УДК 517.9:681.5.013:629.735.45-519 (045)

Савицкая И. В., Бельская А. А., Мазуркевич В. Б.
Национальный авиационный университет, Киев

ЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗОЛИРОВАННОГО ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПАРЫ ДИСТАНЦИОННО ПИЛОТИРУЕМЫХ ВЕРТОЛЁТОВ ОДНОВИНТОВОЙ СХЕМЫ С МОНОГРУЗОМ

Линейная математическая модель (ММ) *получена в результате линеаризации* ММ *изолированного продольного движения, выделенного при определенных допущениях из модели пространственного движения с учётом влияния моногруза в уравнениях сил. Линейная* ММ *продольного канала вертолета может быть использована при моделировании собственных движений вертолетов в продольном канале с моногрузом, а также при синтезе систем управления различными режимами работы*

Пространственное движение пары вертолётов в кильватерном строю с моногрузом на общей подвеске

Дистанционно управляемый вертолет необходимо рассматривать как наиболее технологически простое и недорогое изделие. В таком случае целесообразно использовать одновинтовую компоновку с хвостовым рулевым винтом, имеющим электрический привод. Схема сил и моментов, действующих на вертолёты с общей подвеской в кильватерном строю при стабилизации барометрической высоты, представлена на рис. 1.

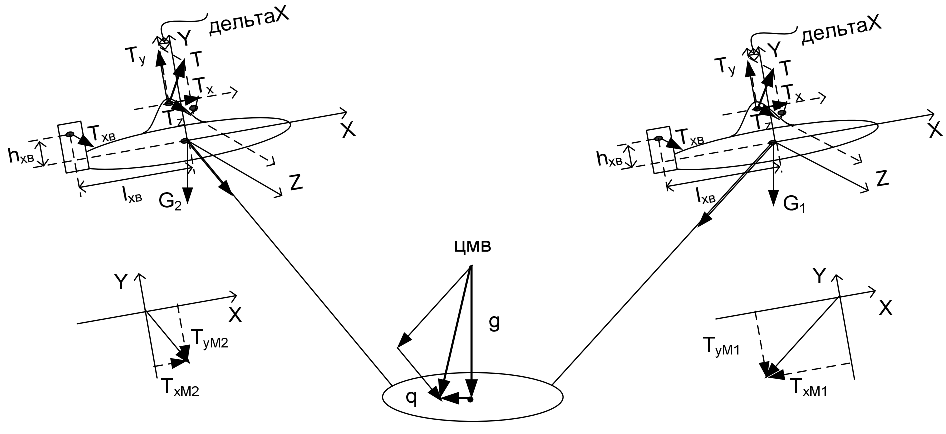

Рис.1. Два вертолета в кильватерном строю с моногрузом

Пренебрегая упругостью конструкции фюзеляжа, полагая, что скорость ветра равна нулю (путевая и воздушная скорости равны), а оси системы координат OXYZ направлены по главным осям инерции вертолёта (все центробежные моменты инерции равны нулю), составим уравнения пространственного движения (три уравнения равновесия сил и три уравнения равновесия моментов) предполагая при этом, что Земля плоская и не вращается:

$$\begin{aligned}
&m\left(\dot V_x + \omega_y V_z - \omega_z V_y\right) = T_x + R_x - mg\sin\vartheta\cos\gamma - T_{xMi};\\
&m\left(\dot V_y + \omega_z V_x - \omega_x V_z\right) = T_y + R_y - mg\cos\vartheta\cos\gamma;\\
&m\left(\dot V_z + \omega_x V_y - \omega_y V_x\right) = T_z + R_z + T_{\text{хв}} + mg\cos\vartheta\sin\gamma - T_{yMi};\\
&I_x\dot\omega_x + \left(I_z - I_y\right)\omega_y\omega_z = T_z h_{\text{нв}} - T_{\text{хв}} h_{\text{хв}} + M_x^{\text{а}};\\
&I_y\dot\omega_y + \left(I_x - I_z\right)\omega_x\omega_z = M_{\text{р нв}} - T_{\text{хв}}\left(b_{\text{хв}} - \Delta x\right) - T_z\Delta x + M_y^{\text{а}};\\
&I_z\dot\omega_z + \left(I_y - I_x\right)\omega_x\omega_y = M_{\text{р хв}} - T_x h_{\text{нв}} + T_y\Delta x + M_z^{\text{а}}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь I_x, I_y, I_z – основные моменты инерции вертолёта; ϑ, γ – углы тангажа и крена фюзеляжа вертолёта; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости фюзеляжа; T_x, T_y, T_z – составляющие вектора тяги несущего винта; $T_{\text{хв}}$ – тяга хвостового винта; $M_{\text{р нв}}, M_{\text{р хв}}$ – реактивные моменты несущего и хвостового винтов; $M_x^{\text{а}}, M_y^{\text{а}}, M_z^{\text{а}}$ – аэродинамичес кие моменты, воздействующие на фюзеляж; V_x, V_y, V_z – составляющие воздушной скорости вертолёта V; R_x, R_y, R_z – проекции аэродинамиче ских сил на связанные оси;

