застосувати інтегральний підхід. Наприклад, для оцінки накопиченої похибки за

період роботи датчика через зміну температури використовуємо:

$$\Delta X_{\text{нак}} = \int_{t_0}^t \frac{\partial X}{\partial T} \Delta T(t') dt', \quad (34)$$

де,  $\Delta X_{\text{нак}}$  – накопичена похибка по осі,  $\Delta T(t')$  – зміна температури в момент часу  $t'$ .

Подібний інтеграл можна застосувати для опису впливу вібрацій або інших динамічних факторів.

**Модель компенсації похибок.** Окрім моделей оцінки похибок, важливо також реалізувати механізми їхньої компенсації. Для цього використовують різні алгоритми, такі як зворотний вплив, який математично описується за допомогою оберненої функції до отриманої похибки.

Компенсація похибки по температурі:

$$X_{\text{кор}}(t) = X(t) - \alpha_X X_0 \Delta T(t). \quad (35)$$

Компенсація впливу вібрацій:

$$X_{\text{кор}}(t) = X(t) - A \sin(\omega t + \phi), \quad (36)$$

де,  $X_{\text{кор}}(t)$  – скоригована координата після врахування похибок.

**Оцінка випадкових похибок.** Окрім систематичних похибок, датчик також схильний до випадкових похибок, що можна описати за допомогою стохастичних моделей. Наприклад, випадкові похибки можна моделювати як гауссовий білий шум:

$$\Delta X_{\text{вин}}(t) = N(0, \sigma_X^2), \quad (37)$$

де,  $N(0, \sigma_X^2)$  – нормальний розподіл із середнім 0 та дисперсією  $\sigma_X^2$ .

Сумарна модель похибки для датчика тоді виглядає як суперпозиція систематичних і випадкових компонентів:

$$\Delta X_{\text{заг}}(t) = \Delta X_{\text{сист}}(t) + \Delta X_{\text{вин}}(t), \quad (38)$$

де,  $\Delta X_{\text{сист}}(t)$  – систематична похибка,  $\Delta X_{\text{вин}}(t)$  – випадкова похибка.

**Оптимізація моделей компенсації похибок.** Для підвищення ефективності компенсації похибок можна використовувати методи мінімізації

середньоквадратичної похибки. Формула для середньоквадратичної похибки виглядає так:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{\text{кор}}(t_i) - X_{\text{еталон}}(t_i))^2 \quad (39)$$

де,  $X_{\text{кор}}(t_i)$  – скориговане значення координати в момент часу  $t_i$ ;  $X_{\text{еталон}}(t_i)$  – еталонне (очікуване) значення координати.

Мінімізація цієї функції дозволяє підібрати оптимальні параметри для компенсаційних моделей, такі як коефіцієнти температурної корекції  $\alpha_X$  або амплітуди вібраційних корекцій.

### Висновок

У роботі було проведено комплексне дослідження чутливості датчика КВМ до зовнішніх факторів впливу.

Встановлено, що температурні коливання призводять до систематичних похибок вимірювання, які можна описати моделлю теплового розширення. Запропоновано математичну модель температурної компенсації, яка враховує коефіцієнти лінійного розширення матеріалів та дозволяє мінімізувати вплив температурних змін на точність вимірювань. Досліджено вплив вібраційних збурень на чутливість датчика КВМ. Розроблено модель, що описує вібраційні коливання як гармонічні процеси, та запропоновано методи їх фільтрації для підвищення точності вимірювань.

Розроблені математичні моделі та методи компенсації похибок можуть бути використані для підвищення точності вимірювань КВМ, автоматичної корекції систематичних похибок, зменшення впливу випадкових похибок на результати вимірювань. Отримані результати мають практичне значення для підвищення точності координатних вимірювань у промисловості, зокрема в галузях авіаційної техніки.

### Література

1. Петренко А. В., Іванов С. М. Методи підвищення точності координатно-вимірювальних машин. *Вісник НТУУ "КПІ". Серія Приладобудування*. 2023. Вип. 65. С. 45–52.

2. Сидоренко О. П. Температурні деформації в координатно-вимірjuвальних системах: монографія. Київ : Технічна думка, 2023. 256 с.

3. Коваленко М. Ю., Антонюк В. С. Аналіз впливу вібрацій на точність вимірювань КВМ. *Метрологія та прилади*. 2022. №3. С. 28–35.

4. Мельник В. М., Гриценко І. В. Математичне моделювання похибок вимірjuвальних систем. Харків : НТУ "ХПІ", 2023. 180 с.

5. Захаров В. К. Дослідження чутливості вимірjuвальних приладів: навч. посібник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2022. 224 с.

6. Андрієнко Р. А., Борисенко Є. О. Компенсація систематичних похибок у

координатно-вимірjuвальних системах. *Вимірjuвальна техніка та метрологія*. 2023. Т. 84, № 2. С. 15–22.

7. Семенченко П. В. Методи калібрування координатно-вимірjuвальних машин: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.11.01. Київ, 2023. 20 с.

8. Ткаченко С. М., Лисенко Ю. В. Температурні впливи на метрологічні характеристики вимірjuвальних систем. *Український метрологічний журнал*. 2022. №4. С. 42–48.

9. Давиденко О. П., Клименко Т. В. Вібраційний аналіз координатно-вимірjuвальних систем. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2023. Вип. 2(68). С. 89–95.

**Чалий О.В., Сірий Д.Т.**

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ЧУТЛИВОСТІ ДАТЧИКА КООРДИНАТНО-ВИМІРЮВАЛЬНОЇ МАШИНИ**

*У статті досліджено чутливість датчика координатно-вимірjuвальної машини до зовнішніх факторів впливу. Розроблено математичні моделі для оцінки та компенсації систематичних і випадкових похибок, що виникають внаслідок температурних змін та вібрацій. Представлено комплексну модель, яка описує поведінку датчика в тривимірному просторі з урахуванням ротаційних похибок. Запропоновано методи оптимізації компенсації похибок на основі мінімізації середньоквадратичної похибки. Отримані результати мають практичне значення для підвищення точності координатних вимірювань у різних галузях промисловості.*

**Ключові слова:** координатно-вимірjuвальна машина; датчик; чутливість; температурна похибка; вібрації; математичне моделювання; компенсація похибок; систематичні похибки; випадкові похибки; оптимізація вимірювань.

**Chalyi O.V., Siryi D.T.**

## **INCREASING THE SENSITIVITY OF THE SENSOR OF THE COORDINATE MACHINE**

*The article investigates the sensitivity of the coordinate measuring machine sensor to external factors. Mathematical models have been developed for the evaluation and compensation of systematic and random errors arising from temperature changes and vibrations. A comprehensive model describing the sensor behavior in three-dimensional space, taking into account rotational errors, is presented. Methods for optimizing error compensation based on minimizing the root mean square error are proposed. The obtained results have practical significance for improving the accuracy of coordinate measurements in various industries.*

**Keywords:** coordinate measuring machine; sensor; sensitivity; temperature error; vibrations; mathematical modeling; error compensation; systematic errors; random errors; measurement optimization.