T_{xMi}, T_{yMi} – суммарная реакция веса и аэродинамического сопротивления моногруза.

Аэродинамические силы, воздействующие на фюзеляж, определяются в скоростной системе координат. Их проекции на связанные оси равны:

$$\begin{aligned} R_x &= X_a\cos\beta\cos\alpha - Y_a\sin\alpha - Z_a\sin\beta\cos\alpha; \\ R_y &= -X_a\cos\beta\sin\alpha + Y_a\cos\alpha - Z_a\sin\beta\sin\alpha; \\ R_z &= X_a\sin\beta + Z_a\cos\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь α, β – углы атаки и скольжения вертолёта. Так как интенсивное маневрирование при решении задач мониторинга не предполагается, то разделим пространственное движения вертолёта на два изолированных движения – продольное и боковое. Кроме того, при линеаризации этих уравнений будем считать, что скорость вращения несущего винта $\Omega_{нв}$ стабилизирована

.**Линеаризация математической модели продольного движения вертолёта**

При отсутствии ветра земная и воздушная скорости равны. Поэтому уравнения продольного движения в связанной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} m\left(\dot{V}_x - V_y\omega_z\right) &= X; \\ m\left(\dot{V}_y + V_x\omega_z\right) &= Y; \\ I_z\omega_z &= M_z. \end{aligned} \quad (3)$$

В правых частях уравнений (3) обозначены продольные суммарные силы и момент, действующие на вертолёт в соответствии с уравнениями (1) и (2).

Определим линейные приращения этих сил и момента

$$\begin{aligned} \Delta X &= \left(\frac{\partial X}{\partial V_x}\right)_0 \Delta V_x + \left(\frac{\partial X}{\partial V_y}\right)_0 \Delta V_y + \left(\frac{\partial X}{\partial \omega_z}\right)_0 \Delta\omega_z + \left(\frac{\partial X}{\partial \vartheta}\right)_0 \Delta\vartheta + \left(\frac{\partial X}{\partial \chi}\right)_0 \Delta\chi + \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi_o}\right)_0 \Delta\varphi_o; \\ \Delta Y &= \left(\frac{\partial Y}{\partial V_x}\right)_0 \Delta V_x + \left(\frac{\partial Y}{\partial V_y}\right)_0 \Delta V_y + \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega_z}\right)_0 \Delta\omega_z + \left(\frac{\partial Y}{\partial \vartheta}\right)_0 \Delta\vartheta + \left(\frac{\partial Y}{\partial \chi}\right)_0 \Delta\chi + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi_o}\right)_0 \Delta\varphi_o; \\ \Delta M_z &= \left(\frac{\partial M_z}{\partial V_x}\right)_0 \Delta V_x + \left(\frac{\partial M_z}{\partial V_y}\right)_0 \Delta V_x + \left(\frac{\partial M_z}{\partial \omega_z}\right)_0 \Delta\omega_z + \left(\frac{\partial M_z}{\partial \vartheta}\right)_0 \Delta\vartheta + \left(\frac{\partial M_z}{\partial \chi}\right)_0 \Delta\chi + \left(\frac{\partial M_z}{\partial \varphi_o}\right)_0 \Delta\varphi_o. \\ \Delta\left(V_y\omega_z\right)_0 &= V_{y0}\Delta\omega_z + \omega_{z0}\Delta V_y;\ \Delta\left(V_x\omega_z\right)_0 = V_{x0}\Delta\omega_z + \omega_{z0}\Delta V_x;\ \ \omega_{z0} = 0,\ V_{x0} = V,\ V_{y0} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь χ – угол отклонения автомата перекоса в продольном канале; φ_o – общий шаг несущего винта, индекс «0» определяет точку линеаризации.

Записываем исходное уравнение в нормальной безразмерной форме. Для этого делим первое и второе уравнение на mV, а третье – на $I_z L/V$. Обозначим $\Delta V_x/V = V_x$, $\Delta V_y/V = V_y$, $\Delta\omega_z L/V = \omega_z$, $\Delta\chi = \chi$, $\Delta\varphi_0 = \varphi$. Используя эти обозначения, систему линеаризованных уравнений продольного канала вертолёта в отклонениях запишем виде

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= a_x^{V_x}V_x + a_x^{V_y}V_y + \left(a_x^{\omega_z} + V_{y0}/L\right)\omega_z + a_x^{\vartheta}\vartheta + a_x^{\chi}\chi + a_x^{\varphi}\varphi; \\ \dot{V}_y &= a_y^{V_x}V_x + a_y^{V_y}V_y + \left(a_y^{\omega_z} - V_{x0}/L\right)\omega_z + a_y^{\vartheta}\vartheta + a_y^{\chi}\chi + a_y^{\varphi}\varphi; \\ \dot{\omega}_z &= a_{m_z}^{V_x}V_x + a_{m_z}^{V_y}V_y + a_{m_z}^{\omega_z}\omega_z + a_{m_z}^{\chi}\chi + a_{m_z}^{\varphi}\varphi; \\ \dot{\vartheta} &= \omega_z. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты системы уравнений (5) обозначим следующим образом:

$$a_{11} = a_x^{V_x} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial X}{\partial V_x}\right)_0, a_{12} = a_x^{V_y} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial X}{\partial V_y}\right)_0, a_{13} = \left(a_x^{\omega_z} + \frac{V_{y0}}{L}\right) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\partial X}{\partial \omega_z}\right) + V_{y0}\right)_0, a_{14} = a_x^{\vartheta} = \frac{1}{mV}\left(\frac{\partial X}{\partial \vartheta}\right)_0,$$

$$a_{21} = a_y^{V_x} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial Y}{\partial V_x}\right)_0, a_{22} = a_y^{V_y} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial Y}{\partial V_y}\right)_0, a_{23} = \left(a_y^{\omega_z} - \frac{V_{x0}}{L}\right) = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega_z}\right) + V_{x0}\right)_0, a_{24} = a_y^{\vartheta}\frac{1}{mV}\left(\frac{\partial Y}{\partial \vartheta}\right)_0,$$

$$a_{31} = a_{m_z}^{V_x} = \frac{L}{I_z}\left(\frac{\partial M_z}{\partial V_x}\right)_0, a_{32} = a_{m_z}^{V_y} = \frac{L}{I_z}\left(\frac{\partial M_z}{\partial V_y}\right)_0, a_{33} = a_{m_z}^{\omega_z} = \frac{1}{I_z}\left(\frac{\partial M_z}{\omega_z}\right)_0, a_{34} = \frac{L}{I_z V}\left(\frac{\partial M_z}{\partial \vartheta}\right)_0, a_{43} = \frac{V}{L},$$

$$b_{11} = a_x^{\chi} = \frac{1}{mV}\left(\frac{\partial X}{\partial \chi}\right)_0, b_{12} = a_x^{\varphi} = \frac{1}{mV}\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)_0, b_{21} = a_y^{\chi} = \frac{1}{mV}\left(\frac{\partial Y}{\partial \chi}\right)_0, b_{22} = a_y^{\varphi} = \frac{1}{mV}\left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)_0,$$

$$b_{31} = a_{m_z}^{\chi} = \frac{L}{I_z V}\left(\frac{\partial M_z}{\partial \chi}\right)_0, b_{32} = a_{m_z}^{\varphi} = \frac{L}{I_z V}\left(\frac{\partial M_z}{\partial \varphi}\right)_0.$$

Систему уравнений продольного движения вертолёта представим в матричной форме

$$\dot{y} = Ay + B\Delta. \quad (6)$$

Здесь $y=\left(V_x\ V_y\ \omega_z\ \vartheta\right)^T$ – вектор состояния; $\Delta=\left(\chi\ \varphi\right)^T$ – вектор управления. Матрицы A и B:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Коэффициенты можно получить в процессе лётных испытаний или продувки модели вертолета в аэродинамической трубе. Можно произвести аналитический расчёт, применив принцип подобия, по известным аэродинамическим характеристикам вертолета соответствующей компоновки.

Пусть параметры вертолета равны: $m=250$ кг, $I_z=200$ Нс^{2}м, $L=0.5$ м – расстояние от передней кромки фюзеляжа до центра масс. Скорость полёта $V = 30$ м с$^{-1}$.

Для дистанционно управляемого вертолета, с компоновкой известной модели МИ-1 в соответствии с принципом подобия были рассчитаны элементы матриц (7). Результаты расчётов:

$$a_{11}=-1.38,\ a_{12}=-0.196,\ a_{13}=-0.2,\ a_{14}=-0.058,\ a_{21}=-0.05,\ a_{22}=-0.9,\ a_{23}=-0.1,\ a_{24}=-0.065,$$

$$a_{31}=-0.15,\ a_{32}=-0.2,\ a_{33}=-0.8,\ a_{43}=60,\ b_{11}=1.0,\ b_{12}=2, b_{21}=-.8,\ b_{22}=0.3,\ b_{31}=0.25,\ b_{32}=0.01.$$

Синтез системы управления

Оператор управляет ведущим вертолетом, а ведомый имеет систему стабилизации своего положения относительно ведущего. Ниже будет рассмотрена система управления продольным движением головного вертолёта в режиме маршрутного полёта. Для удобства оператора синтезирована система с автономным управлением автоматом перекоса и общим шагом несущего винта в продольном канале. Синтез производился с использованием программного пакета MathCad.

1. Систему уравнений (6) представим виде

$$\dot{y}=Ay+B\text{Д}_1+f_1\ . \quad (8)$$

Здесь $y=\left(v_1\, v_2\, \omega_3\, \vartheta\right)^T$ – вектор состояния, $\text{Д}_1\left(\chi\,\varphi_1\right)$ – вектор управления. Матрицы равны:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} -1.38 & -.196 & -.2 & .058 \\ -.050 & -.9 & -.1 & .065 \\ -.150 & -.2 & -.8 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1.0 & 2. \\ .6 & .3 \\ .25 & .01 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Характеристическое уравнение получим, приравняв нулю определитель характеристической матрицы:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q_1=pE-A,\ Q_1=\begin{pmatrix} p+1.38 & .196 & .2 & -.058 \\ .05 & p+.9 & .1 & -.065 \\ .15 & .2 & p+.8 & 0 \\ 0 & 0 & -60 & p \end{pmatrix};$$

$$\left|Q_1\right|=p^4+3.08p^3+3.006p^2+2.238p+1.397=0\ .$$

Корни характеристического уравнения вертолёта равны $\left(-1.058,-1.927,-.04762\pm.8252i\right)$. Вертолёт по продольному каналу находится вблизи колебательной границы устойчивости.

3. Для удобства оператора обеспечим автономное управление с помощью автомата перекоса и общего шага несущего винта

Замкнутая система «Вертолет+САУ» описывается матричным уравнением

$$\dot{y}=\text{C}_1y+K_1\text{U}_{13}+f_1\ . \quad (9)$$

Здесь U_{13} – вектор заданных управлений, C_1 – матрица системы «Вертолет+САУ», K_1 – матрица коэффициентов усилений каналов САУ, T_{11}, T_{12}, T_{13} – постоянные времени автономных каналов,

$$\mathrm{U}_{13}=\begin{pmatrix} v_{13}\\ v_{23}\\ \omega_{33}\end{pmatrix},\qquad \mathrm{C}_1=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_{13} & 0\\ 0 & 0 & a_{43} & 0\end{pmatrix},\qquad c_{11}=c_{12}=-2, c_{13}=-1,\qquad \mathrm{K}_1=\begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0\\ 0 & k_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & k_{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$k_{11}=k_{12}=1.5,\ k_{13}=2$; $T_{11}=-1/c_{11}=.5\text{с}$, $T_{12}=-1/c_{12}=.5\text{с}$, $T_{13}=-1/c_{13}=1\text{с}$.

4. Приравняв правые части уравнений (8) и (9), определим вектор управлений $\text{Д}_1(\chi\,\varphi_1)$:

$$Ay+B\text{Д}_1+f=\mathrm{C}_1 y+\mathrm{K}_1\mathrm{U}_3+f_1. \qquad (10)$$

Матрица B прямоугольная, поэтому приближенное решение уравнения (10) ищем через псевдообратную относительно B матрицу

$$M_1=\left(B^{\mathrm T}B\right)^{-1}B^{\mathrm T}=\begin{pmatrix} -.286 & 1.868 & 1.235 & 0\\ .712 & -1.38 & -.958 & 0\end{pmatrix}.$$

Решением уравнения (10) будет $\text{Д}_1=\left(B^{\mathrm T}B\right)^{-1}B^{\mathrm T}\left[\left(\mathrm{C}_1-A\right)y+\mathrm{K}_1\mathrm{U}_3\right]$.

Законы управления соответствуют строчкам полученного выше решения:

$$\begin{aligned}\chi&=-.4296v_{13}+2.802v_{23}+2.469\omega_{33}+.4562v_1-1.864v_2-.1174\omega_3-.105\vartheta,\\ \varphi_1&=1.0686v_{13}-2.071v_{23}-1.916\omega_{33}-.6541v_1+1.466v_2+.196\omega_3+.04879\vartheta.\end{aligned} \qquad (11)$$

Законы управления (11) были реализованы в системе Matlab-Simulink, структура модели представлена на рис. 2.

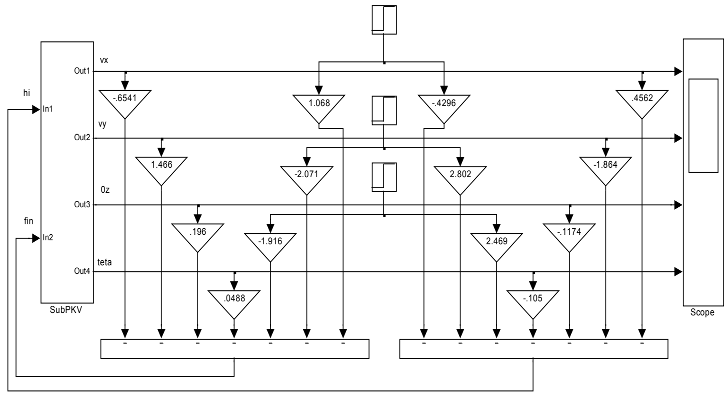

Рис.2. Структурная схема модели продольного канала системы «САУ- пара вертолетов»

В левой стороне рисунка изображен блок «SubPKV», который соответствует продольному каналу вертолёта, уравнения (6). Структурная схема модели представлена на рис.3

.

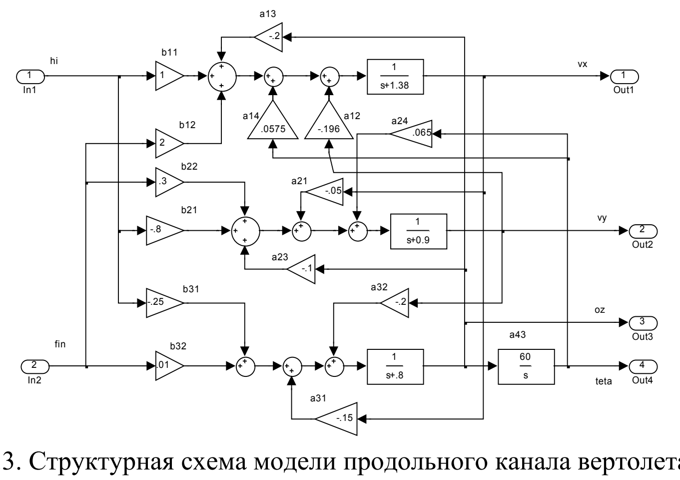

Рис.3. Структурная схема модели продольного канала вертолета

Науковий керівник – Асланян А. Э., д-р. техн. наук, проф.